

< 논문 >

중력류 흐름에 대한 직접수치해석

이재룡* · S. Balachandar** · 하만영†

(2005년 9월 1일 접수, 2006년 3월 7일 심사완료)

Direct Numerical Simulation of Gravity Currents

Jae Ryong Lee, S. Balachandar and Man Yeong Ha

Key Words : Direct Numerical Simulation(직접수치해석), Gravity Currents(중력류), Front Velocity(전방속도)

Abstract

Resolved simulations are presented for gravity current flows aiming at studying their spreading rate. The simulations are performed for two extreme configurations such as planar and cylindrical and for 3 different Grashof numbers: 10^5 , 1×10^6 and 10^7 . Varying the size of the heavy fluid release, the study is performed for several phases of spreading, namely acceleration, slumping and inertial phases. For the simulations, efficient spectral multi-domain code is used. From the simulations results it is concluded that 2-D results predicts well the mean front velocity during the slumping phase, but fails to predict it during the inertial phase of spreading. It is also observed that the vortex dynamics of the flow is not reproduced well by the 2-D simulation.

기호설명

e_i^g	: 중력방향 단위벡터
Fr	: Froude 수 $[= u_F / \sqrt{gH(\rho_1 - \rho_0) / \rho_0}]$
Gr	: Grashof 수 $[= g(\rho_1 - \rho_0)H^3 / (\rho_0 \nu^2)]$
H	: 채널 높이
\tilde{p}	: 무차원 압력
Sc	: Schmidt 수 $(= \nu / \kappa)$
\tilde{t}	: 무차원 시간
u_F	: 전방속도
\tilde{u}_i	: 무차원 속도
λ_{ci}	: 선회 강도
ρ_0	: 저밀도 유체
ρ_1	: 고밀도 유체

$\tilde{\rho}$: 무차원 밀도
ν	: 동점성 계수
κ	: 열팽창 계수

1. 서론

중력류는 상하부, 혹은 좌우의 밀도차에 의해서 야기되는 유동의 수평적 이동이 일어나게 되는 유동현상이다. 즉, 고밀도의 유체가 아래쪽에서 형성이 되고 저밀도의 유체가 상부에서 흐르게 되는 메커니즘이다. 일반적인 밀도차에 의한 유동과는 달리, 중력류는 수평적 밀도차에 의해 유동이 생긴다. 또한, 부력에 의한 유동의 생성과도 달리, 유동이 진행함에 따라 생기는 수평방향으로 형성되는 수평적 압력구배에 의해 야기되는 유동이다. 이는 아주 작은 밀도차에 의해서 생성될 수 있으며, 오랫동안 유동의 흐름이 지속되기도 한다. 이러한 유동은 자연계에서 쉽게 찾아볼 수 있으며, 화산폭발시의 용암의 흐름, 바다에서의 기름의 유출, 건물 붕괴 시 먼지의 흐름, 눈사태 등이 이에 해당된다.^(1,2)

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부
E-mail : myha@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-2440 FAX : (051)515-3101

* 부산대학교 대학원 기계공학과

** MIE dept. University of Illinois, USA

중력류의 전방부의 도달시간과 최대 전파 거리 등을 예측하는 것이 필요하게 됨에 따라, 다양한 모델들이 개발되었다. 초기의 이론적 모델은 고밀도의 유동흐름을 예측하기 위한 간단한 수학적 모델이며⁽³⁾ 이후에 보다 복잡한 수력학적 모델을 사용한 중력류 위치 예측 모델이 개발되었다.⁽⁴⁾ 실험적으로는, 중력류의 전파에 대한 연구가 세가지의 상(phase)에 대해서 연구가 되어왔다.⁽⁵⁾ 여기(rest)상태에서 유동이 시작되는 초기가속상태 (acceleration phase), 일정한 속도를 유지하는 흐름상태 (slumping phase) 그리고 부력과 관성력이 조화를 유지하는 지속상태 (inertial phase)의 세 가지로 나누어진다. 지속상태 (inertial phase)에서는 중력류의 전방속도는 $u_F \propto t^{-1/3}$ 을 만족한다.^(6,7) 이러한 모델들은 중력류의 평균 속도의 특성을 구현하는 데에는 비교적 바람직한 것으로 알려져 있으나, 전방 속도와 중력류의 높이와의 수력학적 관계(hydrostatics), 즉 Fr 수 ($=u_F/\sqrt{gH(\rho_1-\rho_0)/2\rho_0}$)에 대해서는 보다 더 연구되어야 할 필요성이 있다.

형상적인 측면에서 중력류는 평면형(planar)과 실린더형(cylindrical) 형상에 대해서 다양하게 연구되어 왔다. 두 가지의 형상패턴에 대해서 공히 측면방향(span-wise) 방향으로 유동의 변화가 있으며, 2 차원 연구도 활발히 진행되고 있다.^(8,9) 그러나, 전방속도는 3 차원의 결과가 2 차원 결과보다 빠르게 진행된다.⁽⁸⁾

본 연구에서는 평면형 형상과 실린더 형상에 대해서 2 차원과 3 차원 해석을 각각 수행하였다. 본 연구의 목표는 두 가지의 형상에 대해서 중력류의 전방속도에 대해서 2 차원과 3 차원 결과를 비교하고 다른 상(phase)에서의 중력류의 난류 구조를 연구하였다. 또한 2 차원 전산해석의 3 차원 결과에의 적용 가능성에 대해서 논하였다.

2. 지배방정식

Fig. 1 에서 보는 바와 같이 Boussinesq 가정을 만족하는 밀도차가 있는 유동을 고려한다. 그렇기 때문에, 밀도의 변화는 부력 항만 관련 있게 된다. 초기에 고밀도의 유체가 중앙부의 $2x_0$ (Cylindrical release 의 경우 $2r_0$)의 영역에 위치하고 있다. $t \geq 0$ 일 때, 고밀도의 유체는 중력의 영향으로 수평방향으로 자유롭게 흐르기 시작한다. 무차원 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} = \tilde{\rho} e_i^s - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} (\tilde{\rho} \tilde{u}_k) = \frac{1}{Sc\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} \quad (3)$$

여기서, \tilde{u}_i 는 속도벡터, \tilde{p} 는 압력, Gr 는 Grashof 수 그리고 Sc 는 슈미트 수이다. 또한, e_i^s 는 중력방향의 단위벡터이다.

외부에서의 속도입력성분이 없기 때문에, 다음과 같은 속도 스케일을 정의한다.

$$U = \sqrt{g \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} H} \quad (4)$$

그리고, 시간스케일은 H/U 이다. 무차원 밀도와 압력은 다음과 같다.

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 U^2} \quad (5)$$

무차원 수, Gr 수와 Sc 수는 각각 다음과 같다.

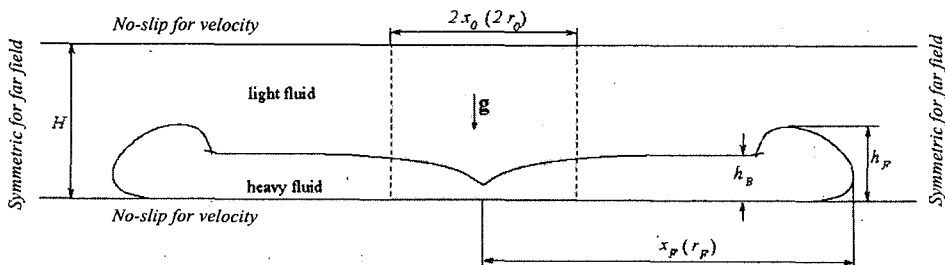


Fig. 1 Schematic of a gravity current and nomenclature used in this paper. Dashed line indicates initial condition

$$Gr = \left(\frac{UH}{\nu}\right)^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_0)H^3}{\rho_0 \nu^2}, \quad Sc = \frac{\nu}{\kappa} \quad (6)$$

시스템의 상, 하부의 경계조건은 속도성분에 대해서 No-slip 조건을 사용하였으며, 밀도장에 대해서는 zero normal-gradient 조건을 적용하였다. 유동의 진행방향 (x 혹은 r)으로는 symmetry 경계조건을 사용하였다.

3. 수치해석 방법

위의 지배방정식을 이산화하기 위해서 다영역 스펙트럴 방법(spectral multi-domain method)을 사용하였다.⁽¹⁰⁻¹²⁾ 3 차원 해석에 대해서는 $L_x \times L_y \times L_z$ 의 직육면 형상을, 그리고 2 차원 해석에 대해서는 $L_x \times L_z$ 의 직사각 형상을 사용하였다. 2 차원 실린더 형상에 대해서는 $L_x/2 \times L_z$ 를 적용하였다. Table 1 은 계산 형상의 물리적인 길이와 계산에 사용된 격자수를 나타낸 것이다. 멀티도메인 방법을 사용하여, 각각의 부 영역에서는 체비셰프 전개(Chebyshev expansion)를 사용하였으며, 이로 인하여 격자점은 비균일 Gauss-Lobatto 점들로 이루어지며, Fig. 2 에 나타내었다. 멀티도메인 방법은 Fig. 3 에서와 같이 여러 개의 작은 사각 영역으로 나누어서 각 하위 영역에서 체비셰프 전개를 수행하는 방법이다. 이렇게 공간을 이산화 함에 따라 내부 점들과 외부 경계점, 두 영역 사이의 내부 경계점, 그리고 네 개의 하위 영역이 만나는 꼭지점으로 구분이 되고 각 점들에 대해 이산화 방정식이 적용되어야 한다.

내부점은 지배 방정식을 이산화해 배치하여 사용하고, 외부 경계 점은 적절한 경계 조건을 적용한다. 그리고 내부 경계 점에서는 식 (7), (8)과 같이 함수 값과 두 영역 사이에서 도함수의 연속성이 요구된다.

Table 1 Physical size and grid resolution for each geometrical setting

Geometry (domain size)		Gr		
		10^5	1.5×10^6	10^7
Planar release	2-D (50×2)	768×80	924×110	1536×180
	3-D (50×3×2)	64×768×80	84×924×110	112×1536×180
Cylindrical release	2-D (15×2)	408×71	568×111	1572×201
	3-D (30×30×2)	280×280×72	512×512×110	880×880×180

Vertical interface: $\frac{\partial \hat{g}_k^1(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{g}_k^2(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (7)$

Horizontal interface: $\frac{\partial \hat{g}_k^1(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \hat{g}_k^2(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8)$

식 (7), (8)의 하첨자 1, 2 는 경계를 기준으로 각 두 영역에서의 값을 나타낸다. 그리고, 꼭지점에서 이와 같은 조건을 지정할 수 있으나 단지 한 방향에 대해서만 지정할 수 있다, 실제 강제되지 않은 방향으로 도함수의 불일치는 일반적으로 그

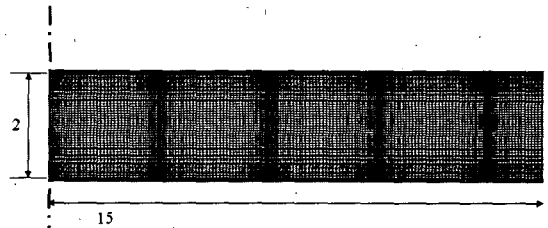


Fig. 2 Grid Distribution for Cylindrical release

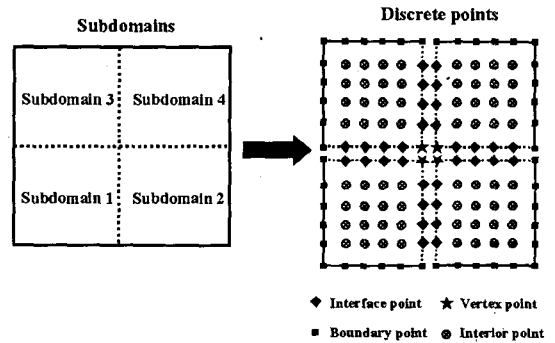


Fig. 3 A two-dimensional domain decomposition into four subdomains and multi-domain discretization

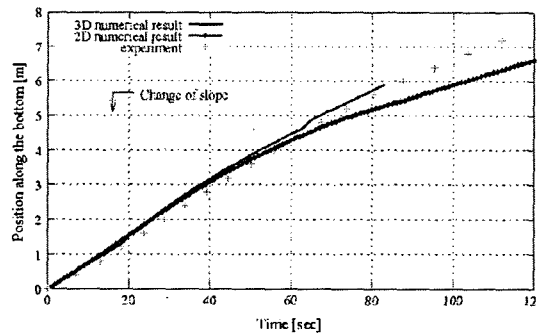


Fig. 4 Front location of a planar current in favorable slope computed at the central cross section of the channel with comparison of experiment⁽¹³⁾

값이 적고, 지수적으로 감소하게 된다. 더욱이 꼭지점의 해는 내부점이나 외부 경계 점에서 얻은 해와 분리되어 있기 때문에 불일치가 전체적인 해에 영향을 미치지 않는다.

시간에 대한 적분을 위하여 2 단계 시간 분할 방법 (two-step time-splitting method)를 사용하였다. 첫 번째 시간 적분 단계인 'n' 시간에서 중간 시간 '*' 단계에서는 대류-확산 방정식 (advection-diffusion equation)에 대한 해를 구한다. 이때 비선형 항인 대류항의 적분을 위하여 3 차의 양해법인 Adams-Bashforth 기법을 사용하였다. 확산 항에 대한 적분을 위하여 음해법인 Crank-Nicolson 기법을 적용하였다. 이렇게 구한 속도장을 사용하여, 압력에 대한 포아송 (Poisson) 방정식에 대한 해를 음

해법을 사용하여 구하였다, 압력-수정 단계인 'n+1' 단계에서 최종의 divergence-free 조건을 만족하는 속도를 구한다.

본 연구에서는 세가지 Gr 수에 대해서 해석을 하였으며, Gr 수가 증가함에 따라서 유동이 보다 복잡해지기 때문에, 격자 또한 증가시켰다. 타임스텝은 큐런트 수(Courant Number)가 0.5 보다 작은 스케일로 유지하도록 하였다.

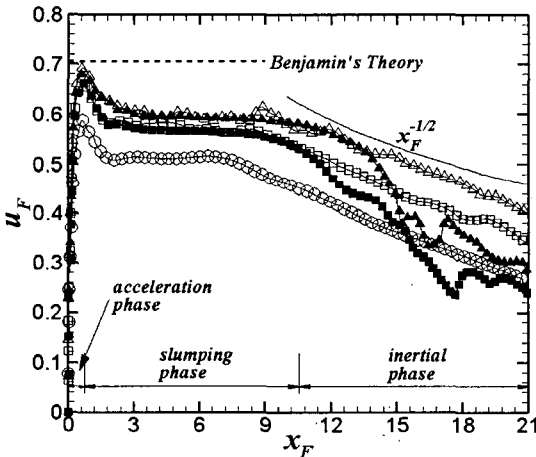
코드의 검증을 위해서 Planar release 의 문제에 대해 전산해석을 수행하여 비교하였다. Fig. 4 는 중력류의 전방위치 (Front location)를 시간의 함수로 표현한 것이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이, 2 차원 전산해석보다 3 차원 전산해석이 실험 결과와 보다 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

4. 결과 및 해석

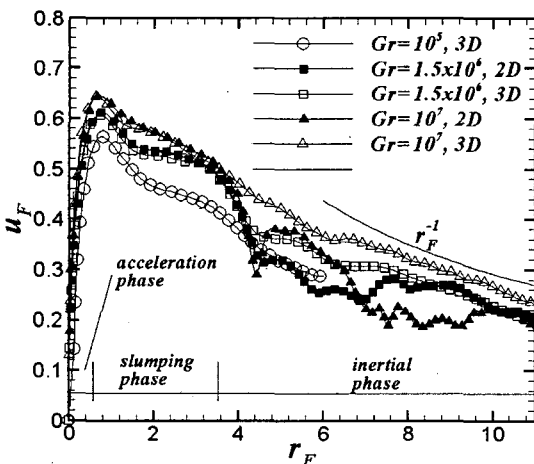
4.1 평균전방속도 (Mean front velocity)

Fig. 5(a)는 평면형 중력류의 전방속도(front velocity)를 전방위치(front location)의 함수로 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 3 가지의 상태가 관찰된다. 처음에 유동이 시작되면서 가속되는 초기가속상태(acceleration)가 나타난다. 이 때, 중력류의 전방 속도는 최대값을 나타내는데 이는 이론적인 계산값과 거의 같다.⁽⁴⁾ 하지만, 유동으로 가해지는 외력이 없기 때문에 이론적인 값보다 결코 크지는 않다. 초기 가속 이후, 중력류의 전단부가 형성되고, Kelvin-Helmholtz 와 구조(vortex structure)가 생성된다. (Fig. 6 참조) 이때, 중력류는 일정한 기울기를 가지며 감소한다. 이를 슬럼프핑 상태(slumping phase)라고 한다. 중력류가 더 진행되면, 전방속도가 단조 감소하는 영역이 나타난다. 이를 inertial phase 라고 하며, 실험에서도 관찰된다.⁽⁵⁾ 또한 $u_f \propto x_f^{-1/2}$ 인 Box model 를 만족한다.⁽¹⁴⁾ 3 차원 결과는 Box model 을 비교적 잘 만족하는 반면, 2 차원 결과는 그렇지 못하다.

Fig. 5(b)는 실린더 형상에 대한 전방속도의 함수이다. 정성적으로는 평판형 형상과 비슷하게 3 가지의 상태를 나타내어주고 있다. 그러나, 크게 다른 점은, 평판형 형상에 비해서 슬럼프핑 상태에서의 유동의 속도가 느린 점과 그 상태의 지속시간이 짧다는 것이다. 이 상태의 지속시간이 짧은 것은 고밀도의 유체의 체적, 물리적 형상 그리고 중력류의 전파율과 관계가 있다. 실린더 형상은 중력류가 방사형으로 전파되기 때문에 고밀도 유체가 보다 빨리 희석된다. 그렇기 때문에, 슬럼프핑 상



(a) Planar release



(b) Cylindrical release

Fig. 5 Front velocity vs. front location. a): planar configuration and b): cylindrical configuration

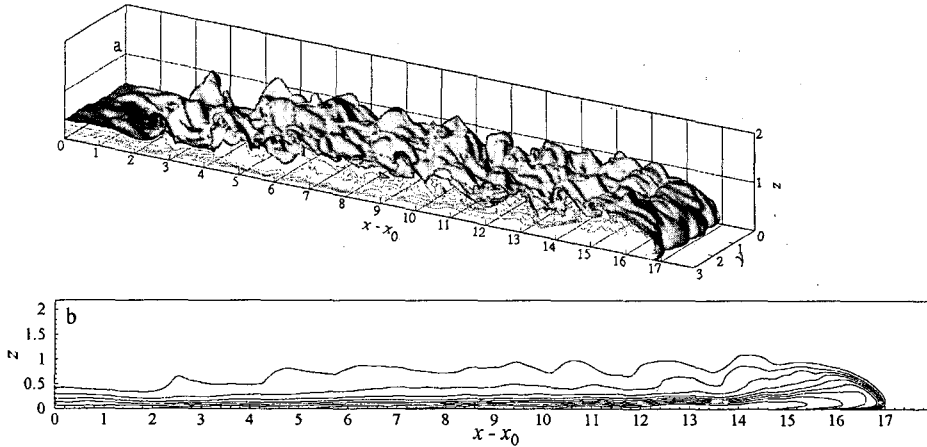


Fig. 6 Flow structure of the planar current for $Gr = 10^7$ at $t = 30$. a: iso-surface of $\bar{p} = 0.05$ and b: contours of span-wise averaged \bar{p}

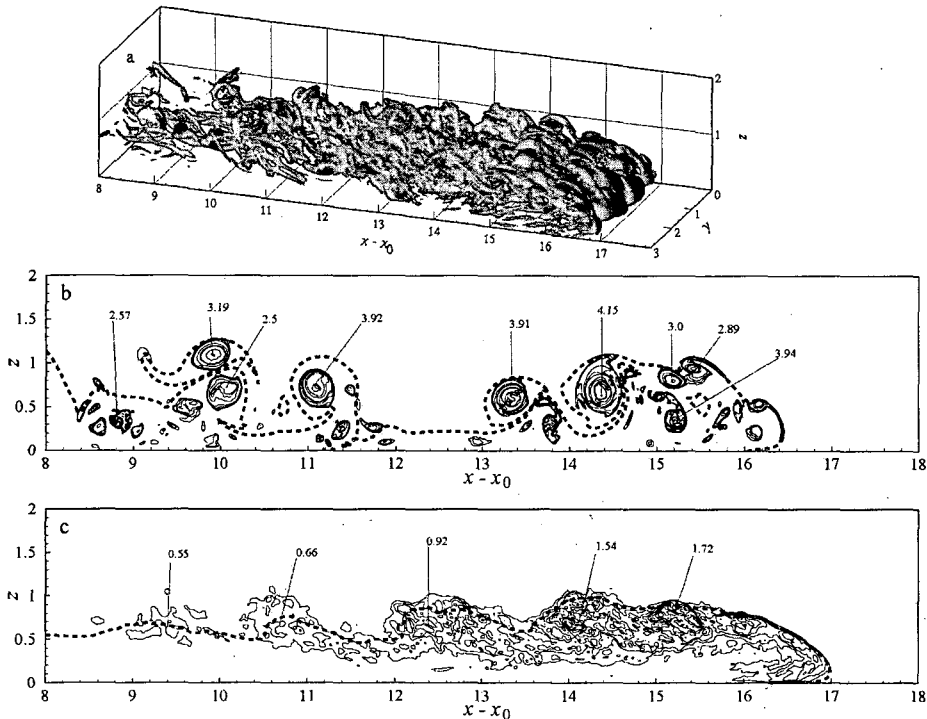


Fig. 7 Contours of λ_{ci} for planar current for $Gr = 10^7$ at $t = 30$. Dashed line shows the current location. b: 2-D and c: 3-D

태의 지속시간이 짧아진다. Inertial 상태에서의 관계식은 Box model 을 만족한다. ($u_f \propto r_f^{-1}$) 평면형 형상에 서와 마찬가지로 3 차원 해석이 보다 더 잘 만족한다. 3 차원 결과와 2 차원 해석 결과와의 큰 차이점은 inertial 상태이다. 큰 Gr 수에서는 3 차원 중력류가 2 차원 중력류보다 전방속도가 전반적으로

크게 나타난다. 또한, 3 차원 중력류는 전방속도가 단조적으로 감소되는데 비해서, 2 차원 결과는 국소적으로 가속 혹은 감소되는 구간이 존재한다. 이는 와(vortex)의 상호작용에 의한 것이며, 와 구조(vortex structure)에 대해서는 다음 장에서 보다 상세히 설명할 것이다.

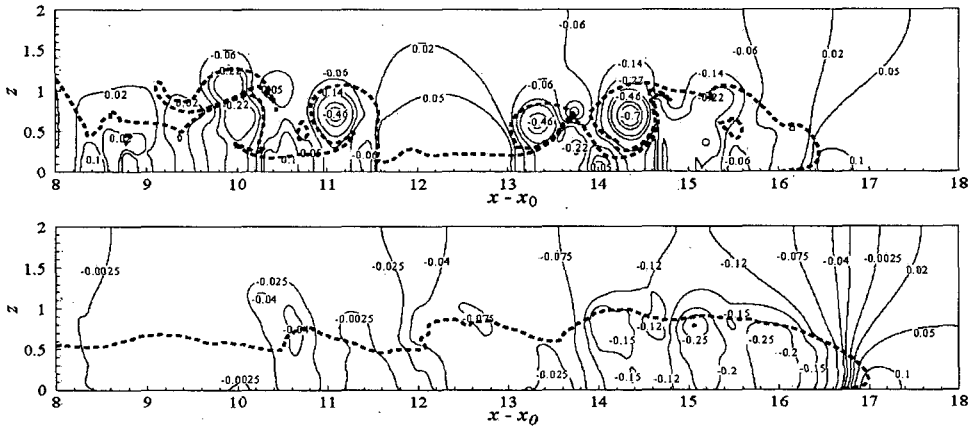


Fig. 8 Contours of mean dynamic pressure for planar current for $Gr = 10^7$ at $t = 30$. Dashed line shows the current location. Top: 2-D. Bottom: 3-D

4.2 3 차원 효과 (Three-dimensional effects)

Fig. 6 은 $t = 30$ 일 때, Gr 수가 10^7 일 경우의 평면형 중력류의 유동구조를 나타낸 것이다. 이때가 inertial 상태의 전형적인 모습이다. Fig. 6(a) 는 $\bar{p} = 0.05$ 의 iso-surface 이며, Fig. 6(b)는 폭방향 (span-wise)으로 평균한 그림이다. 이 그림에서 잘 알 수 있듯이, 전방영역 이후로는 와류진동(vortex shedding), Kelvin-Helmholtz 와 구조 등이 나타난다. 또한, 작은 스케일의 와 구조가 중력류의 후방으로 소산되어 간다. 이는 Fig. 7 에 잘 나타난다. 실린더 형상에 대한 중력류도 비슷한 메커니즘을 보여준다. 복잡한 형태의 와 구조가 존재한다는 것은 중력류에서 6 차원 영향이 중요하다는 것을 의미한다. Fig. 7 은 Fig. 6 의 조건에서의 선회강도 [swirl strength, λ_{ci}]를 표현한 것이다. 선회강도는 와(vortices)의 존재를 표현하는 유용한 방법 중 하나로서, 국소 속도구배 텐서(local velocity gradient tensor)의 고유치(complex eigenvalue) 중에서 허수부(imaginary portion)로 정의한다.

$$\lambda_{ci} = f(\text{Im}(\nabla \mathbf{u})) \tag{9}$$

선회강도는 와의 코어부분(vortex core region)은 강조되어 표현이 되고, 전단층(shear layer)은 비교적 덜 강조되어 나타난다.

Fig. 7 의 (a)와 (b)에서 확연히 알 수 있듯이, 2 차원과 3 차원 해석의 결과는 매우 다른 형태를 보인다. 2 차원의 λ_{ci} 의 최대값이 3 차원의 값보다 크게 나타난다. 즉, 2 차원 결과에서는 강도가 큰 와 구조가 존재한다는 것을 알 수 있다. 이러한 큰 강도의 와 등의 상호작용에 의해서 중력류가

가속 혹은 감속되는 것이다.

Fig. 8 은 Fig. 6 과 같은 조건($Gr = 10^7$ at $t = 30$)에서의 평균 동압(dynamic pressure) 분포를 나타낸 것이다. 동압, \bar{p}_d 는 다음과 같이 계산하였다.

$$\bar{p}_d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - \int_{\bar{z}}^2 \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{z} \tag{10}$$

그림에서 알 수 있는 것처럼 3 차원 결과의 값 ($\bar{p}_d = -0.25$)에 비해서 2 차원 결과는 평균한 값 ($\bar{p}_d = -0.7$)이 낮은 코어 영역이 존재한다. 이것은 Fig. 7 에 나타난 것과 같이 큰 강도의 와 구조의 코어 영역이다. 2 차원 동압 분포는 위치에 따른 값의 구배가 크다. 즉, 3 차원 결과에서 평균 동압 분포가 보다 크며, 균일하게 분포하고 있기 때문에, 전방부 이후로의 저항력(net drag)이 작다. 그러므로, Fig. 5 처럼 inertial 상태에서는 3 차원 중력류의 전방속도가 2 차원 결과보다 빠르다고 할 수 있다.

4.3 시간에 따른 변화 (Time variation)

Fig. 5 에서 보는 바와 같이 2 차원 중력류는 inertial 상태에서 속도 증감의 변위가 크다. 시간에 따른 변화(time variation)는 와 구조의 강한 상호작용 (pairing) 과 깊은 관련이 있다. 폭방향 (span-wise)의 변위가 없기 때문에 와 구조의 소산 메커니즘 (stretching, break-up and dissipation)이 잘 나타나지 않는다. 그러므로, 2 차원 중력류의 와 구조는 3 차원 중력류일 때 보다 오랜 시간동안 와 구조의 코어를 유지하게 되고, 또한 인근의 와 구조들과의 상호작용을 하게 된다. Fig. 9 는

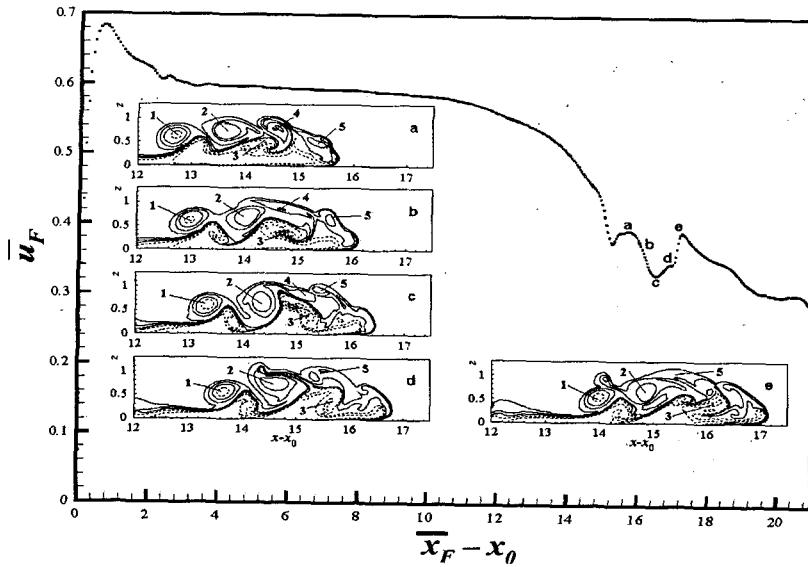


Fig. 9 Vortex interaction in a 2-D planar current for $Gr = 10^7$. The main figure shows the mean front velocity as a function of the front traveled distance. The sub-figures show the front of the current visualized by density contours. A sequence of vortex pairing is shown with a interval time step of 1 time unit and related to the mean front velocity through letters a, b, c, d and e

$Gr = 10^7$ 에서의 2 차원 중력류의 전방속도와 주요 위치에서의 와 구조를 나타낸 것이다. Fig. 9(a)-(e) 까지의 와 구조는 각각 1 의 시간 간격을 가진다. 그림에서 실선은 $\bar{\rho} < 0.3$ 이고, 점선은 $\bar{\rho} > 0.3$ 이다. a-e 의 시퀀스는 와 구조가 서로 어떻게 상호작용 하는지를 잘 보여준다. 와동 1, 2, 4 그리고 5 는 반 시계 방향으로 회전하며, 3 은 시계방향으로 회전 한다. 먼저 와동 3 과 4 가 상호작용을 하여 와동 4 가 확장되고, 와동 3 이 성장하기 위한 공간이 만들어진다.[Fig. 9(b)] 와동 3 이 성장하여 와동 2 와 상호작용을 시작한다. 그래서, 와동 2 가 와동 3 을 전방으로 밀어주는 펌프 역할을 한다. 그 결과로 와동 3 은 포텐셜 에너지가 증가되고[Fig. 9(c)], 전방 속도를 가속시키게 된다.[Fig. 9(d)]

5. 결론

본 연구에서는 평판형과 실린더 형의 두가지 형 상에서 2 차원과 3 차원의 중력류를 각기 다른 Gr 수(10^5 , 1.5×10^6 그리고 10^7)에 대해서 직접 수치 해석을 수행하였다. 본 연구의 주요 목적은 중력류의 각기 다른 상태(slumping and inertial phase)에 대해서 전방 속도를 연구하는 것과 2 차원 중력류 계산의 적용가능성에 대해서 고찰하는 것이었다.

수치 해석은 고효율의 스펙트럴 멀티도메인 방법을 사용하여 수행하였다.

높은 Gr 수의 중력류에서 나타나는 유동은 Kelvin-Helmholtz 와 구조(vortex structure) 등을 잘 구현하며, 실험과도 잘 일치한다. 2 차원 중력류 해석은 슬럼핑 영역까지는 3 차원 결과값과 전반적으로 잘 일치한다. 그러나, inertial 영역에서는 차이가 나타난다. Inertial 영역에서는 2 차원 중력류는 강한 와 구조간의 상호작용으로 인해서 낮은 압력값을 가지는 와 구조의 코어가 형성되고, 이것이 높은 저항력(net drag)을 만든다. 그러므로, 2 차원 중력류의 전방속도가 3 차원의 값보다 작게 나타난다.

후 기

본 연구는 학술진흥재단 해외공동연구 지원사업에 의해 수행되었다.

참고문헌

- (1) Simpson, J., 1999, *Gravity Currents*. Cambridge University Press, second edition.
- (2) Allen, J., 1985, *Principles of Physical Sedimentology*, George Allen and Unwin Ltd.

- (3) Von Karman, T., 1940, "The Engineer Grapples with Nonlinear Problems," *Bull. Am. Math. Soc.*
- (4) Benjamin, T., 1968, "Gravity Currents and Related Phenomena," *J. Fluid Mech.*, Vol. 31, pp. 209~248.
- (5) Martin, J. and Moyce, W., 1952, "Part V. An Experimental Study of the Collapse of Fluid Columns on a Rigid Horizontal Bottom, in a Medium of Lower, but Comparable, Density," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol. 244(882), pp. 325~334.
- (6) Fannelop, T. and Waldman, G., 1971, "The Dynamics of Oil Slicks-or Creeping Crude," *AIAA J.* Vol. 41, pp. 1~10.
- (7) Hoult, D., 1972, "Oil Spreading in the Sea," *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, Vol. 4, pp. 341~368.
- (8) Cantero, M., 2002, "Theoretical and Numerical Modeling of Turbidity Currents as Two-Phase Flow," M.S. Thesis, University of Illinois, Urbana, IL.
- (9) Choi, S.U. and Garcia, M., 2002, "k- ϵ Turbulence Modeling of Density Currents Developing Two Dimensionally on a Slope," *J. Hydr. Eng.*, Vol. 128(1), pp. 55~63.
- (10) Street, C.L. and Macaraeg, M.G., 1989, "Spectral Multi-domain for Large-scale Fluid Dynamic Simulations," *App. Numer. Math.s*, Vol. 6, pp. 123~139.
- (11) Parker, S.J., 2002, "Stability and Vortex Shedding of Bluff Body Arrays," PhD Thesis, University of Illinois, Urbana, IL.
- (12) Lee, J.R., Ha, M.Y., Balachandar, S., Yoon, H.S. and Lee, S.S., 2004, "Natural Convection in a Horizontal Layer of Fluid with a Periodic Array of Square Cylinders in the Interior," *Phy. Fluid.*, Vol. 16, pp. 1273~1286.
- (13) Cantero, M., 2002, "Theoretical and Numerical Modeling of Turbidity Currents as Two-phase Flows," M.S. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA.
- (14) Cantero, M., Balachandar, S., Garcia, M. and Ferry, J., 2005, "Direct Numerical Simulations of Planar and Cylindrical Density Currents," *J. App. Mech.*, under review.
- (15) Chakraborty, P., Balachandar, S. and Adrian, R., 2005, "On the Relationships Between Local Vortex Identification Schemes," *J. Fluid. Mech.* Vol. 535, pp. 189~214.