Journal of the Korean
Data & Information Science Society
2006, Vol. 17, No. 2, pp. 291 ~ 300

A Comparative Study for Several Bayesian Estimators Under Balanced Loss Function[1)]

Yeong-Hwa Kim[2)]

Abstract

In this research, the performance of widely used Bayesian estimators such as Bayes estimator, empirical Bayes estimator, constrained Bayes estimator and constrained empirical Bayes estimator are compared by means of a measurement under balanced loss function for the typical normal-normal situation. The proposed measurement is a weighted sum of the precisions of first and second moments. As a result, one can gets the criterion according to the size of prior variance against the population variance.

Keywords : Balanced loss function, Bayes estimator, Constrained Bayes estimator, Constrained empirical Bayes estimator, Empirical Bayes estimator, Mean squared error

1. 서 론

다양한 분야에서 널리 사용되고 있는 베이지안(Bayesian) 추론에서 주로 사용되는 추정량으로는 Bayes 추정량(Bayes estimator), EB 추정량(empirical Bayes estimator), CB 추정량(constrained Bayes estimator), CEB 추정량(constrained empirical Bayes estimator) 등이 있다. Bayes 추정량은 주로 제곱손실함수 (squared error loss function) 에 근거하여 구해지며, EB 추정량은 초모수(hyperparameter)의 추정량을 사후분포의 평균(posterior mean)에 대입하여 구해지는 것이 일반적이다. 또한 Louis(1984)에 의하여 제안된 CB 추정량은 임의의 손실함수하에서 추정치의 히스토그램이 모수의 히스토그램에 가까워지게 함으로써 Bayes 추정량이 축소추정량(shrinkage estimator)인 단점을 보완한 것이며, CEB 추정량은 CB 추정량의 초모수에 추정량을 대입하여 얻어지는 추정량이다. 이러한 추정량들은 고유의 특성 및 장단점

---

1) This research was supported by the Chung-Ang University research grants in 2005.
2) Assistant Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea.
E-mail : gogators@cau.ac.kr

을 지니고 있어 모든 경우에 있어 어느 것이 가장 좋다고 할 수는 없다.

Kim(2005)은 관심의 대상이 되는 모집단이 정규모집단이고 관심이 있는 모수의 사전분포가 정규분포인 Normal-Normal 상황을 가정하고, 제곱오차 손실함수(squared error loss function)하에서의 여러 가지 베이지안 추정량 및 MSE(mean squared error)를 사용하여 연구자가 분포의 중심과 산포를 중요시하는 정도에 따라 적절한 베이지안 추정량을 선택하여 사용할 수 있는 기준이 될 수 있는 척도를 1차 적률과 2차 적률의 가중합의 형태로서 제시하였다. 본 연구에서는 Normal-Normal 상황일 때, 균형손실함수(bqalanced loss function)하에서 Kim(2005)이 제안한 척도를 사용하여 연구자의 관점에 따라 어떤 추정량을 사용하는 것이 합리적인지를 비교하여 보고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 모집단의 분포와 사전분포가 모두 정규분포인 경우, 즉 Normal-Normal 인 경우에 대하여 균형손실함수하에서 Bayes 추정량, CB 추정량, EB 추정량, CEB 추정량 등을 제시하고 각 추정량들의 MSE(mean squared error) 또는 근사적 MSE(asymptotic mean squared error)를 제시하였다. 또한 1차 적률과 2차 적률을 이용하여 연구자의 의도와 상황에 따라 가장 합리적인 베이지안 추정량을 선택하여 사용할 수 있도록 가중치를 달리 하여 정도(precision)를 비교할 수 있는 새로운 척도를 제시하였다. 3장은 본 연구에서 제시된 척도를 통하여 Bayes 추정량과 CB 추정량, 그리고 EB 추정량과 CEB 추정량을 비교하는 모의실험 부분이며 비교방법으로는 전체 반복에서 각각의 추정량으로부터 얻어지는 척도의 평균값을 사용하였다. 4장에서는 본 연구의 결과로부터 도출된 결론을 요약하였다.

2. 균형손실함수(Balanced Loss Function)하에서의 추정

본 연구에서 고려하는 모형은 다음과 같다.

$$X_i|\,\theta_i \sim indep.\,N(\theta_i, 1)$$
$$\theta_i \sim i.i.d\ N(\mu, A),\ A > 0\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

여기서 μ 와 A 는 모두 알려져 있지 않다고 가정한다. 이때 $X_i \sim i.i.d.\,N(\mu, (1+A))$, 즉 $\boldsymbol{X} \sim N(\mu \mathbf{1}_m, (1+A)\boldsymbol{I}_m)$이며, 여기서 $\mathbf{1}_m$ 은 모든 원소가 1 인 $m \times 1$ 벡터이다.

Zellner(1988, 1992)에 의해 제안된 균형손실함수(Balanced Loss Function)는 추정의 적합도(the goodness of fit)와 정도(the precision)에 대하여 연구자가 상대적으로 중요하게 여기는 중요도를 가중치로 하는 손실함수이다.

확률변수벡터 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_m)^T$ 의 평균벡터가 $E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^T$ 일 때, 임의의 추정량 벡터 $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_m)^T$ 에 대한 균형손실함수는 다음과 같이 정의된다.

$$L(\theta, e)=\frac{1}{m}[p\|X-e\|^2+(1-p)\|e-\theta\|^2] \tag{2.1}$$

여기서 $p(0\le p\le 1)$는 가중치로서, p 값이 작을수록 추정량의 적합도보다 정도(precision)를 중요하게 여기는 것이며, 반대로 p 값이 커질수록 추정량의 정도보다 적합도를 중요하게 여기는 의미를 갖는다. 예를 들어, $p=0$ 이면 균형손실함수는 제곱오차 손실함수(Squared Error Loss Function)와 동일하게 된다. 또한 본 연구에서는 추정의 정도와 적합도에 대한 선호도가 동일한 경우인 $p=1/2$를 고려하여 이때의 균형손실함수

$$L(\theta, e)=\frac{1}{2m}[\|X-e\|^2+\|e-\theta\|^2] \tag{2.2}$$

를 사용하여 서로 다른 베이지안 추정량과 각각의 MSE 또는 근사적 MSE 를 제시한다.

2.1 Bayes 추정량(Bayes Estimator)

(2.2)와 같은 균형손실함수(Balanced loss function)하에서 Bayes 추정량 $\hat{\theta}^B$ 와 MSE 를 유도하기 위해서는 잘 알려져 있는 것처럼 제곱오차 손실함수하에서의 Bayes 추정량이 사후평균(posterior mean) $e^{PM}=(1-B)X+B\mu 1_m$, $B=(1+A)^{-1}$ 인 것을 사용하는 것이 유용하다.

$X=x$ 일 때 (2.1)하에서 Zellner(1988)는 Bayes 추정량이 다음과 같음을 증명하였다.

$$\widehat{\theta^B}=px+(1-p)e^{PM}=pX+(1-p)[(1-B)X+B\mu 1_m] \tag{2.3}$$

따라서 본 연구에서 고려하는 균형손실함수인 (2.2) 하에서 Bayes 추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\theta^B}=\frac{1}{2}\{x+e^{PM}\}$$

또한 (2.1)하에서 MSE는 다음과 같으므로

$$\begin{aligned}MSE(\widehat{\theta^B}) &= \frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^B}-\theta\|^2=\frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^B}-e^{PM}+e^{PM}-\theta\|^2\\ &= \frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^B}-e^{PM}\|^2+\frac{1}{m}E\|e^{PM}-\theta\|^2\\ &= \frac{p^2B^2}{m}E\|X-\mu 1_m\|^2+(1-B)=\frac{p^2B^2}{m}\frac{m}{B}+(1-B)=1-B+p^2B\end{aligned}$$

본 연구에서 고려하는 균형손실함수 (2.2)하에서의 MSE는 다음과 같다.

$$MSE(\widehat{\theta^{B}})=1-\frac{3}{4}B$$

2.2 EB 추정량(Empirical Bayes Estimator)

$\overline{X}=m^{-1}\sum_{i=1}^{m}X_i$, $S=\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2/(m-1)$ 라 하면, 균형손실함수하에서 θ의 EB 추정량은 Morris(1981)의 결과를 이용하여 Bayes 추정량 (2.3)에 μ와 B의 추정량 $\widehat{\mu}=\overline{X}$과 $\widehat{B}=\min\left(\frac{m-3}{(m-1)},\frac{m-3}{(m-1)S}\right)$ 를 대입하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\widehat{\theta^{EB}}=p\,X+(1-p)\left[(1-\widehat{B})X+\widehat{B}\widehat{\mu}1_m\right]=\left[1-(1-p)\widehat{B}\right]X+(1-p)\widehat{B}\,\overline{X}1_m$$

따라서 본 연구에서 고려하는 균형손실함수 (2.2)하에서의 EB 추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\theta^{EB}}=\left[1-\frac{1}{2}\widehat{B}\right]X+\frac{1}{2}\widehat{B}\,\overline{X}1_m\ ,\quad \widehat{B}=\min\left(\frac{m-3}{(m-1)},\frac{m-3}{(m-1)S}\right)$$

또한 (2.1)하에서 MSE는 다음과 같으며

$$\begin{aligned}MSE(\widehat{\theta^{EB}})&=\frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^{EB}}-\theta\|^2=\frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^{EB}}-e^{PM}+e^{PM}-\theta\|^2\\&=\frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^{EB}}-e^{PM}\|^2+\frac{1}{m}E\|e^{PM}-\theta\|^2\\&=\frac{1}{m}E\|\widehat{\theta^{EB}}-e^{PM}\|^2+1-B\end{aligned}$$

Kim(2004) 은 $E\|\widehat{\theta^{EB}}-e^{PM}\|^2$ 를 $o(m^{-1})$ 까지 근사적으로 전개하여

$$E\|\widehat{\theta^{EB}}-e^{PM}\|^2=B+[2+(m-3)p^2]B+o(m^{-1})$$

를 보였고, 따라서 본 연구에서 고려하는 균형손실함수 (2.2)하에서의 근사적 MSE는 다음과 같다.

$$MSE(\widehat{\theta^{EB}})\approx 1-\frac{3}{4}B+\frac{9B}{4m}$$

2.3 CB 추정량(Constrained Bayes Estimator)

Louis(1984)가 제안한 제한적인(constrained) Bayes 추정법은 제곱오차 손실함수하

에서 최적의 추정량으로 알려져 있던 Bayes 추정량과 EB 추정량이 사후분포를 지나치게 축소(shrink)하는 단점을 해결하기 위한 것이다. Louis(1984)는 이러한 제한적인 Bayes 추정법을 정규분포의 가정하에서 제안한 반면 Ghosh(1992)는 임의의 분포에 대하여 Louis의 제안을 일반화하였으며 이를 통해 얻어지는 추정량을 CB(Constrained Bayes) 추정량이라 하였다. 즉, CB 추정량은 추정량의 적합도(the goodness of fit)와 추정의 정도(the precision of estimation)를 동시에 만족시키고자 하는 취지에서 제안된 추정량이다.

본 연구의 가정에서 $B=(1+A)^{-1}$, $\overline{X}=m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$, $S=\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2/(m-1)$ 라 정의하면 $\boldsymbol{\theta}$의 CB 추정량 $\widehat{\boldsymbol{\theta}^{B}}$는 다음과 같다.

$$\widehat{\theta^{CB}} = a_B(1-B)(\boldsymbol{X}-\overline{X}\mathbf{1}_m)+[(1-B)\overline{X}+B\mu]\mathbf{1}_m$$

여기서 $a_B=[1+(1-B)^{-1}S^{-1}]^{1/2}$ 이다. Kim(2004)의 결과를 이용하면 MSE 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} MSE(\widehat{\theta^{CB}}) &= m^{-1}E\,||\,\widehat{\theta^{CB}}-\theta\,||^2 \\ &= 1-B+(1-B)^2m^{-1}(m-1)\,E[\{a(\boldsymbol{X})-1\}^2S] \end{aligned}$$

또한 , Kim(2004) 은 다음을 보였고

$$\begin{aligned} &E[a_B^2S]=B^{-1}(1-B)^{-1} \quad , \quad E[S]=B^{-1} \\ &E[a_BS]=(1-B)^{-1/2}\left[B^{-1}-\frac{B}{4m}+O(m^{-3/2})\right] \end{aligned}$$

이를 이용하여 MSE를 다음과 같이 근사적으로 제시하였다.

$$\begin{aligned} MSE(\widehat{\theta^{CB}}) \approx 1-B+(1-B)^2\frac{m-1}{m} \\ \times\left[\frac{1}{B(1-B)}-2(1-B)^{-1/2}\left(B^{-1}-\frac{B}{4m}\right)+B^{-1}\right] \end{aligned}$$

2.4 CEB 추정량(Constrained Empirical Bayes Estimator)

CEB(Constrained Empirical Bayes) 추정량은 CB 추정량에서 μ 에 $\overline{X}$ 를 대입하고 B 에 $\hat{B}$ 를 대입하여 얻어진다. 즉, $\hat{B}=min\left(\frac{m-3}{m-1},\frac{m-3}{(m-1)S}\right)$, $a_{EB}=(1+(1-\hat{B})^{-1}S^{-1})^{1/2}$ 라 하면, θ 의 CEB 추정량 $\theta^{\widehat{CEB}}$ 는 다음과 같다.

$$\theta^{\widehat{CEB}} = a_{EB}[(1-\hat{B})\boldsymbol{X} + \hat{B}\overline{X}\mathbf{1}_m] + (1-a_{EB})\overline{X}\mathbf{1}_m$$

여기서 $\overline{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$, $S = \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2/(m-1)$ 이다. 또한 MSE 는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} MSE(\theta^{\widehat{CEB}}) &= m^{-1}E||\theta^{\widehat{CEB}} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}E||\theta^{\widehat{CEB}} - \boldsymbol{e}^{PM} + \boldsymbol{e}^{PM} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}E||\theta^{\widehat{CEB}} - \boldsymbol{e}^{PM}||^2 + E||\boldsymbol{e}^{PM} - \theta||^2 \end{aligned}$$

위 식에서 Kim(2004)은 $m^{-1}E||\theta^{\widehat{CEB}} - \boldsymbol{e}^{PM}||^2$ 이 다음과 같이 근사되는 것을 증명하였다.

$$\begin{aligned} m^{-1}E||\theta^{\widehat{CEB}} - \boldsymbol{e}^{PM}||^2 = \frac{B}{m} &+ \frac{m-1}{m}\frac{1-B}{B}\{1-(1-B)^{1/2}\}^2 \\ &+ \frac{1}{2m}\frac{B}{\sqrt{1-B}} + o(m^{-1}) \end{aligned}$$

따라서 $MSE(\theta^{\widehat{CEB}})$는 근사적으로 다음과 같게 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} MSE(\theta^{\widehat{CEB}}) \approx\ & 1 - B + \frac{1-B}{B}\{1-(1-B)^{1/2}\}^2 \\ &+ \frac{1}{m}\left[B - \frac{1-B}{B}\{1-(1-B)^{1/2}\}^2 + \frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{1-B}}\right] \end{aligned}$$

2.5 베이지안 추정량들의 비교

본 연구에서는 연구목적과 연구자의 주관에 따라 추정량의 1차 적률과 2차 적률을 동시에 고려하여 가장 적합한 베이지안 통계량을 선택하여 사용할 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 새로운 척도를 제시하고자 한다..

$$T = w\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\hat{\theta}_i - \theta_i\right|\right\} + (1-w)\left\{\left|\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{\theta}_i - \bar{\hat{\theta}})^2} - \sqrt{MSE(\hat{\theta})}\right|\right\}$$

여기서 $\bar{\hat{\theta}} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\theta}_i$ 이고 적합도와 추정의 정도에 대한 가중치를 나타내는 w 는 0과 1 사이의 값을 갖는다. 즉, $0 \le w \le 1$ 이며 w 값이 1에 가까우면 1차 적률을

더 중요하게 여기는 것이고 $w=0.5$ 이면 1차 적률과 2차 적률에 동일한 가중치를 주는 것이며 w값이 0에 가까우면 2차 적률을 더 중요하게 여기는 것을 의미한다.

3. 모의실험

본 연구의 모의실험 절차는 다음과 같다.

1. $\mu=0.0$ 으로 고정하고 $m=10,20,50$ 에 대하여 $A=0.5,1,2$, 를 사용한다.
2. Normal-Normal 가정하에서 본 연구에서 비교하고자 하는 서로 다른 네 가지 베이지안 추정량에 대하여 앞에서 정의된 척도 T를 얻는다.
3. 단계 1, 2를 10,000 번 반복하여 각 추정량에 대한 T값의 평균을 구한다.

모의실험은 SAS/IML 로 수행하였으며 그 결과는 다음과 같다.

<표 1>은 $A=0.5$ 일 때 $m=10,20,50$ 인 경우에 대하여 각 베이지안 통계량으로부터 10,000 번의 반복을 통해 얻어지는 T값들의 평균값이다. <표 1>의 결과로부터 $A=0.5$ 인 경우에는 m 값과 가중치 w값에 관계없이 Bayes 추정량보다 CB추정량이 더 좋은 것을 알 수 있다. 또한, $0\le w\le 0.5$ 이면 m 값에 관계없이 EB추정량이 CEB추정량보다 좋은 결과를 보이며 그렇지 않은 경우에는 CEB추정량이 EB추정량보다 나은 것을 알 수 있다.

<표 1> $A=0.5$ 일 때 T값의 평균

m	w	Bayes	CB	EB	CEB
10	0.1	0.1873	*0.1002*	*0.2944*	0.4363
	0.2	0.2289	*0.1470*	*0.3304*	0.4469
	0.5	0.3587	*0.2862*	*0.4549*	0.4701
	0.8	0.4815	*0.4260*	0.5632	*0.4985*
	0.9	0.5224	*0.4705*	0.6026	*0.5030*
20	0.1	0.1643	*0.0828*	*0.2467*	0.4642
	0.2	0.2079	*0.1310*	*0.2854*	0.4689
	0.5	0.3417	*0.2756*	*0.4044*	0.4828
	0.8	0.4759	*0.4217*	0.5238	*0.4976*
	0.9	0.5195	*0.4700*	0.5622	*0.5018*
50	0.1	0.1512	*0.0698*	*0.1967*	0.4737
	0.2	0.1986	*0.1193*	*0.2412*	0.4743
	0.5	0.3349	*0.2689*	*0.3670*	0.4816
	0.8	0.4715	*0.4181*	0.4929	*0.4887*
	0.9	0.5189	*0.4690*	0.5370	*0.4902*

<표 2>는 $A=1$ 일 때 $m=10,20,50$ 인 경우에 대하여 각 베이지안 통계량으로부터 10,000 번의 반복을 통해 얻어지는 T 값들의 평균값이다. 모의실험의 결과를 보면 $A=1$ 인 경우에는 m 값과 가중치 w 값에 관계없이 Bayes 추정량보다 CB추정량이 더 좋은 것을 알 수 있다. 또한 $m=10,20$ 인 경우에는 w 값에 관계없이 EB 추정량보다 CEB추정량이 항상 좋은 것을 알 수 있으며 $m=50$ 일 때는 $w \geq 0.5$ 인 경우에만 EB 추정량보다 CEB추정량이 나은 것을 알 수 있다.

<표 2> $A=1.0$ 일 때 T 값의 평균

m	w	Bayes	CB	EB	CEB
10	0.1	0.2805	*0.2015*	0.3824	*0.3128*
	0.2	0.3184	*0.2463*	0.4141	*0.3443*
	0.5	0.4343	*0.3823*	0.5117	*0.4375*
	0.8	0.5524	*0.5203*	0.6137	*0.5286*
	0.9	0.5902	*0.5657*	0.6448	*0.5609*
20	0.1	0.2789	*0.2237*	0.3368	*0.3213*
	0.2	0.3173	*0.2664*	0.3716	*0.3515*
	0.5	0.4367	*0.3967*	0.4809	*0.4407*
	0.8	0.5514	*0.5235*	0.5845	*0.5297*
	0.9	0.5919	*0.5684*	0.6207	*0.5612*
50	0.1	0.2906	*0.2387*	*0.3070*	0.3221
	0.2	0.3295	*0.2806*	*0.3456*	0.3504
	0.5	0.4441	*0.4054*	0.4588	*0.4389*
	0.8	0.5561	*0.5291*	0.5677	*0.5293*
	0.9	0.5930	*0.5692*	0.6043	*0.5580*

<표 3>의 결과는 $A=2.0$ 일 때 $m=10,20,50$ 인 경우에 대하여 각 베이지안 통계량으로부터 10,000 번의 반복을 통해 얻어지는 T 값들의 평균값이다. 이 결과를 보면 m 값과 가중치 w 값에 관계없이 Bayes 추정량보다 CB추정량이 항상 좋고, EB추정량보다 CEB추정량이 항상 좋은 결과를 보이는 것을 알 수 있다.

<표 3> $A=2.0$ 일 때 T값의 평균

m	w	Bayes	CB	EB	CEB
10	0.1	0.5042	*0.4844*	0.5719	*0.2891*
	0.2	0.5231	*0.5053*	0.5853	*0.3284*
	0.5	0.5894	*0.5756*	0.6412	*0.4557*
	0.8	0.6488	*0.6397*	0.6890	*0.5810*
	0.9	0.6646	*0.6582*	0.6997	*0.6187*
20	0.1	0.5395	*0.5220*	0.5637	*0.2327*
	0.2	0.5552	*0.5393*	0.5789	*0.2820*
	0.5	0.6069	*0.5941*	0.6278	*0.4263*
	0.8	0.6581	*0.6486*	0.6767	*0.5718*
	0.9	0.6735	*0.6652*	0.6912	*0.6194*
50	0.1	0.5688	*0.5460*	0.5750	*0.1819*
	0.2	0.5829	*0.5617*	0.5891	*0.2377*
	0.5	0.6239	*0.6077*	0.6307	*0.3990*
	0.8	0.6643	*0.6535*	0.6710	*0.5623*
	0.9	0.6779	*0.6687*	0.6849	*0.6173*

4. 결 론

본 연구에서는 베이지안 추정량을 사용하는데 있어 1차 적률과 2차 적률 가운데 연구목적과 연구자의 판단에 따라 더 가중치를 두어야하는 경우에 적합한 추정량을 선택하는 척도를 제시하고 모의실험을 통하여 경우에 따라 서로 다른 추정량의 사용이 적합하다는 결론을 제안하였다.

본 연구에서 가정한 다음의 모형에 대하여

$$X_i|\,\theta_i \sim indep.\,N(\theta_i, 1)$$
$$\theta_i \sim i.i.d\ N(\mu, A),\ A>0\,,\ i=1,2,\ldots m$$

3장의 모의실험에서 얻어진 연구결과를 요약해 보면 다음과 같다.

사전분포의 분산 A 가 모집단의 분산 1 보다 작은 경우에는 m 값과 가중치 w값에 관계없이 Bayes 추정량보다 CB추정량을 사용하는 것이 바람직함을 알 수 있었다. 또한 $0 \le w \le 0.5$ 이면 m 값에 관계없이 EB추정량보다 CEB추정량을 사용하는 것이 타당하며 $w>0.5$ 인 경우에는 EB추정량보다 CEB추정량을 사용하는 것이 바람직한 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 $A=0.5$ 인 경우의 결과만 제시하였으나 $A<1$ 인

경우에서는 동일한 결과를 보여주는 것을 확인할 수 있었다.

반면에 A 가 모집단의 분산 1 과 같은 경우에는 m 값과 가중치 w 값에 관계없이 Bayes 추정량보다 CB추정량을 사용하는 것이 타당함을 알 수 있었다. 또한 $m=10, 20$ 인 경우에는 w 값에 관계없이 EB 추정량보다 CEB추정량이 좋은 추정량인 것을 알 수 있었으며 $m=50$ 일 때는 $w \geq 0.5$ 인 경우에만 EB 추정량보다 CEB 추정량이 나은 것을 알 수 있었다.

또한 A 가 모집단의 분산 1 보다 큰 경우에는 m 값과 가중치 w 값에 관계없이 Bayes 추정량보다 CB추정량을 사용하는 것이 타당함을 알 수 있었고, EB추정량보다 CEB추정량이 더 좋은 추정량인 것을 알 수 있었다. 본 논문에서는 $A=2.0$ 인 경우의 결과만 제시하였으나 $A>1$ 인 경우에서는 모두 동일한 결과를 보여주는 것을 확인할 수 있었다.

References

1. Ghosh, M. (1992), Constrained Bayes Estimation with Applications, *Journal of the American Statistical Society*, Vol. 82, 533-540.
2. Ghosh, M., Kim, D & Kim, M (2004), Asymptotic mean squared error of constrained James-Stein estimators, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol.126, No.1, 107-118.
3. James, W. and Stein, C.(1961), Estimation with Quadratic Loss, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* 1, 361-380, Univ. California Press, Berkeley.
4. Kim, M. (2004), Constrained Bayes and empirical Bayes estimators under squared error and balanced loss functions, Ph.D. Dissertation, University of Florida.
5. Kim,Y(2005), A Comparative Study for Several Bayesian Estimators Under Squared Error Loss Function, *Journal of Korean Data & Information Science Society*, Vol.16, No.2, 371-382.
6. Louis, T.A. (1984), Estimating a Population of Parameter Values Using Bayes and Empirical Bayes Methods, *Journal of the American Statistical Society*, Vol. 79, 393-398.
7. Morris, C. (1981), Parametric Empirical Bayes Confidence Intervals, In *Scientific Inference, Data Analysis, and Robustness*, eds. G.E.P. Box, T. Leonard and C.F. Jeff Wu, Academic Press, 25-50.

[2006년 2월 접수, 2006년 3월 채택]