대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.1, 27-43. Mar. 2006

예비중등교사의 수학화 능력을 신장하기 위한 교수단원의 설계: n-단체(simplex)의 n-부피 탐구[1)]

김 진 환* · 박 교 식**

이 연구의 목적은 예비중등교사들의 실제적인 수학화 능력을 신장할 수 있도록 n-단체의 n-부피를 탐구하는 교수단원 <n-단체의 n-부피 탐구>를 설계하는 것이다. 이 교수단원에서는 2차원 도형인 삼각형의 넓이와 3차원 도형인 사면체의 부피를 n-단체의 n-부피로 일반화하는 것에 초점을 맞추고 있다. 이 일반화 과정에는 형식불역의 원리와 카발리에리의 원리가 적용된다. n-단체의 n-부피를 구하기 위해 n-직교삼각기둥을 정의하고, 그것의 n-부피를 공리적으로 탐색한다. 그리고 n-단체의 n-부피를 벡터와 행렬식을 이용하여 구한다. 이 교수단원을 통해 예비 중등 교사들은 삼각형과 사면체의 일반화된 도형인 n-단체, 그리고 삼각형의 넓이와 사면체의 부피의 일반화된 n-단체의 부피를 이해하고 탐구할 수 있고, 학교수학과 학문수학의 자연스런 연결을 도모할 수 있다.

Ⅰ. 서 론

이 연구의 목적은 예비중등교사들의 실제적인 수학화 능력을 신장할 수 있도록 n-단체(單體, simplex)의 n-부피를 탐구하는 교수단원 <n-단체의 n-부피 탐구>를 설계하는 것이다. 이 연구에서 n-단체는 사면체를 n차원으로 일반화한 도형을 의미한다. 또, 교수단원은 어떤 특정한 교수 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 조직해 놓은 교수 내용 전체를 의미한다(Wittmann, 1984, 1995, 2001). 특히 이 연구에서는 수학화를 통해 예비중등교사들이 n-단체의 n-부피를 탐구할 수 있는 교수단원을 설계한다. 수학화는 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 모든 종류의 활동을 의미하는 바, 예를 들면 일반화, 추상화, 관점의 전환 등이 그것에 해당한다(Freudenthal, 1991; 정영옥, 1997; 우정호, 2000).

수학화는 '현상'을 '본질'로 조직하는 순환적 활동인 바, 현상이 본질로 조직되고 나면, 그 본질을 다시 새로운 현상으로 취급하여, 그것을 새로운 본질로 조직하는 활동이 반복된다. 사실상 수학화는 거의 모든 수학적 활동의 원동력이다(Freudenthal, 1991; 정영옥, 1997; 우정호, 2000). 수학화는 '수평적 수학화'와 '수직적 수학화'로 구분될 수 있다. 수평적 수학화는 현상으로 주어진 것을 수학적 실재로 변형하는 것이고, 수직적 수학화는 수학적 실재를 수학

---

* 영남대(kimjh@ynu.ac.kr)
** 경인교대(pkspark@gin.ac.kr)
1) 이 논문은 2005학년도 영남대학교 학술연구조성비지원에 의한 것임.

적 체계 내에서 본질로 조직하는 것이다(Treffers, 1987). 수학화는 수평적 수학화로 시작하며, 수직적 수학화로 이어진다. 조직된 본질은 다시 현상이 되는 바, 그 현상에 대한 수평적 수학화와 수직적 수학화가 계속된다(Freudenthal, 1973, 1991). <n-단체의 n-부피 탐구>에서는 이미 구체적 현상으로부터 조직된 삼각형과 사면체라는 본질을 다시 새로운 하나의 현상으로 간주하여, 그 현상을 동일한 관점에서 새로운 수학적 문제로 진술하는 바, 그 진술은 바로 수평적 수학화에 해당한다. 또, 수평적 수학화의 결과를 $n(\geq 4)$차원으로 일반화하는 바, 그것은 수직적 수학화에 해당한다.

다시 말해 <n-단체의 n-부피 탐구>에서 목표로 하는 수학화는 2차원 도형인 삼각형의 넓이와 3차원 도형인 사면체의 부피를 n-단체의 n-부피로 일반화하는 것이다. 예를 들면 밑변의 길이가 a, 높이가 h인 삼각형의 넓이와 밑면의 넓이가 A, 높이가 g인 사면체의 부피는 각각 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}ah,\ \frac{1}{3}Ag$$

이때 이 두 식에서 어떤 유사성을 찾을 수 있다. 이 연구는 이 유사성을 단서로 n-단체의 n-부피를 구하는 것이다.

수학적으로 $n \geq 4$일 때, n차원 사면체를 단체(simplex) 또는 초사면체(hypertetrahedron)라고 한다. 또, n차원 도형의 일반화된 부피를 내용(content; 또는 용량이라 하기도 한다), 초부피(hypervolume), 또는 그냥 부피라고 한다.[2] <n-단체의 n-부피 탐구>에서는, 'n차원 사면체'라는 용어 대신 'n-단체'라는 용어를 사용한다. 그리고 그것의 일반화된 부피를 'n-부피'라고 부르기로 한다. 형식적으로 $n \leq 3$인 경우에도 n-단체를 생각할 수 있다. 0-단체는 한 점이고, 1-단체는 한 선분이다. 이것은 한 점 밖의(즉, 그 점 외부의) 다른 한 점을 이어 만든 것으로 생각할 수 있다. 2-단체는 한 삼각형이다. 이것은 한 선분 밖의(즉, 그 선분 외부의) 한 점과 그 선분의 양 끝점을 이어 만든 것으로 생각할 수 있다. 3-단체는 한 사면체이다. 이것은 한 삼각형의 외부에 있는 한 점과 그 삼각형의 세 꼭지점을 이어 만든 것으로 생각할 수 있다. 이 구성 방법을 그대로 확장하면, 4-단체는 3-단체인 한 사면체의 외부에 있는 한 점과 그것의 네 꼭지점을 이어 만든 4차원 도형임을 알 수 있다. 같은 방법으로 n-단체는, 한 $(n$-$1)$-단체의 외부에 있는 한 점과 그것의 n개 꼭지점을 이어 만든, $(n+1)$개의 꼭지점을 갖는 n차원 도형임을 알 수 있다.[3] 이런 방법은 n차원 도형을 구성하는 방법 중의 하나이다(Courant, Robbins & Stewart, 2004).

예를 들면 3-단체인 사면체를 구성 성분에는 꼭지점(vertex), 모서리(edge), 면(face)이 있다. 이들은 각각 0-단체, 1-단체, 2-단체이다. 이들이 3-단체의 구성 성분이 된다는 관점에서 그것들을 각각 0-면, 1-면, 2-면이라고 한다. 그러나 0-면은 혼동될 우려가 없으므로 그냥 '꼭지점'이라고 부르기로 한다. 즉, 3-단체에는 4개의

2) 대한수학회(www.kms.or.kr)의 수학 용어 데이터베이스(인터넷판)에서는 simplex를 '단체(單體)'로, content를 '내용, 용량'으로 번역하고 있다. 그러나 hypertetrahedron과 hypervolume의 번역어를 제시하지는 않고 있다. 그런데 이 데이터베이스에서 hyperplane이 '초평면'으로 번역되고 있음을 볼 때, hypertetrahedron을 '초사면체'로, hypervolume을 '초부피'로 각각 번역할 수 있을 것으로 보인다.

3) 여기서 사용되는 '외부'는 조합론적 관점이기보다는 공간기하적 관점에서 주어진 k-단체에 의해 생성되는 k-차원 공간에 포함되지 않는다는 의미를 가진다.

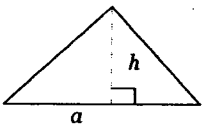
꼭지점, 6개의 1-면, 4개의 2-면이 있다. 같은 방법으로 4-단체에는 5개의 꼭지점, 10개의 1-면, 10개의 2-면, 5개의 3-면이 있다. 일반적으로 n-단체의 꼭지점, 1-면, 2-면, …, (n-1)-면의 수는 각각 다음과 같다.

$${}_{n+1}C_1,\ {}_{n+1}C_2,\ \cdots,\ {}_{n+1}C_n$$

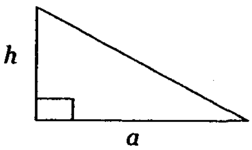
<n-단체의 n-부피 탐구>에서는 이렇게 만든 n-단체의 n-부피를 탐구한다. 명백히 1-부피는 '길이', 2-부피는 '넓이', 3-부피는 통상적인 '부피'이다.

II. n-직교단체와 n-직교삼각기둥

카발리에리(Cavalieri)의 원리에 따르면 밑변의 길이가 a, 높이가 h인 평행사변형의 넓이는 두 변의 길이가 각각 a, h인 직사각형의 넓이와 같다. 또, [그림 II-1]과 같이 밑변의 길이가 a, 높이가 h인 삼각형의 넓이는 [그림 II-2]와 같이 두 변의 길이가 각각 a, h인 직각삼각형의 넓이와 같으며, 그것은 두 변의 길이가 각각 a, h인 직각사각형의 넓이의 ½과 같다.[4]

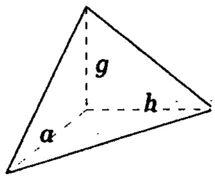


[그림 II-1] 삼각형

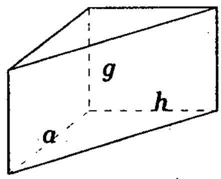


[그림 II-2] 직각삼각형

카발리에리의 원리에 따르면 밑면의 넓이와 높이가 같은 사면체의 부피는 서로 같다. 따라서 밑면의 넓이가 A, 높이가 g인 사면체의 부피는 밑면을 이루는 삼각형의 어느 한 꼭지점에서 밑면에 수직인 높이 g를 가진 사면체의 부피와 서로 같다. 만약 이 사면체의 밑면을 이루는 삼각형의 밑변의 길이가 a, 높이가 h라면, 결국 이 사면체의 부피는 다음 [그림 II-3]과 같이 밑면이 두 변의 길이가 각각 a, h인 직각삼각형 모양이고, 그 두 변의 교점에서 밑면에 수직인 높이 g를 갖는 사면체의 부피와 서로 같다. 그리고 그것은 [그림 II-4]와 같이 밑면이 직교하는 두 변의 길이가 각각 a, h인 직각삼각형 모양이고, 그 두 변의 교점에서 밑면에 수직인 높이 g를 갖는 삼각기둥의 부피의 ⅓과 같다.[5] 여기까지가 학교수학이다. 예비중등교사들은 <n-단체의 n-부피 탐구>에서 이것을 자신이 대학에서 배운 학문수학과 연결한다.



[그림 II-3] 사면체



[그림 II-4] 삼각기둥

위 두 경우에서 삼각형의 넓이나 사면체의 부피를 두 변 혹은 세 변이 서로 '직교'하는 삼각형 혹은 사면체의 부피로 환원할 수 있었다. <n-단체의 n-부피 탐구>에서는 먼저 n-단체의 n-부피를 구하기 위해 위의 경우를 각각 'n-직교단체'와 'n-직교삼각기둥'으로 일반화한다. 카

4) 우리나라 학교수학에서는 '카발리에리의 원리'를 명시적으로 언급하고 있지는 않다. 그러나 실제로는 그것을 취급하고 있다. <n-단체의 n-부피 탐구>에서는 카발리에리의 원리 그 자체에 초점을 맞추지는 않는다. 다만 그것을 적용한다. 카발리에리의 원리는 GSP 등의 소프트웨어를 통해 쉽게 실험해 볼 수 있다.

5) 이 내용은 중학교수학에서 처음으로 도입되지만, 이때 수학적으로 완전한 설명이 수반되지는 않는다. 단지 학생들이 직관적으로 이해할 수 있게 하는 설명이 제시된다.

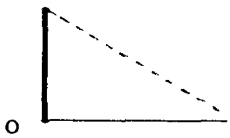
발리에리의 원리를 적용하므로 n-단체의 n-부피는 n-직교단체의 n-부피로 환원할 수 있다.

1. n-직교단체

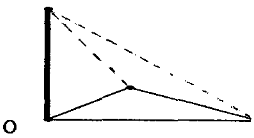
<n-단체의 n-부피 탐구>에서 예비중등교사들은 먼저 선분으로부터 삼각형을 어떻게 구성할 수 있는지에 초점을 맞추어야 한다. 한 선분은 두 개의 꼭지점을 가진다. 한 선분이 주어지고, 이 선분의 한 꼭지점을 O라고 하자. 1차원 도형인 선분으로부터 한 차원 높은 2차원 도형을 구성하기 위해, [그림 II-5]와 같이 새로운 선분을 택해 한 꼭지점을 기존 선분의 한 꼭지점 O에 붙인다. 이때 이 선분이 기존의 선분과 직각을 이루도록 연결한다. 다음 이 선분의 나머지 꼭지점과 기존 선분의 나머지 꼭지점을 선분으로 연결한다. 이렇게 만들어진 2차원 도형을 2-직교단체라고 하자. (2-직교단체는 직각삼각형을 의미한다.) 이것은 3개의 선분과 3개의 꼭지점을 가지는 평면도형이다.

위와 같은 방식으로 하나의 2-직교단체(즉, 직각삼각형)와 하나의 선분이 주어진다면, 한 차원 높은 3차원 도형을 구성할 수 있다. 먼저 2-직교단체의 두 직교하는 선분의 교점을 O라 하자. [그림 II-6]과 같이 새로운 선분의 한 꼭지점을 점 O에 붙인다. 이때 새로운 선분이 기존의 두 선분과 각각 직각을 이루도록 연결한다. 그 다음에 새로운 선분의 나머지 꼭지점과 기존의 두 선분의 나머지 두 꼭지점을 선분으로 연결한다. 이렇게 만들어진 3차원 도형을 3-직교단체 (또는 직교사면체)라고 하자. 3-직교단체는 6개의 선분과 4개의 면과 4개의 꼭지점으로 구성된 입체도형이다.

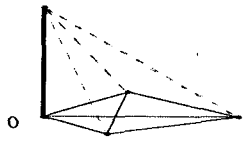
이제 형식불역이라는 관점에서 2-직교단체와 3-직교단체를 구성한 것과 같은 방식으로 계속해서 4-직교단체를 구성할 수 있다. 먼저 하나의 3-직교단체의 세 직교하는 선분의 교점을 O라 하자. 새로운 하나의 선분을 택해 그것의 한 꼭지점을 점 O에 붙인다. 이때 새로운 선분이 기존의 세 선분과 각각 직각을 이루도록 연결한다. 그 다음에 새로운 선분의 나머지 꼭지점과 기존의 세 선분의 나머지 세 꼭지점을 선분으로 연결한다. 이렇게 만들어진 4차원 도형을 4-직교단체라고 하자. 이렇게 구성된 4-직교단체는 4차원 도형이다. 사실상 4-직교단체를 2차원적인 그림으로 정확히 표현하는 것은 불가능하다. 그림으로 그릴 수는 있지만, 그 그림은 이해를 돕기 위한 가상적인 그림일 뿐이다. 그것은 실제 모습으로 구체화될 수 있는 대상이 아니다. 이 연구에서도 그것의 구성 방법을 이해하기 위해 [그림 II-7]을 사용하기로 한다. 그것은 [그림 II-5], [그림 II-6]을 확장한 것임을 쉽게 알 수 있다. [그림 II-7]은 4-직교단체의 공간적 구조를 이해하는데 도움이 되지만, 그것으로 4-직교단체의 물리적 모습을 알 수 있는 것은 아니다. 4-직교단체를 pentatope, 5-cell 등으로 부른다.[6)]



[그림 II-5] 2-직교단체



[그림 II-6] 3-직교단체



[그림 II-7] 4-직교단체

6) 대한수학회(www.kms.or.kr)의 수학 용어 데이터베이스(인터넷판)에서는 pentatope의 번역어를 제시하지 않고 있으나, cell의 번역어로는 '세포, 칸, 포체'를 제시하고 있다.

4-직교단체를 구성한 것과 같은 방식으로 5-직교단체, 6-직교단체, …, n-직교단체를 구성할 수 있다. 먼저 하나의 (n-1)-직교단체의 (n-1)개의 직교하는 선분의 교점을 O라 하자. 새로운 하나의 선분을 잡아 한 꼭지점을 점 O에 붙인다. 이때 새로운 선분이 기존의 (n-1)개의 선분과 각각 직각을 이루도록 연결한다. 그 다음에 새로운 선분의 나머지 꼭지점과 기존의 (n-1)개 선분의 나머지 (n-1)개 꼭지점을 선분으로 연결한다. 이렇게 만들어진 n차원 도형을 n-직교단체라고 하자. 이렇게 구성된 n-직교단체는 n차원 도형이다.

<n-단체의 n-부피 탐구>에서 초점을 맞추는 것은 이렇게 만들어진 n-직교단체의 n-부피이다. 2-직교단체의 두 직교하는 선분의 길이를 각각 a_1, a_2라 하고, 또 3-직교단체의 세 직교하는 선분의 길이를 각각 a_1, a_2, a_3라고 하자. 그러면 2-직교단체의 2-부피(즉, 넓이)와 3-직교단체의 3-부피(즉, 부피)는 각각 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\frac{1}{2}a_1a_2,\ \frac{1}{2 \cdot 3}a_1a_2a_3$$

이것으로부터 4-직교단체의 네 직교하는 선분의 길이를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라고 하면, 그것의 4-부피는 다음과 같을 것으로 추측할 수 있다.

$$\frac{1}{4!}a_1a_2a_3a_4$$

또, n-직교단체의 n개의 직교하는 선분의 길이를 각각 a_1, a_2, …, a_n이라고 하면 그것의 n-부피는 다음과 같을 것으로 추측할 수 있다.

$$\frac{1}{n!}a_1a_2\cdots a_n \quad \cdots \text{ (II.1)}$$

<n-단체의 n-부피 탐구>에서 예비중등교사들은 이러한 추측이 틀리지 않았다는 것을 확인하게 된다.

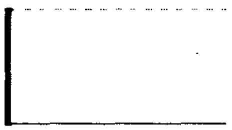
2. n-직교삼각기둥

<n-단체의 n-부피 탐구>에서 예비중등교사들은 n-직교단체의 n-부피를 구하기 위해 n-직교삼각기둥을 정의하게 된다. 먼저 하나의 선분이 주어지고, 이 선분의 한 꼭지점을 O라고 하자. 1차원 도형인 선분으로부터 한 차원 높은 도형을 구성하기 위해, [그림 II-8]과 같이 새로운 하나의 선분을 택해 한 꼭지점을 기존 선분의 꼭지점 O에 붙인다. 이때 이 선분이 기존의 선분과 직각을 이루도록 한다. 다시 이 새 선분과 길이가 같은 선분을 한 개 복제하여 기존 선분의 나머지 꼭지점에 새 선분과 같은 방향으로 붙인다. 그리고 새 선분과 복제한 선분의 나머지 꼭지점을 선분으로 연결한다. 이것을 2-직교삼각기둥이라고 한다. (2-직교삼각기둥은 바로 직사각형을 의미한다.) 이렇게 보면 2-직교삼각기둥은 한 선분을 그것과 직교하는 방향으로 놓은 새 선분을 따라 평행이동 시킬 때 생기는 자취로 볼 수 있다. 따라서 이것의 2-부피(즉, 넓이)는 기존 선분의 길이와 새 선분의 길이의 곱과 같다.

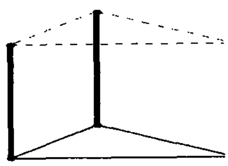
하나의 2-직교단체(즉, 직각삼각형)와 새로운 선분이 하나 주어지면, 3차원 도형을 구성할 수 있다. 2-직교단체에 대해, [그림 II-9]와 같이 그것에 포함된 두 직교하는 선분의 교점을 O라 하자. 새로운 선분의 한 꼭지점을 원점 O에 붙인다. 이때 그 새로운 선분이 기존의 두 직교하는 선분과 각각 직각을 이루도록 한다. 이 새 선분과 길이가 같은 선분을 두 개 복제하여 2-직교단체의 나머지 꼭지점에 새 선분과 같은 방향으로 붙인다. 그리고 새 선분과 복제한 선분들의 나머지 꼭지점을 선분으로 서로 연결한다.

이렇게 만든 도형을 3-직교삼각기둥이라 한다. 3-직교삼각기둥은 2-직교단체를 그것과 직교하는 방향으로 놓은 새 선분을 따라 평행이동 시킬 때 생기는 자취로 볼 수 있다. 따라서 이것의 3-부피(즉, 통상적인 부피)는 2-직교단체의 2-부피(즉, 넓이)와 새 선분의 길이의 곱과 같다.

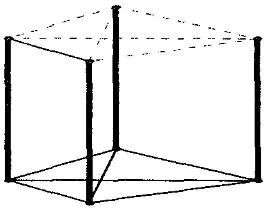
하나의 3-직교단체가 주어지고, 새로운 선분이 하나 주어지면 4차원 도형을 구성할 수 있다. 3-직교단체에 대해, 그것에 포함된 세 개의 직교하는 선분의 교점을 O라 하자. 새로운 선분의 한 꼭지점을 원점 O에 붙인다. 이때 기존의 세 직교하는 선분과 각각 직각을 이루도록 한다. 이 새 선분과 길이가 같은 세 개의 선분을 복제하여 3-직교단체의 나머지 꼭지점에 새 선분과 같은 방향으로 붙인다. 그리고 새 선분과 복제한 선분들의 나머지 꼭지점을 서로 선분으로 연결한다. 이렇게 만든 4차원 도형을 4-직교삼각기둥이라 한다. 4-직교삼각기둥은 3-직교단체를 그것과 직교하는 방향으로 놓은 새 선분을 따라 평행이동 시킬 때 생기는 자취로 볼 수 있다. 따라서 이것의 4-부피는 3-직교단체의 3-부피와 새 선분의 길이의 곱과 같다. 이렇게 만든 4-직교삼각기둥을 다음 [그림 II-10]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 II-8] 2-직교삼각기둥



[그림 II-9] 3-직교삼각기둥



[그림 II-10] 4-직교삼각기둥

4-직교삼각기둥을 구성한 것과 같은 방식으로 5-직교삼각기둥, 6-직교삼각기둥, …, n-직교삼각기둥을 구성할 수 있다. 먼저 하나의 (n-1)-직교단체의 (n-1)개의 직교하는 선분의 교점을 O라 하자. 새로운 하나의 선분을 택해 한 꼭지점을 점 O에 붙인다. 이때 새로운 선분이 기존의 (n-1)개의 선분과 각각 직각을 이루도록 연결한다. 이 새 선분과 길이가 같은 선분을 (n-1)개 복제하여, (n-1)-직교단체의 나머지 n개 꼭지점에 선분과 같은 방향으로 붙인다. 그 다음에 새로운 선분과 복제한 선분들의 나머지 꼭지점을 서로 선분으로 연결한다. 이렇게 만들어진 n차원 도형을 n-직교삼각기둥이라고 하자. 이렇게 구성된 n-직교단체는 n차원 도형이다. n-직교삼각기둥은 (n-1)-직교단체를 그것과 직교하는 방향으로 놓은 새 선분을 따라 평행이동 시킬 때 생기는 자취로 볼 수 있다.

따라서 이것의 n-부피는 (n-1)-직교단체의 (n-1)-부피와 새 선분의 길이의 곱과 같다. 그런데 이렇게 정의한 n-직교삼각기둥의 n-부피는 사실상 공리적인 것이다. 이것은 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이가 ab라는 것이 공리인 것과 마찬가지이다.

<n-단체의 n-부피 탐구>에서는 (n-1)-직교단체의 (n-1)-부피로부터 n-직교삼각기둥의 n-부

피를 결정한다. 그리고 이렇게 정의한 n-직교삼각기둥의 n-부피를 바탕으로 n-직교단체의 n-부피를 구하게 된다. 이것은 직사각형의 넓이를 바탕으로 직각삼각형의 넓이를 구하는 것과 같다. 그 형식을 그대로 보존하여 n차원의 경우로 확장한 것이다.

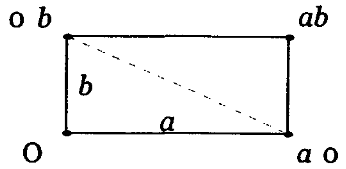
III. n-직교단체의 n-부피 구하기

1. n-직교삼각기둥의 n-부피를 이용하여 n-직교단체의 n-부피 구하기

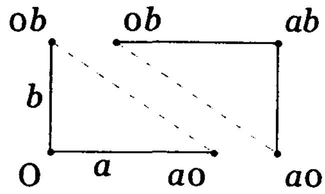
직각삼각형의 두 직교하는 선분의 길이를 각각 a, b라 하자. 그러면 이 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다. 이것을 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이 ab와 비교하기 위해, [그림 III-1]처럼 각 꼭지점에 0과 a및 b로 된 두 자리의 이름을 붙인다. 그 다음 이 직사각형을 [그림 III-2]와 같이 꼭지점이 O(즉, 원점), a0, 0b인 직각삼각형과 꼭지점이 a0, 0b, ab인 직각삼각형으로 분할한다.

여기서 이 두 삼각형이 공유하는 부분은 a0과 0b를 잇는 선분이다. 사실 직사각형을 두 개의 직각삼각형으로 분할하는 방식은 두 가지이다. 즉, 원점 O를 공유하는 방식과 공유하지 않는 방식이 있다.

여기서는 2-직교단체를 포함하기 위해 후자의 방식을 택한다. 이때 이 두 직각삼각형의 넓이는 같다. 따라서 밑변의 길이와 높이가 각각 a, b인 직각삼각형의 넓이는 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

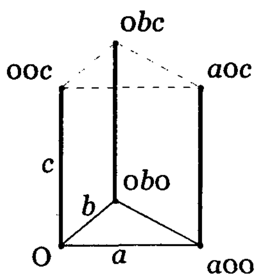


[그림 III-1] 직사각형

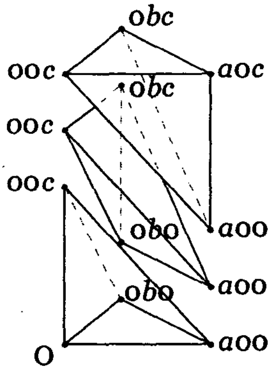


[그림 III-2] 직사각형의 분할

이러한 논의를 3-직교단체와 3-직교삼각기둥으로 확장할 수 있다. 3-직교단체의 세 직교하는 선분의 길이를 각각 a, b, c라고 하자. 직교하는 두 선분의 길이가 각각 a, b인 2-직교단체와 길이가 c인 선분에 의해 만들어진 3-직교삼각기둥의 각 꼭지점에 대해, [그림 III-3]과 같이 0과 a, b 및 c로 된 세 자리의 이름을 붙인다. 이 3-직교삼각기둥의 부피는 길이가 각각 a, b인 두 직교하는 선분을 가지는 직각삼각형의 넓이 $\frac{1}{2}ab$에 c를 곱한 것으로 $\frac{1}{2}abc$이다. 그런데 3-직교삼각기둥은 [그림 III-4]와 같이 3개의 3-단체(이 중에는 3-직교단체가 아닌 것도 있다)로 분할된다. 이때 인접하는 두 3-단체의 공유하는 부분은 2-단체(삼각형)임은 분명하다.



[그림 III-3] 3-직교삼각기둥



[그림 III-4] 3-직교삼각기둥의 분할

카발리에리의 원리에 따르면 이들 3개의 사면체는 서로 부피가 같다. 따라서 3-직교단체의 부피는 3-직교삼각기둥의 부피의 ⅓과 같다. 즉, 그 부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}abc\right)=\frac{1}{2\cdot 3}abc=\frac{1}{3!}abc$$

이제 이 3-직교단체의 부피를 구하는 식으로부터 4-직교삼각기둥의 4-부피를 구할 수 있고, 이것을 바탕으로 4-직교단체의 4-부피를 구할 수 있다. 4-직교단체의 네 직교하는 선분의 길이를 각각 a, b, c, d라고 하자. 직교하는 세 선분의 길이가 각각 a, b, c인 3-직교단체와 길이 d인 선분에 의해 만들어진 4-직교삼각기둥의 4-부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{3!}abcd$$

이 4-직교삼각기둥의 각 꼭지점에 0과 a, b, c 및 d로 된 네 자리의 이름을 붙일 수 있고, 그것을 4개의 4-단체(이 중에는 4-직교단체가 아닌 것도 있다)로 분할할 수 있다. 이것을 [그림 III-5]와 같이 나타낼 수 있다. 이때 직접 인접하는 두 4-단체가 공유하는 부분은 3-단체이다. 또한 이들 네 4-단체의 4-부피는 카발리에리의 원리에 따라 모두 같다.

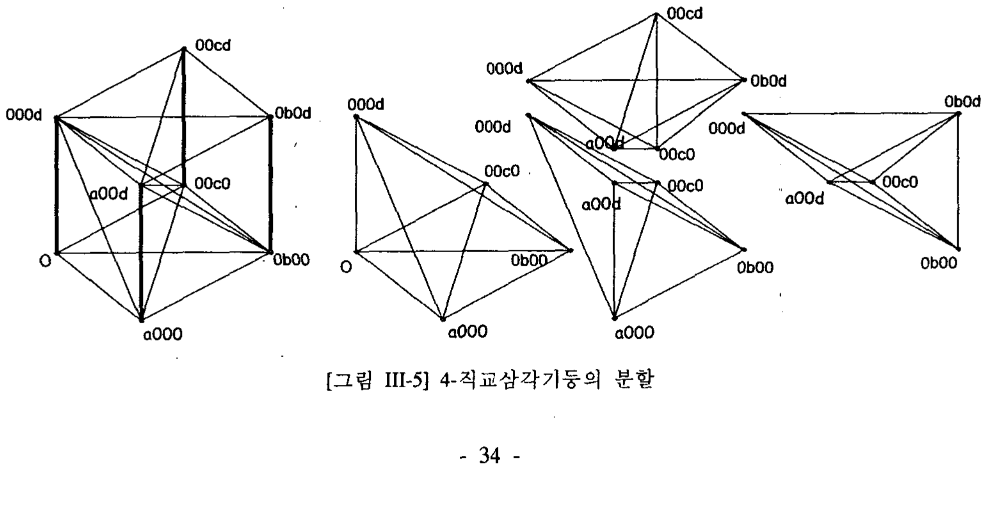
따라서 4-직교단체의 4-부피는 4-직교삼각기둥의 4-부피의 ¼과 같음을 알 수 있다. 즉, 그 부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3!}abcd\right)=\frac{1}{4!}abcd$$

지금까지 사용된 형식을 다음과 같은 방식으로 4차원 이상으로 확장하여 적용하면 n-직교단체의 n-부피를 구할 수 있다.

2-직교삼각기둥(직사각형)의 넓이 → 2직교단체(직각삼각형)의 넓이 → 3-직교삼각기둥의 부피 → 3-직교단체의 부피 → 4-직교삼각기둥의 4-부피 → 4-직교단체의 4-부피 → … → $(n$-1)-직교단체의 n-부피 → n-직교삼각기둥의 n-부피 → n-직교단체의 n-부피

$(n$-1)-직교단체의 $(n$-1)개의 직교하는 선분



[그림 III-5] 4-직교삼각기둥의 분할

의 길이를 각각 a_1, a_2, …, a_{n-1}이라 하고, 새 선분의 길이를 a_n이라고 할 때, 이 (n-1)-직교단체와 새로운 선분으로 만들어지는 n-직교삼각기둥의 n-부피는 형식불역에 따라 다음과 같다.

$$\frac{1}{(n-1)!}a_1a_2\cdots a_n$$

n-직교삼각기둥은 n개의 n-단체로 분할될 수 있으므로, n-직교단체의 n-부피는 n-직교삼각기둥의 n-부피를 n으로 나눈 값으로 다음과 같다.

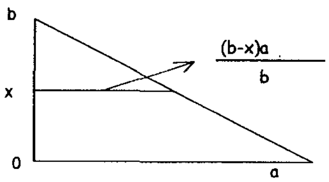
$$\frac{1}{n!}a_1a_2\cdots a_n$$

2. 적분을 활용하여 n-직교단체의 n-부피 구하기

앞에서는 n-직교사각기둥의 n-부피를 바탕으로 n-직교단체의 n-부피를 구하였다. 이 절에서는 적분을 활용하여 n-직교단체의 n-부피를 구한다.

가. 정적분의 활용

직교하는 두 선분의 길이가 각각 a, b인 2-직교단체(즉, 직각삼각형)의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있다. 정적분을 이용하기 위해 [그림 III-6]과 같이 x에 대한 선분이 움직여서 이 2-직교단체의 내부를 메운다고 생각하자.



[그림 III-6] 2-직교단체의 부피 구하기

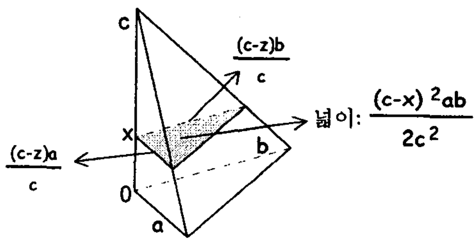
이때 x에 대한 선분의 길이는 다음과 같다.

$$\frac{(b-x)a}{b}$$

x=0에서 x=b까지 움직이므로 이 2-직교단체의 넓이는 다음 정적분으로 주어진다.

$$\int_0^b \frac{(b-x)a}{b}dx = \frac{a}{2b}b^2 = \frac{ab}{2}$$

이와 같은 방법으로 3-직교단체의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있다. [그림 III-7]과 같이 x에 대한 2-직교단체와 그 내부가 움직여서 이 3-직교단체의 내부를 메운다고 생각하자.



[그림 III-7] 3-직교단체의 부피 구하기

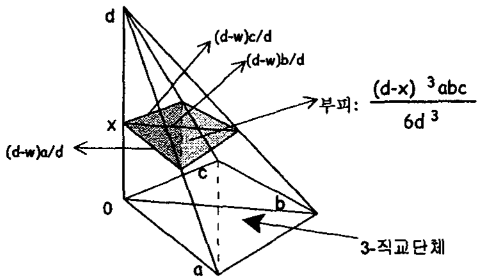
이때 x에 대한 2-직교단체의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{(c-x)^2ab}{2c^2}$$

x=0에서 x=c까지 움직이므로 이 3-직교단체의 부피는 다음 정적분으로 주어진다.

$$\int_0^c \frac{(c-x)^2ab}{2c^2}dx = [-\frac{(c-x)^3ab}{6c^2}]_0^c = \frac{abc}{6}$$

같은 방법으로 4-직교단체의 4-부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있다. [그림 III-8]과 같이 x에 대한 3-직교단체와 그 내부가 움직여서 이 4-직교단체의 내부를 메운다고 생각하자.



[그림 III-8] 4-직교단체의 부피 구하기

이때 x에 대한 3-직교단체의 3-부피는 다음과 같다.

$$\frac{(d-x)^3abc}{6d^3}$$

x=0에서 x=d까지 움직이므로, 이 4-직교단체의 4-부피는 다음 정적분으로 주어진다.

$$\int_0^d \frac{(d-x)^3abc}{6d^3}dx=[-\frac{(d-x)^4abc}{24d^3}]_0^d=\frac{abcd}{24}$$

수학적 귀납법을 이용하기 위하여 이것이 k-직교단체($1 \le k \le n$-1)에 대해 성립한다고 가정하고, n-직교단체의 n-부피를 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^{a_n} \frac{(a_n - x)^{n-1}a_1a_2 \cdots a_{n-1}}{(n-1)!\,(a_n)^{n-1}}dx =$$

$$\frac{a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n}{n!} \quad \cdots \text{ (III.1)}$$

이 결과는 앞에서 구한 식 (II.1)과 일치한다.

나. 중적분의 활용

중적분을 활용하여 n-직교단체의 n-부피를 구할 수도 있다. 중적분을 활용하기 위해 먼저 길이가 각각 a_1, a_2, …, a_n인 n개의 선분이 공통 교점 O에서 서로 직교하는 n-직교단체를 Δ_n=$\Delta(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$이라 하자. 공통 교점을 원점으로 하며, 이들 선분을 포함하는 각각의 수직선을 x_1-축, x_2-축, …, x_n-축으로 하는 n차원의 직교좌표공간을 만든다. 그러면 Δ_n에 포함되는 각 요소를 이 직교좌표로 표현할 수 있다.

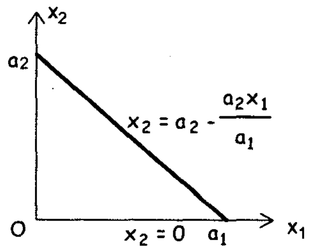
예를 들면 1차원의 직교좌표공간에서 Δ_1은 다음과 같다.

$$\Delta_1=\{x_1 |\ 0 \le x_1 \le a_1\}$$

따라서 Δ_1의 길이를 적분을 활용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta_1\text{의 길이}=\int_{\Delta_1} dx_1=\int_0^{a_1} dx_1=a_1$$

2차원의 직교좌표공간에서 Δ_2를 그래프로 나타내면 [그림 III-9]와 같다.



[그림 III-9] 2-직교단체

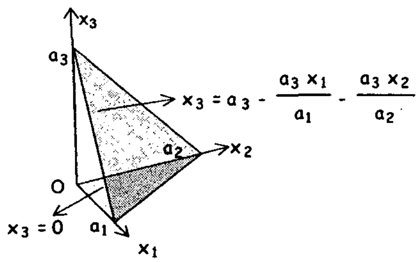
이때 Δ_2는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta_2=\{(x_1,\ x_2) |\ 0 \le x_1 \le a_1,\ 0 \le x_2 \le a_2 - \frac{a_2x_1}{a_1}\}$$

따라서 Δ_2의 부피를 중적분을 활용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta_2\text{의 넓이}=\iint_{\Delta_2} dx_1dx_2 = \int_0^{a_1}\int_0^{a_2-\frac{a_2x}{a_1}} dx_2dx_1 = \frac{a_1a_2}{2}$$

3차원의 직교좌표공간에서 Δ_3를 그래프로 나타내면 [그림 III-10]과 같다.



[그림 III-10] 3-직교단체

이때 Δ_3는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\Delta_3=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)|\ 0\le x_1\le a_1,\ 0\le x_2\le a_2-\frac{a_2x_1}{a_1},\ 0\le x_3\le a_3-\frac{a_3x_1}{a_1}-\frac{a_3x_2}{a_2}\}$

따라서 Δ_3의 부피를 중적분을 활용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

Δ_3의 부피$=\iiint_{\Delta_3} dx_1dx_2dx_3=$

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2-\frac{a_2x_1}{a_1}}\int_0^{a_3-\frac{a_3x_1}{a_1}-\frac{a_3x_2}{a_2}} dx_3dx_2dx_1$$

$$=\frac{a_1a_2a_3}{6}$$

같은 방법으로 4차원의 직교좌표공간에서 Δ_4를 그래프로 나타내는 것을 생각할 수 있다. 그래서 예를 들면 [그림 III-11]과 같이 나타내는 것이 가능하다.

이때 Δ_4는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\Delta_4=\{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)|\ 0\le x_1\le a_1,\ 0\le x_2\le a_2-\frac{a_2x_1}{a_1},\ 0\le x_3\le a_3-\frac{a_3x_1}{a_1}-\frac{a_3x_2}{a_2},\ 0\le x_4\le a_4-\frac{a_4x_1}{a_1}-\frac{a_4x_2}{a_2}-\frac{a_4x_3}{a_3}\}$

따라서 Δ_4의 4-부피를 중적분을 활용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

Δ_4의 4-부피$=\iiiint_{\Delta_4} dx_1dx_2dx_3dx_4$

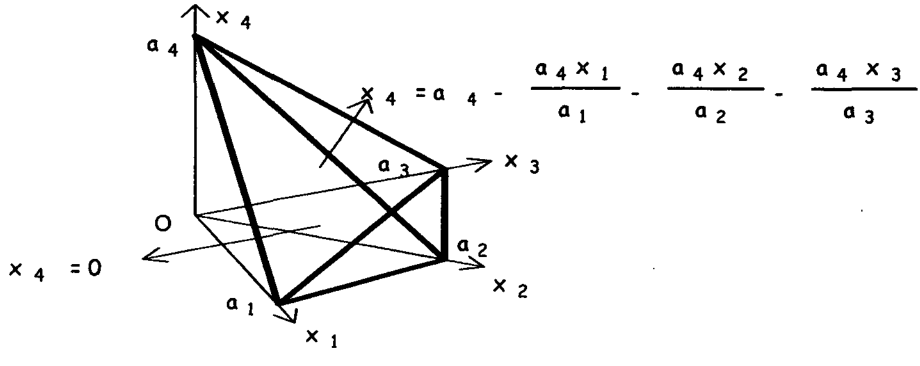
$$=\int_0^{a_1}\int_0^{a_2-\frac{a_2x_1}{a_1}}\int_0^{a_3-\frac{a_3x_1}{a_1}-\frac{a_3x_2}{a_2}}$$

$$\int_0^{a_4-\frac{a_4x_1}{a_1}-\frac{a_4x_2}{a_2}-\frac{a_4x_3}{a_3}} dx_4dx_3dx_2dx_1=\frac{a_1a_2a_3a_4}{24}$$

이와 같은 방법을 5차원 이상으로 확장하면, n차원의 직교좌표공간에서 Δ_n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\Delta_n=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)|\ 0\le x_1\le a_1,\ 0\le x_2\le a_2-\frac{a_2x_1}{a_1},\ 0\le x_3\le a_3-\frac{a_3x_1}{a_1}-\frac{a_3x_2}{a_2},\ \cdots,$

$0\le x_n\le a_n-\frac{a_nx_1}{a_1}-\frac{a_nx_2}{a_2}-\cdots-\frac{a_nx_{n-1}}{a_{n-1}}\}$



[그림 III-11] 4-직교단체

따라서 이 n-직교단체 $\Delta_n=\Delta(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$의 n-부피를 중적분을 활용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\triangle_n\text{의 } n\text{-부피}=\int\cdots\iiint_{\triangle_n} dx_1dx_2dx_3\cdots dx_n$$

$$=\int_0^{a_1}\int_0^{a_2-\frac{a_2x_1}{a_1}}\int_0^{a_3-\frac{a_3x_1}{a_1}-\frac{a_3x_2}{a_2}}\cdots$$

$$\int_0^{a_n-\frac{a_nx_1}{a_1}-\cdots-\frac{a_nx_{n-1}}{a_{n-1}}} dx_n\cdots dx_3dx_2dx_1$$

$$=\frac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{n!}\ \cdots\ \text{(III.2)}$$

이 결과는 앞에서 구한 식 (II.1), (III.1)과 일치한다.

Ⅳ. n-단체의 n-부피 구하기

이 절에서는 일반적인 n-단체의 n-부피를 Cayley-Menger의 행렬식, 벡터, 그리고 보통의 행렬식을 활용할 수 있는 방법에 대해 논의한다.

1. Cayley-Menger의 행렬식으로 n-단체의 n-부피 구하기

n-단체의 두 꼭지점 사이의 모든 거리를 알 때 그것의 n-부피는 Cayley-Menger 행렬식을 활용하여 구할 수 있음이 이미 알려져 있다.[7] 이 방법에 의하면, 꼭지점이 $R^m\,(m\geq n)$에서 v_1, v_2, $\cdots$, v_{n+1}인 n-단체의 n-부피 V는 다음 식처럼 $(n+2)\times(n+2)$ 행렬 $\hat{B}=[b_{ij}]$의 행렬식의 값과 관계가 있다. (그러나 <n-단체의 n-부피 탐구>에서는 이것의 증명은 취급하지 않는다.)

$$V^2=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2}\det(\hat{B})$$

여기서 행렬 $\hat{B}$의 ij-성분 b_{ij}는 다음 식처럼 주어진다. 이때 $d_{ij}(1\leq i,j\leq n+1)$는 꼭지점 v_i과 꼭지점 v_j간의 거리를 나타낸다.

$$b_{ij}=\begin{cases}1-\delta_{ij}\,(i=1\text{혹은}j=1)\\ d_{i-1j-1}^{\,2}\,(2\leq i,j\leq n+2)\end{cases}$$

특히 n=2인 경우, 이 식으로부터 세 변의 길이를 아는 삼각형의 넓이를 구하는 헤론의 공식이 유도된다.

2. 벡터를 활용하여 n-단체의 n-부피 구하기

좌표축으로 x_1-축과 x_2-축을 갖는 좌표평면에서 길이 a인 선분과 이 선분을 포함하는 직선에 포함되지 않는 점 P에 의해 만들어진 삼각형의 넓이를 찾는 문제는 이 직선과 점 P와의 거리(즉, 높이)를 구하는 문제로 귀착된다. 직선의 방정식을

$$a_1x_1+a_2x_2+c=0$$

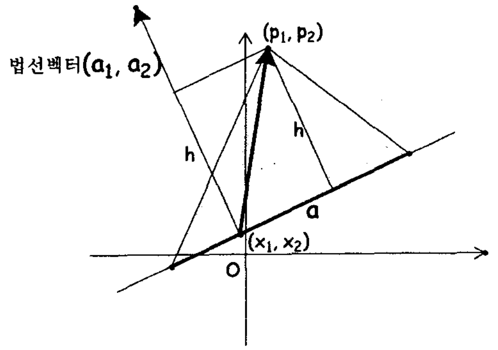
으로 표현하면, 벡터 $(a_1,\ a_2)$는 이 직선의 법선벡터이다. 주어진 점 P를 $(p_1,\ p_2)$로 나타내면 이 점과 직선까지의 거리(즉, 높이) h는 다음과 같다.

$$\frac{|a_1p_1+a_2p_2+c|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

이것은 선분을 포함한 직선에 있는 임의의 한 점 $(x_1,\ x_2)$를 택해, [그림 IV-1]에서 볼 수

7) Eric W. Weisstein et al. "Cayley-Menger Determinant." From MathWorld -- A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Cayley-MengerDeterminant.html

있듯이 벡터 (p_1-x_1, p_2-x_2)를 법선벡터 (a_1, a_2)로 정사영하여 얻은 벡터의 길이로 볼 수 있다. 따라서 길이 h는 내적 (p_1-x_1, p_2-x_2) $\cdot$ (a_1, a_2)를 법선벡터의 길이 $|(a_1,a_2)|$로 나눈 값으로 위의 식처럼 주어진다.



[그림 IV-1] 점과 직선까지의 거리

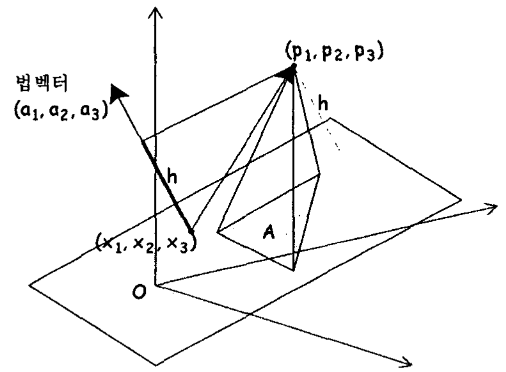
따라서 삼각형의 넓이는 선분의 길이 a와 높이 h와의 곱을 2로 나눈 값으로 다음과 같다.

$$\frac{a|a_1p_1 + a_2p_2 + c|}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

또, 좌표축으로 x_1-축, x_2-축, x_3-축을 갖는 좌표공간에서 넓이가 A인 삼각형과 이 삼각형을 포함하는 평면에 포함되지 않는 점 P에 의해 만들어진 사면체(3-단체)의 부피를 찾는 문제는 이 평면과 점 P와의 거리(즉, 높이)를 구하는 문제로 귀착된다. 만약 이 평면의 방정식을

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0$$

으로 나타내면, 벡터 (a_1, a_2, a_3)는 이 평면의 법선벡터이다. 주어진 점 P를 (p_1, p_2, p_3)로 나타내면 이 점과 평면까지의 거리(즉, 높이) h는, 주어진 삼각형을 포함한 평면상의 임의의 한 점 (x_1, x_2, x_3)를 택할 때, [그림 IV-2]에서 볼 수 있듯이, 벡터 (p_1-x_1, p_2-x_2, p_3-x_3)를 법선벡터 (a_1, a_2, a_3)로 정사영하여 얻은 벡터의 길이로 볼 수 있다.



[그림 IV-2] 점과 평면까지의 거리

이 길이 h는 내적 (p_1-x_1, p_2-x_2, p_3-x_3) $\cdot$ (a_1, a_2, a_3)를 법선벡터의 길이 $|(a_1,a_2,a_3)|$로 나눈 값으로 다음과 같다,

$$\frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

이때 길이 h는 평면 위의 점 (x_1, x_2, x_3)의 선택에 영향을 받지 않는다. 따라서 사면체의 부피는 앞 절의 논의로부터 삼각형의 넓이 A와 높이 h와의 곱을 3으로 나눈 값으로 다음과 같다.

$$\frac{A|a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + c|}{3\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

일반적으로 n차원 공간에서 (n-1)-부피(이것을 V라고 하자)를 아는 어떤 (n-1)-단체에서 (n-1)-단체를 포함하는 (n-1)차의 초평면(hyperplane)에 포함되지 않는 한 점 P로부터 구성된 n-단체의 n-부피를 구하는 문제는 이 (n-1)차원의 초평면과 점 P와의 거리(즉, 높이)를 구하는 문제로 귀착된다. 만약 이 초평면의 방정식을

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + c = 0$$

으로 나타내면, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$는 이 초평면의 법선벡터이다. 주어진 점 P를 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$으로 나타내면, 이 점과 초평면까지의 거리(즉, 높이) h는, 주어진 어떤 $(n\text{-}1)$-단체를 포함한 초평면상에 임의의 한 점 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$을 택할 때 벡터 $(p_1\text{-}x_1, p_2\text{-}x_2, \cdots, p_n\text{-}x_n)$을 법선벡터 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$로 정사영하여 얻은 벡터의 길이로, 다음과 같다.

$$\frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n + c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

따라서 이 n-단체의 n-부피는 $(n\text{-}1)$-단체의 $(n\text{-}1)$-부피 V와 h와의 곱을 n으로 나눈 값으로 다음과 같다.

$$\frac{V \ |a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n + c|}{n\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

3. 행렬식을 활용하여 n-단체의 n-부피 구하기

좌표평면에서 원점 O와 $v_1=(a_1, b_1)$을 잇는 선분과 원점 O와 $v_2=(a_2, b_2)$를 잇는 선분을 두개의 변으로 하는 평행사변형의 넓이는 (a_1, b_1) 및 (a_2, b_2)를 두 행벡터로 하는 행렬식의 값의 절대값과 같다. 즉 평행사변형의 넓이는 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{Ov_1}||\overrightarrow{Ov_2}||\sin\theta| = |\overrightarrow{Ov_1}||\overrightarrow{Ov_2}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2)^2}$$

$$= |a_1b_2 - b_1a_2|$$

따라서 원점 O와 $v_1=(a_1, b_1)$, $v_2=(a_2, b_2)$을 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}|a_1b_2 - b_1a_2|$$

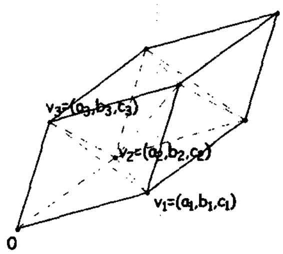
또, 좌표공간에서 원점 O와 $v_1=(a_1, b_1, c_1)$을 잇는 선분, 원점과 $v_2=(a_2, b_2, c_2)$ 및 원점 O와 $v_3=(a_3, b_3, c_3)$을 잇는 선분을 세 개의 변으로 하는 평행육면체의 부피는 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) 및 (a_3, b_3, c_3)을 행벡터로 가지는 행렬의 행렬식의 값, 즉 이 세 벡터의 스칼라 삼중적의 절대값과 같다. 즉, 평행육면체의 부피는 다음과 같다.

$$|(a_1, b_1, c_1)\times(a_2, b_2, c_2)\cdot(a_3, b_3, c_3)|$$

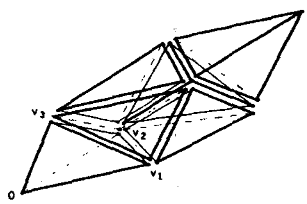
따라서 원점 O와 $v_1=(a_1, b_1, c_1)$, $v_2=(a_2, b_2, c_2)$ 및 $v_3=(a_3, b_3, c_3)$를 꼭지점으로 하는 3-단체(즉, 사면체)의 부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{3!}|(a_1, b_1, c_1)\times(a_2, b_2, c_2)\cdot(a_3, b_3, c_3)|$$

다음 [그림 IV-3], [그림 IV-4]는 평행육면체의 부피와 3-단체의 부피 사이의 관계를 보여준다. 특히 [그림 IV-4]에서의 3!=6개의 사면체(3-단체)는 카발리에리의 원리에 의해 같은 부피를 가진다.



[그림 IV-3]평행육면체



[그림 IV-4] 평행육면체와 3-단체

일반적으로, R^n에서 꼭지점으로 원점 O와 v_1, v_2, …, v_n를 갖는 n-단체의 n-부피는 선분 $\overline{0v_1}$, $\overline{0v_2}$, …, $\overline{0v_n}$ 에 의해 만들어진 n차원 초평행육면체(hyperparallelepiped)의 n-부피를 $n!$로 나눈 값과 같다. 따라서

$v_1=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$, $v_2=(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$, …, $v_n=(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$

이라 할 때, 이 n-단체의 n-부피 V는 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$, $(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$, …, $(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$을 행벡터로 가지는 $n\times n$행렬 $A=[a_{ij}]$의 행렬식의 값의 절대값을 $n!$로 나눈 값으로 다음처럼 주어진다.

$$V=\frac{1}{n!}(\det(A)\text{의 절대값})$$

V. 결 론

이 연구는 예비 중등교사들의 수학화 능력을 신장하기 위한 교수단원 <n-단체의 n-부피 탐구>를 설계하는 것이다. 이 교수단원에서는 2차원 도형인 삼각형의 넓이와 3차원 도형인 사면체의 부피를 n-단체의 n-부피로 일반화하는 것에 초점을 맞추고 있다. 이 일반화 과정에서 형식불역의 원리와 카발리에리의 원리가 적용된다.

이 교수단원을 통해 예비 중등교사들은 삼각형과 사면체의 일반화된 도형인 n-단체, 그리고 삼각형의 넓이와 사면체의 부피의 일반화된 n-단체의 부피를 이해하고 탐구할 수 있다. 또한 그 과정에서 삼각형과 사면체는 n-단체의 특별한 경우라는 것을, 그리고 삼각형의 넓이와 사면체의 부피는 n-단체의 n-부피의 특별한 경우라는 것을 알 수 있다.

이 교수단원을 통해 예비 중등교사들은 학교수학과 학문수학의 자연스런 연결을 도모할 수 있다. 학교수학에서는 삼각형의 넓이와 사면체의 부피를 구하는 것으로 한정하고 있다. 그러나 학문수학의 범위에서 보면 이들은 일반적인 n-단체의 n-부피의 특별한 경우이다. 이 교수단원에서는 삼각형 및 그것의 넓이와 사면체 및 그것의 부피를 점진적으로 일반화함으로써 학교수학과 학문수학의 자연스런 연결을 도모하고 있다. 이러한 연결은 이중단절(Klein, 2004)을 해소하는데 일조할 수 있다. 학생들이 중·고등학교를 졸업하고 대학에 가는 경우, 그들은 중·고등학교에서 배운 수학과 대학에서 배우는 수학 사이에 단절이 있음을 경험하게 된다. 그런데 중등학교 교사가 되는 학생들은 교사가 되면서 그러한 단절을 또 한 차례 겪게 되는 바, 그것이 바로 이중단절이다. 교수단원 <n-단체의 n-부피 탐구>를 통해 예비중등교사들은 대학에서 배운 학문수학의 내용이 학교수학과 어떻게 연결되는지 알 수 있고, 따라서 그것은 그들이 겪는 이중단절의 극복에 도움이 될 수 있다.

이 연구에서는 n-단체의 n-부피의 탐구를 위한 일련의 과정을 <n-단체의 n-부피 탐구>라는 교수단원 형식으로 제시한다. 그러나 이 연구에서는 그 일련의 과정을 실제의 교실에서 확인하지는 않고 있다. 그러한 과정은 사실 교실의 조건에 따라 다를 것이다. 그런 만큼 이 교수단원은 교실 조건에 따라 수정되어 활용되어야 할 것이다. <n-단체의 n-부피 탐구>는 이러한 수정과 보완을 거치면서 점점 더 나은 교수단원으로 완성될 수 있다.

참고문헌

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Courant, R. Robbins, H. & Stewart, I. (2004). **수학이란 무엇인가**(제2판). 박평우, 김운규, 정광택(공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1996년 출판).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. (China Lectures).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic · Algebra · Analysis.* E. R. Hedrick, C. A. Noble (trans.). New York: Dover Publications. (원작은 1924년에 출판).

Treffers, A. (1987). *Tree dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 1-20.

A Design of Teaching Unit to Foster Secondary Pre-service Teachers' Mathematatising Ability: Inquiry into n-volume of n-simplex

Kim, Jin Hwan (Yeungnam Univ.)
Park, Kyo Sik (Gyeongin Nat'l Univ. of Edu.)

The objective of this paper is to design teaching units <inquiry into n-volume of n-simplex> to foster secondary pre-service teachers' mathematising abilities. In these teaching units we focus on generalizing area of a 2-dimensional triangle and volume of a 3-dimensional tetrahedron to n-volume of n-simplex. In this process of generalizing, principle of the permanence of equivalent forms and Cavalieri's principle are applied. To find n-volume of n-simplex, we define n-orthogonal triangular prism, and inquire into n-volume of it. And we find n-volume of n-simplex by using vectors and determinants. Through these teaching units, secondary pre-service teachers can understand and inquire into n-simplex which is generalized from a triangle and a tetrahedron, and n-volume of n-simplex which is generalized from area of a triangle and volume of a tetrahedron. They can also promote natural connection between school mathematics and academic mathematics.

* key words : academic mathematics(학문수학), Cavalieri's principle(카발리에리의 원리), mathematising(수학화), n-simplex(n-단체), n-volume(n-부피), principle of the permanence of equivalent forms(형식불역의 원리), school mathematics (학교수학), teaching units(교수단원)

논문접수 : 2006. 1. 20
심사완료 : 2006. 3. 10