

## 대류, 복사 사각 핀의 해석

### Analysis of a Convective, Radiating Rectangular Fin

강 형 석\*      김 종 욱\*\*  
Kang, Hyung-Suk      Kim, Jong-Ug

#### Abstract

A convective, radiating rectangular fin is analysed by using the one dimensional analytic method. Instead of constant fin base temperature, heat conduction from the inner wall to the fin base is considered as the fin base boundary condition. Radiation heat transfer is approximately linearized. For different fin tip length, temperature profile along the normalized fin position is shown. The fin tip length for 98% of the maximum heat loss with the variations of fin base length and radiation characteristic number is listed. The maximum heat loss is presented as a function of the fin base length, radiation characteristic number and Biot number.

키워드 : 비오투 수, 복사특성계수, 열손실  
Keywords : Biot number, radiation characteristic number, heat loss

#### 기호설명

$A$  : 열전달에 수직인 핀 단면적 [ $m^2$ ]  
 $A_p$  : 핀 둘레 면적 [ $m^2$ ]  
 $Bi$  : 핀 주위 비오투 수,  $(h\ell')/k$   
 $Bi_r$  : 핀 끝 비오투 수,  $(h_r\ell')/k$   
 $h$  : 핀 주위 열전달계수, [ $W/m^2\text{C}$ ]  
 $h_r$  : 핀 끝 열전달계수, [ $W/m^2\text{C}$ ]  
 $k$  : 열전도율, [ $W/m\text{C}$ ]  
 $\ell'$  : 핀 바닥의 절반 높이, [m]  
 $L_b'$  : 핀 바닥 길이, [m]

$L_b$  : 무차원 핀 바닥 길이,  $L_b'/\ell'$   
 $L_c'$  : 핀 끝 길이, [m]  
 $L_c$  : 무차원 핀 끝 길이,  $L_c'/\ell'$   
 $M_r$  : 복사특성계수,  $(4T_s^3\sigma\epsilon\ell')/k$   
 $P$  : 일반화된 핀 좌표,  $(x-L_b)/(L_c-L_b)$   
 $q$  : 단위폭당 열손실, [ $W/m$ ]  
 $Q$  : 무차원 열손실,  $q/k\phi_i$   
 $T$  : 온도, [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_i$  : 핀 내벽 온도, [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_s$  : 핀 주위 벽 온도, [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_{\infty}$  : 핀 주위 유체 온도, [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $x'$  : 핀 길이 방향 좌표 [m]  
 $x$  : 무차원 핀 길이 방향 좌표,  $x'/\ell'$

\* 강원대학교 기계공학과 교수, 공학박사  
\*\* 한국 폴리텍 IV대학 청주대학 컴퓨터응용기계  
과 부교수, 공학석사

$y'$  : 핀 높이 방향 좌표 [m]

**그리스 문자**

$\beta$  : 비오투 수의 비,  $Bi_c/Bi$

$\epsilon$  : 방사율

$\theta$  : 무차원 온도,  $T/T_i$

$\theta_s$  : 무차원 핀 주위 벽 온도,  $T_s/T_i = T_\infty/T_i$

$\sigma$  : 스테판 볼츠만 상수

**상첨자**

' : 차원 변수

**하첨자**

b : 핀 바닥

e : 핀 끝

i : 내벽

max : 최대

s : 핀 주위의 벽

$\infty$  : 핀 주위의 유체

**1. 서론**

확장된 표면 또는 핀은 열전달을 증가시키기 위한 수단으로 우리들 주위에서 광범위하게 사용되고 있다. 핀의 사용 예로는 주방용품, 전자부품의 방열 핀, 다양한 열교환기 그리고 자동차의 라디에이터 등 매우 다양하다.

이와 같이 열전달에 유용한 핀에 대한 연구가 많이 이루어져 왔는데 특히 핀의 형상 중 가장 보편적인 사각 핀에 대하여도 많은 연구가 발표되었다. 예를 들면 Bar-Cohen은[1] 자연 대류 하에서 사각 핀의 최적의 정렬을 위한 핀의 두께를 나타내었다. Look과 Kang은[2] 핀 뿌리의 온도 변화가 열적으로 비대칭인 사각 핀으로부터의 열손실에 미치는 영향을 발표하였다. Casarosa와 Franco는[3] 정확한 수치해석 방법을 이용하여 핀 표면과 핀 끝의 다른 균일한 열전달 계수를 고려하면서 하나의 사각 형상의 직각 핀의 최적화 설계에 접근하였다. 이러한 연구들에서는 복사 효과가 무시하고 대류만을 고려하였다.

사각 핀에서 대류뿐만 아니라 복사열전달을 고려한 논문들도 다수 발표되었는데 Sparrow와 Niewerth는 [4] 표면에서 대류와 복사에 의하여 열전달이 일어나는 축 방향의 단면적이 변화하지 않는 핀의 해석을 다루었다. Donovan과 Rohrer는 [5] 핀 내에서의 열전도, 유체 매개체로의 대류 열전달 그리고 주위 요소와 핀 사이의 복사 교환을 수학적으로 묘사하면서 평평한 면에 있는 직각 사각 핀의 정렬로부터 복사와 대류에 의한 열전달을 이론적으로 조사하였다.

이상의 논문들은 모두 핀 바닥의 온도를 기준으로 하여 해석되었다. 본 논문에서는 핀 바닥의 온도대신 핀이 부착된 내벽의 온도를 기준으로 하여 내벽으로부터 핀 바닥까지 길이의 변화 효과를 고려하면서 1차원 해석적 방법을 사용하여 대류와 복사 열전달이 일어나는 사각 핀의 온도 분포, 열손실 그리고 최대열손실 등을 해석하였다. 실제 복사 열전달은 온도의 4승에 비례하나 많은 응용에서 근사적으로 복사열전달을 온도에 선형적으로 비례하게 하여 적용하기도 한다[6]. Sparrow와 Niewerth는 [4] 대류와 복사가 일어나는 사각 핀의 연구에서 복사 열전달을 온도에 선형적으로 변화하게 하여 해석한 결과가 정확한 해와 큰 오차가 나지 않음을 보여주었다. 본 연구에서도 근사적으로 복사 열전달을 온도에 선형적으로 변화하게 하여 해석 하였으며 이로 인한 오차가 크지 않게 복사특성계수의 값이 핀 주위의 Biot 수의 값의 1/10 이 넘지 않도록 하였다.

**2. 1차원 해석**

핀의 일반적인 형상에 대하여 핀 표면으로부터 대류와 복사 열전달이 일어난다고 가정하면 식 (1) 과 같이 1차원 지배 방정식이 주어진다.

$$\frac{d}{dx} \left( A \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \frac{dA_p}{dx} (T - T_\infty) - \frac{\sigma \epsilon}{k} \frac{dA_p}{dx} (T^4 - T_s^4) = 0 \quad (1)$$

복사 열전달을 선형적으로 근사화한 후, 핀 폭이 ( $z'$  방향) 핀 높이를 무시할 정도로 크고 주위 벽의 온도와 주위 유체의 온도가 같다고 가정하고 식 (1)을 Fig. 1에 보이는 사각 핀에 적용하면 식 (2)와 같은 무차원 지배방정식이 얻어진다.

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - (Bi + M_r)(\theta - \theta_s) = 0 \quad (2)$$

무차원 지배방정식 (2)를 풀기 위하여 식 (3)과 (4) 두개의 무차원 경계 조건이 요구 된다.

$$-\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L_b} = \frac{1}{L_b} (1 - \theta)_{x=L_b} \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L_e} + (Bi_r + M_r)(\theta)_{x=L_e} - \theta_s = 0 \quad (4)$$

여기서 경계 조건식 (3)은 내벽으로부터 핀 바닥으로 전달되는 열전도는 핀 바닥을 통하여 전달 되는 열전도와 같다는 것을 의미하며 식 (4)는 핀

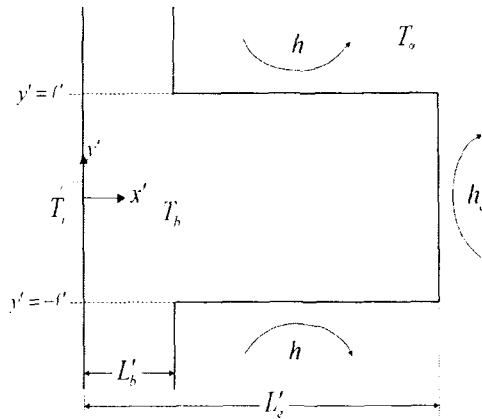


Fig. 1 Geometry of a rectangular fin

끝으로 전도에 의해 들어가는 열전달은 핀 끝에서 복사와 대류에 의하여 주위로 나가는 열전달이 같음을 나타낸다. 경계 조건식 (3)과 (4)를 가지고 무차원 지배 방정식 (2)를 풀면 사각 핀 내의 온도 분포 식 (5)를 얻게 된다.

$$\theta(x) = \frac{f_1(x) + C_1 f_2(x)}{C_2 f_1(L_b) + C_3 f_2(L_b)} (1 - \theta_s) + \theta_s \quad (5)$$

여기서,

$$f_1(x) = \sqrt{Bi + M_r} \cosh \{ \sqrt{Bi + M_r} (L_c - x) \} \quad (6)$$

$$f_2(x) = \sinh \{ \sqrt{Bi + M_r} (L_c - x) \} \quad (7)$$

$$C_1 = Bi_e + M_r \quad (8)$$

$$C_2 = 1 + L_b (Bi_e + M_r) \quad (9)$$

$$C_3 = L_b (Bi + M_r) + Bi_e + M_r \quad (10)$$

사각 핀으로부터의 단위 폭당 열손실은 식 (11)을 이용하여 구할 수 있으며 계산되어진 무차원 형태의 열손실은 식 (12)로 표현된다.

$$q = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L_c} \quad (11)$$

$$Q = q / (kT_i)$$

$$= 2(1 - \theta_s) \frac{(Bi + M_r) f_2(L_b) + C_1 f_1(L_b)}{C_2 f_1(L_b) + C_3 f_2(L_b)} \quad (12)$$

### 3. 결과 및 고찰

Fig. 2는 핀 바닥 두께가 0.5이고 다른 변수들이 일정한 값들로 주어졌을 때 각기 다른 핀 길이에

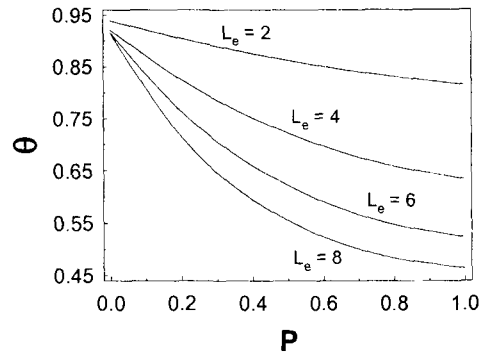


Fig. 2 Dimensionless temperature profile along the normalized fin position ( $Bi=0.1$ ,  $M_r=0.01$ ,  $\beta=1$ ,  $L_b=0.5$ ,  $\theta_s=0.4$ )

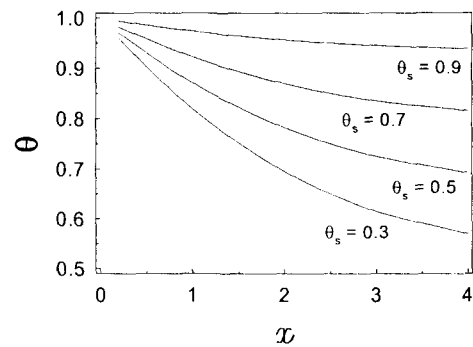


Fig. 3 Dimensionless temperature profile along the dimensionless fin length ( $Bi=0.1$ ,  $M_r=0.01$ ,  $\beta=1$ ,  $L_b=0.2$ ,  $L_c=4$ )

따른 온도 분포를 나타낸다. 일반화된 핀 위치 P는  $(x - L_b) / (L_c - L_b)$ 로 주어진다. 따라서 P=0는 핀 바닥의 위치를 나타내며 P=1은 핀 끝을 의미한다. 핀 길이가 길어짐에 따라 핀 바닥의 온도는 낮아지며 P를 따른 온도 변화도 현저해짐을 보여준다.

Fig. 3은 무차원 핀 끝 길이가 4이고 다른 변수들이 고정되었을 때 핀 주위의 다른 온도들에 대하여 핀 길이를 따른 온도변화를 나타낸다. 핀 주위의 온도가 낮아짐에 따라 핀 바닥의 온도도 낮아지며 핀 길이를 따른 온도변화도 현저해져서 핀 끝에서의 온도도 낮아짐을 보여준다.

세 경우의 복사특성계수에 대하여 핀 길이가 4로 고정되었을 때 핀 바닥 길이의 변화에 따른 열손실의 변화가 Fig. 4에서 보여 진다. 핀 길이가

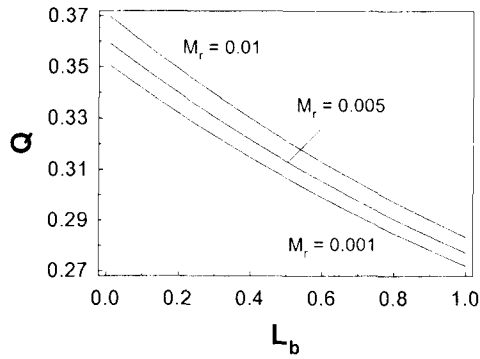


Fig. 4 Heat loss vs. fin base length ( $L_c-L_b=4$ ,  $Bi=0.1$ ,  $\beta=1$ ,  $\theta_s=0.4$ )

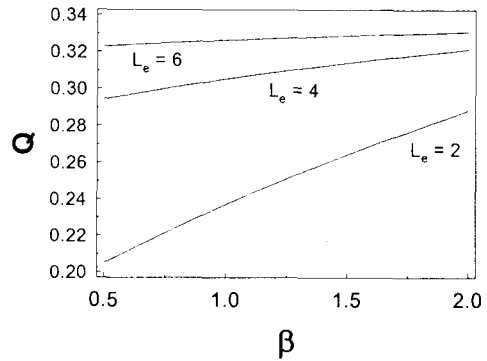


Fig. 6 Heat loss vs. Biot numbers ratio ( $L_b=0.5$ ,  $Bi=0.1$ ,  $M_r=0.005$ ,  $\theta_s=0.4$ )

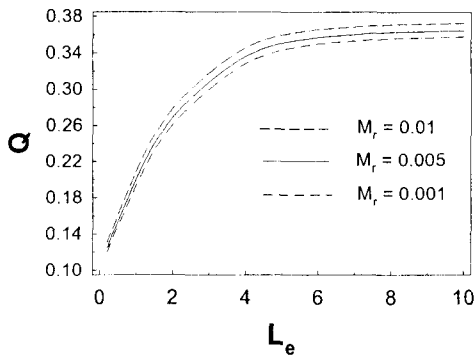


Fig. 5 Heat loss vs. fin tip length ( $L_b=0.2$ ,  $Bi=0.1$ ,  $\beta=1$ ,  $\theta_s=0.4$ )

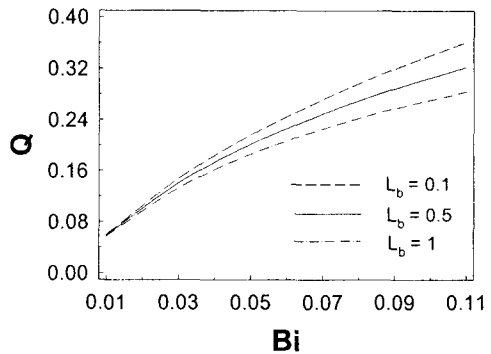


Fig. 7 Heat loss vs. Biot number ( $M_r=0.001$ ,  $\beta=1$ ,  $L_c-L_b=4$ ,  $\theta_s=0.4$ )

고정되었음에도 불구하고 핀 바닥 길이가 증가함에 따라 핀 내벽과 핀 바닥 사이의 열저항의 증가로 인해 열손실은 거의 선형적으로 감소함을 보여준다.

Fig. 5는 세 경우의 복사특성계수에 대하여 핀 바닥 길이가 고정되었을 때 핀 끝 길이의 변화에 따른 열손실의 변화를 나타낸다. 핀 바닥 길이가 고정되었으므로 핀 끝 길이의 변화는 실제 핀 길이의 변화를 의미한다. 핀 길이가 증가함에 따라 열손실은 처음에 급격히 증가하다가 그 이후 서서히 증가하여 최대 값에 이르게 됨을 보여준다. 또한 그림에서 명확히 보이지는 않으나 핀 길이가 증가함에 따라 복사특성계수의 차이에 따라 열손실의 차이는 약간 증가하다가 다시 미미하게 감소하게 된다.

Fig. 6은 다른 변수들이 고정되었을 때 세 경우의 핀 끝 길이에 대하여 Biot 수들 비에 따른 열손

실의 변화를 보여준다. 핀 길이가 짧은 핀 끝 길이가 2인 경우에는  $\beta$ 가 증가함에 따라 열손실은 지속적으로 증가하며 핀 끝 길이가 4인 경우에는  $\beta$ 의 증가에 따른 열손실의 증가율이 현저히 줄어들음을 보여준다. 핀 끝 길이가 상대적으로 긴 6인 경우에는  $\beta$ 의 증가에 따라 열손실이 증가하기는 하나 그 증가율이 미미한데 이는 핀 길이를 따라 열손실이 이미 상당량 이루어졌기 때문이며 물리적으로 핀 끝의 Biot 수의 변화가 열손실의 변화에 큰 영향을 미치지 못 함을 의미한다.

핀 길이가 일정할 때 세 경우의 핀 바닥 길이에 대하여 핀 주위의 Biot 수의 변화에 따른 열손실의 변화가 Fig. 7에서 보여 진다. 세 경우 모두 Biot 수가 증가함에 따라 열손실은 포물선 적으로 증가한다. 또한 큰 Biot 수에서 열손실에 미치는 핀 바닥 길이의 효과가 현저해진다.

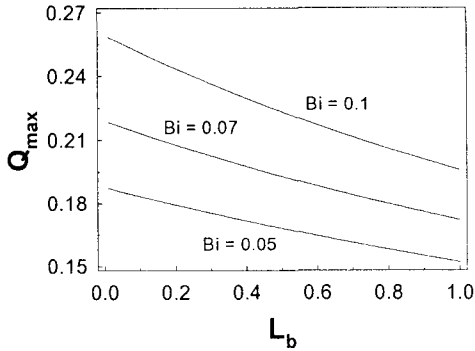


Fig. 8 The maximum heat loss vs. fin base length ( $M_r=0.005$ ,  $\beta=1$ ,  $\theta_s=0.6$ )

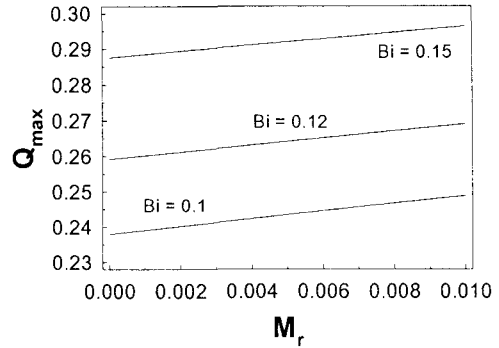


Fig. 9 The maximum heat loss vs. radiation characteristic number ( $\beta=1$ ,  $L_b=0.2$ ,  $\theta_s=0.6$ )

Table 1 Fin tip length for 98% of the maximum heat loss in the case of  $Bi=0.1$ ,  $\beta=1$  and  $\theta_s=0.4$ .

$L_b$	$L_c$ for $0.98 \times Q_{max}$	
	$M_r = 0.01$	$M_r = 0.001$
0.1	5.9395	6.2448
0.3	6.0466	6.3519
0.5	6.1592	6.4641

다른 변수들이 일정하게 주어졌을 때 세 경우의 Biot 수에 대하여 핀 바닥 길이가 변함에 따라 얻을 수 있는 최대 열손실의 변화가 Fig. 8에서 주어진다. 최대열손실은 핀 길이가 상당히 길어졌을 때 일어나며 핀 바닥 길이가 커짐에 따라 최대 열손실은 감소하며 Biot 수가 커질수록 좀 더 포물선적으로 변화함을 보여준다.

Table 1은 핀 바닥 길이와 복사특성계수의 변화에 따른 최대열손실의 98%가 일어날 때의 핀 끝 길이를 나열한다. 이미 Fig. 5에서 보여주듯이 핀 끝 길이가 증가함에 따라 열손실은 처음에는 급격히 증가하다 그 이후에는 아주 서서히 증가하기 때문에 100% 최대열손실이 일어나기 위해서는 핀 길이가 무척 길어야하기 때문에 최대열손실의 98%가 일어나는 핀 끝 길이를 선택하였다. 복사 특성계수가 감소함에 따라 최대열손실의 98%가 일어나는 핀 끝 길이는 늘어남을 보여준다. 또한 핀 바닥 길이가 늘어남에 따라 핀 끝 길이가 늘어나지만 늘어남은 핀 끝 바닥 길이가 늘어남은 핀 끝 길이 보다 더 크기 때문에 실질적인 핀 길이는 짧아짐을 알 수 있다.

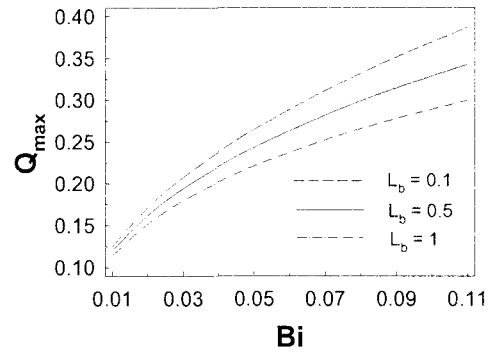


Fig. 10 The maximum heat loss vs. Biot number ( $M_r=0.001$ ,  $\beta=1$ ,  $\theta_s=0.4$ )

다른 변수들이 일정하게 주어졌을 때 세 경우의 Biot 수에 대하여 복사특성계수의 변화에 따른 최대 열손실의 변화가 Fig. 9에서 보여진다. 세 경우의 Biot 수 모두에 대하여 복사특성계수가 증가함에 따라 최대열손실은 선형적으로 증가한다.

Fig. 10은 세 경우의 핀 바닥 길이에 대하여 Biot 수의 변화에 따른 최대열손실의 변화를 나타낸다. 이미 Fig. 7에서 나타났듯이 핀 길이가 일정할 때 Biot 수가 증가함에 따라 열손실이 포물선적으로 증가하듯이 최대열손실도 포물선적으로 증가함을 보여준다. 다만 같은 Biot 수에서 핀 바닥 길이가 변함에 따라 열손실의 차이보다 최대열손실의 차이가 다소 커진다.

#### 4. 결론

핀 표면으로부터 주위로 대류와 복사 열전달이 일어나는 사각 핀에 대하여 1차원 해석적 방법을

사용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. Biot 수가 증가함에 따라 열손실에 미치는 핀 바닥 길이의 효과가 현저해진다.
2. 핀 바닥 길이가 늘어남에 따라 최대열손실의 98%가 일어나는 핀 끝 길이가 늘어나지만 늘어나는 핀 끝 바닥 길이가 늘어나는 핀 끝 길이 보다 더 크기 때문에 실질적인 핀 길이는 짧아진다.
3. 다른 변수들이 일정하게 주어졌을 때 최대 열손실은 복사특성계수가 증가함에 따라 선형적으로 증가하는 반면 Biot 수가 증가함에 따라서는 포물선 적으로 증가한다. 이는 복사특성계수 값이 Biot 수에 비하여 상대적으로 작을 값이기 때문으로 생각된다.

### 참 고 문 헌

- [1] Bar-Cohen, A., "Fin Thickness for an Optimized Natural Convective Array of Rectangular Fins", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 101, pp. 564-566, 1979.
- [2] D. C. Look, Jr. and H. S. Kang, "Effects of variation in root temperature on heat lost from a thermally non-symmetric fin," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 4-5, pp. 1059-1065, 1991.
- [3] Casarosa, C. and Franco, A., "On the Optimum Thermal Design of Individual Longitudinal Fins with Rectangular Profile", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 22, No. 1, pp. 51-71, 2001.
- [4] Sparrow, E. M. and Niewerth, E. R., "Radiating, Convecting and Conducting Fins: Numerical and Linearized Solutions", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 11, pp. 377-379, 1968.
- [5] Donovan, R. C. and Rohrer, W. M., "Radiative and Convective Conducting Fins on a Plane Wall, Including Mutual Irradiation", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 93, pp. 41-46, 1971.
- [6] Frank P. Incropera and David P. Dewitt, "Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 5th edition", *John Wiley & Sons. Inc.*, 2002