

# 유한요소 교호법을 이용한 임의 형상의 삼차원 균열의 피로균열 성장 해석

박재학<sup>†</sup> · 김태순

충북대학교 공과대학 안전공학과  
(2005. 5. 20. 접수 / 2006. 2. 6. 채택)

## Fatigue Crack Growth Simulation of Arbitrarily Shaped Three Dimensional Cracks Using Finite Element Alternating Method

Jai Hak Park<sup>†</sup> · Tae Soon Kim

Department of Safety Engineering, Chungbuk National University  
(Received May 20, 2005 / Accepted February 6, 2006)

**Abstract** : The finite element alternating method is a convenient and efficient method to analyze three-dimensional cracks embedded in an infinite or a finite body because the method has the property that the uncracked body and cracks can be modeled independently. In this paper the method was applied for fatigue crack growth simulation. A surface crack in a cylinder was considered as an initial crack and the crack configurations and stress intensity factors during the crack growth were obtained.

In this paper the finite element alternating method proposed by Nikishkov, Park and Atluri was used after modification. In the method, as the required solution for a crack in an infinite body, the symmetric Galerkin boundary element method formulated by Li and Mear was used. And a crack was modeled as distribution of displacement discontinuities, and the governing equation was formulated as singularity-reduced integral equations.

**Key Words** : surface crack, finite element alternating method, crack growth, stress intensity factor

### 1. 서 론

설비 내에 발생하는 결함 중 가장 대표적인 것이 균열이며, 이 균열의 발생과 성장은 설비의 안전성에 치명적인 영향을 미치게 된다. 따라서 구조물의 안전성을 확보하기 위해서는 이들 균열의 거동을 정확히 파악하는 것이 무엇보다 중요하다. 설비 내에 존재하는 균열의 해석 방법으로 많이 사용되는 방법이 유한요소법(finite element method)이다. 균열 선단 근처에 적절한 균열요소를 배치함으로써 비교적 정확한 응력강도계수(stress intensity factor)를 구할 수 있다. 그러나 이 방법을 이용할 경우 균열 선단 근처에 작은 요소와 특별한 균열요소를 배치하여 모델링하여야 하므로 모델링에 많은 시간과 인

력이 소요된다. 특히 균열의 크기와 위치, 방향 등을 바꾸어 가며 해석을 해야 할 필요가 있는 경우는 더욱 그러하다.

이러한 단점을 극복할 수 있는 한 가지 좋은 방법이 유한요소 교호법(finite element alternating method, FEAM)이다. 이 방법은 균열이 없는 유한요소 해석과 무한 물체에 대한 균열해를 번갈아 해석함으로써 원하는 해를 얻는 방법으로 유한요소 모델에 균열을 포함시킬 필요가 없으므로 간단히 모델링을 행할 수 있다. 또한 일반적으로 균열이 없는 유한요소 모델은 설비의 설계단계에서 이미 구비되어 있는 경우가 많다. 균열이 고려되지 않은 유한요소 모델의 균열이 존재하는 위치에 독립적인 균열요소를 끼워 넣음으로써 응력강도계수를 구하게 된다.

유한요소 교호법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 삼차원 균열을 해석하려는 많은 시도가 있었다<sup>1-4)</sup>. 특히 Nishioka와 Atluri<sup>1)</sup> 등은 타원형의 표면균열 또

<sup>†</sup> To whom correspondence should be addressed.  
jhpark@chungbuk.ac.kr

는 모서리 균열 등을 해석하는 방법을 제안하였고, 박재학 등<sup>4)</sup>은 Forth와 Keat<sup>5)</sup>의 해를 유한요소 교호법에 적용하여 일반적인 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 여기서 Nishioka 등의 방법은 타원형 형상의 균열에만 적용할 수 있고 박재학 등의 방법은 모드 I 하중에 국한되어 있다.

2001년 Nikishkov, Park 및 Atluri<sup>6)</sup> Li와 Mear<sup>7)</sup>가 제시한 변위의 불연속에 대한 감소된 특이성을 갖는 대칭형의 적분방정식의 균열해를 유한요소 교호법에 적용하여 임의의 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제시하였고 평면 및 비평면 임의 형상의 삼차원 균열문제에 적용할 수 있음을 보였다.

본 논문에서는 Nikishkov 등이 개발한 방법을 실린더 내에 존재하는 표면균열의 피로균열 성장해석 등에 적용하기 위하여 수정을 행하였고 또한 이를 피로균열 성장해석에 적용하여 방법이 유용하게 사용될 수 있음을 살펴보았다.

## 2. 삼차원 균열의 해석

유한요소 교호법에 대한 일반적인 사항은 참고 문헌들<sup>4,6)</sup>에 상술되어 있으므로 이 논문에서는 생략한다. 삼차원 균열에 대한 유한요소 교호법의 적용을 위해서는 무한 물체 내에 임의의 형상의 삼차원 균열이 존재하고 균열면 상에 임의의 분포의 면응력(traction)이 작용하는 경우에 대한 해가 필요하다.

### 2.1. 대칭 Galerkin 경계요소법

무한 물체 내에 임의의 형태의 평면 또는 비평면 삼차원 균열이 Fig. 1에서와 같이 존재하고, 균열면 상에는 임의의 면응력이 작용한다고 하자. 이때 균열은 두 개의 균열면  $S_+$ 와  $S_-$  사이에서의 변위의 불연속의 연속된 분포로 나타낼 수 있다. Li 등<sup>7)</sup>은 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weak singularity)을 갖는 경계적분 방정식(boundary integral equation)이 만족됨을 보였다.

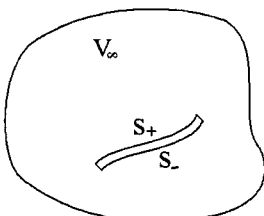


Fig. 1. Crack as displacement discontinuity.

$$-\int_S \int_S D_\alpha u_i^*(z) C_{\alpha i \beta j}(\xi-z) D_\beta u_j(\xi) dS(\xi) dS(z) \quad (1)$$

$$= \int_S u_k^*(z) t_k dS(z)$$

여기서  $u_i$ 는 균열면에서의 변위 불연속의 성분,  $u_i^*$ 는 시험함수(test function)의 성분,  $t_k$ 는 균열면  $S$ 에 작용되는 면응력 성분이다. 또한,

$$C_{\alpha i \beta j}(\zeta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r} [(1-\nu)\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} \quad (2)$$

$$+ 2\nu\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha} - \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{\zeta_i\zeta_j}{r^2}\delta_{\alpha\beta}]$$

이다. 여기서  $\zeta = \xi - z$ ,  $r^2(\zeta) = \zeta_i\zeta_i$ ,  $\mu$ 는 전단탄성계수,  $\nu$ 는 푸아송비(Poisson's ratio)이고,  $D_\alpha$ 는 접선 연산자(tangential operator)로 다음과 같이 정의된다.

$$D_\alpha = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta_2} - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta_1} \right) \quad (3)$$

여기서  $\eta_1, \eta_2$ 는 균열면 상에서의 좌표이고,  $J = |s \times t|$ ,  $s$ 는  $\eta_1$ 방향의 접선벡터,  $t$ 는  $\eta_2$ 방향의 접선벡터이다.

이 균열면을 몇 개의 경계요소로 나누면 각각의 요소 내에서의 변위 및 면응력은 다음과 같이 형상함수로 나타낼 수 있다.

$$u_i = N_\alpha u_{i\alpha}, \quad f_i = N_\alpha f_{i\alpha} \quad (4)$$

여기서  $N_\alpha$ 는 형상함수, 아래첨자  $i$ 와  $\alpha$ 는 각각 전체좌표계와 요소 내 절점번호를 나타내고,  $u_{i\alpha}$ 와  $f_{i\alpha}$ 는 각각 이들 절점에서의 변위와 면응력 값이다. 시험함수로 형상함수를 사용하고 식 (2)를 이용하면 식 (1)은 다음과 같이 이중적분의 형태로 된다.

$$-\int_S \int_S C_{\alpha i \beta j} D_\alpha N_a(z) D_\beta N_b(\xi) dS(\xi) dS(z) u_{j b} \quad (5)$$

$$= \int_S N_a N_q(z) dS(z) t_{i q}$$

### 2.2. 이중적분의 계산

식 (5)를 사용하여 각 균열 절점에서의 변위의 불연속을 구한 후, 이들 값과 응력강도계수의 관계로부터 각 모드에서의 응력강도계수를 계산한다. 그런데, 식 (5)의 풀이를 위해서는 이중적분을 계산하여야 한다. 즉 적분영역  $S$ 에 대하여 적분한 후 다

시 S에 대하여 적분을 행하여야 한다. 적분 영역을 나누고 이를 균열요소라 하자. 임의의 두 균열요소를  $S_m$ 과  $S_n$ 이라 할 경우,  $S_m$ 에 대하여 적분한 후 다시  $S_n$ 에 대하여 적분할 필요가 있다. 이때  $S_m$ 과  $S_n$ 이 서로 떨어져 있는 두 요소이면 일반적인 Gauss 타입의 적분공식을 사용함으로써 수치적분을 행할 수가 있다. 그러나 Fig. 2에 도시된 세 가지 경우에는 피적분 함수에 특이성이 나타나므로 적분에 어려움이 있다. Fig. 2의 (a) 경우는 동일한 적분요소에 대하여 두 번 적분하는 경우, (b)는 요소의 옆면이 접해있는 경우, (c)는 모서리를 맞대고 있는 경우이다. 이러한 적분의 어려움과 관련된 문제는 적절한 좌표변환을 통하여 해결할 수 있음이 최근 밝혀졌고<sup>8)</sup>, Nikishkov 등<sup>6)</sup>은 이를 이용하여 이중적분을 계산하였다. 자세한 적분공식은 참고문헌 6에 상술되어 있다.

균열면 사이의 상대변위가 얻어지면 식 (6)-(8)로 표시되는 균열선단 근처에서의 변위와 응력강도계수의 관계로부터 모드 I, II, III 성분의 응력강도계수를 구한다.

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi} E}{4(1-\nu^2)} \frac{u_3}{\sqrt{2r}} \quad (6)$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi} E}{4(1-\nu^2)} \frac{u_2}{\sqrt{2r}} \quad (7)$$

$$K_{III} = \frac{\sqrt{\pi} E}{4(1+\nu)} \frac{u_1}{\sqrt{2r}} \quad (8)$$

여기에서,  $E$ 는 탄성계수이고,  $\nu$ 는 푸아송비,  $r$ 은 균열선단에서 임의의 한 점까지의 거리이다. 그리고  $u_1, u_2, u_3$ 는  $X_1, X_2, X_3$ 의 국부 좌표계 방향의 변위의 불연속 성분들이다.  $X_3$ 축은 고려하는 균열선단의 일점에서 균열면에 수직인 축이며,  $X_1$ 축은 균열선단에서의 접선방향이며,  $X_2$ 축은  $X_3$ 축과  $X_1$ 축에 수직인 축이다.

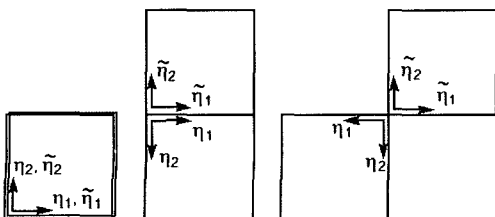


Fig. 2. Singular cases for boundary elements.

프로그램은 Fortran 언어로 작성되었고 유한요소 모델링, 균열 모델링 및 해석의 모든 단계는 명령어에 의하여 작동될 수 있게 하였다. 예를 들면 타원형 균열요소의 생성은 ELLIPSE라는 명령어의 수행으로 가능하다.

### 3. 피로균열 성장해석

본 연구에서는 반복 하중 하에서의 삼차원 균열의 피로성장 시뮬레이션을 다음과 같은 단계로 해석하였다. 모든 균열은 평면이며 평면 내에서 균열 성장이 이루어진다고 가정한다. 따라서 모드 I 성분의 응력강도계수만을 고려한다.

1) 주어진 하중에 대하여 균열 선단에서의 응력강도계수를 구한다. 값은 균열선단에 존재하는 균열격자의 모서리 절점에서 구해진다. Fig. 3에서의 J점과 L점이 모서리 절점들이다.

2) 균열성장식을 이용하여 각 균열선단 모서리 절점에서 하중 사이클 수의 증분  $\Delta N$ 에 해당하는 균열의 성장량  $\Delta a$ 를 구한다.

3) Fig. 3에서와 같이 모서리 절점에서 균열선단에 수직인 선을 그리고 수직선상의  $\Delta a$  전방에 새로운 절점을 만든다. S와 Q점이 새로운 절점들이다.

4) J점에서의 균열 성장량과 L점에서의 균열성장량의 평균을 이용하여 절점 K 전방의 새로운 절점 R을 구한다.

5) 생성된 절점들을 이용하여 새로운 균열 요소를 정의한다. 이때 균열선단에서의 응력의 특이성을 나타내기 위하여 균열선단 뒤쪽의 중간 절점을 1/4 위치에 정의한다.

6) 이전의 균열선단 요소에서 1/4 위치에 있었던 중간절점들을 중간위치로 이동시킨다. Fig. 3의 M점과 N점이 이점들에 해당된다.

7) 다시 단계(1)로 가서 전체 하중 사이클 수가 주어진 하중 사이클 수가 될 때까지 계산을 반복한다.

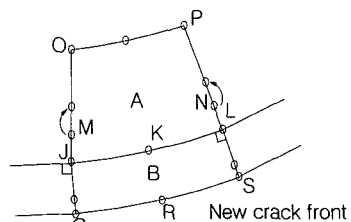


Fig. 3. Generation of new crack front elements during the crack growth.

이러한 과정들은 자동으로 행해질 수 있도록 프로그램화 되었다. 또한 하중 사이클 대신 최대 균열성장량이 주어진 경우 필요한 하중 사이클 수를 구할 수도 있도록 하였다.

본 논문에서는 균열성장식으로 Paris<sup>9)</sup> 식을 사용하였다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \quad (9)$$

재료상수로는  $C = 6.9 \times 10^{-9}$ ,  $n = 3.0$ 을 적용하였다.  $da/dN$ 과  $\Delta K$ 의 단위는 각각  $m/cycle$ 과  $MPa\sqrt{m}$ 이고,  $a$ 는 일반적인 균열길이이다.

#### 4. 배관에 존재하는 3차원 표면균열 성장

##### 4.1. 반타원형 표면균열 해석

해석의 정확성을 살펴보기 위하여 원통 내부에 존재하는 반타원형 표면균열을 해석하여 기존의 해석결과와 비교하였다. 배관은 외경이 400mm이고 두께가 20mm라고 하고 모델의 길이는 균열보다 충분히 긴 400mm로 하였다. 재료는 탄소강으로 가정하였다. 작용하중으로 내압 10MPa를 작용하였고 배관의 양단은 열려있다고 가정하였다. 응력강도계수를 계산할 때에 균열면에 작용되고 있는 압력의 효과도 함께 고려하였다.

배관의 중간 내면에 축방향으로 반타원형 표면균열이 존재하고 있다고 하고 이 균열을 해석하였다. 이때 표면에서의 균열 길이는  $2c$ , 균열 깊이는  $a$ 라 한다.

해의 정확성을 검토하기 위하여  $c = 7mm$ ,  $a = 5mm$ 인 경우에 균열 선단을 따라서의 응력강도계수 분포를 구하여 Newman과 Raju<sup>10)</sup>의 해와 비교하였다. Fig. 4는 사용된 유한요소 모델을 보여주고 있다. 두께방향으로 4개 층, 축방향으로 10개 층, 원주방향으로 20개 층의 요소를 배치하여 모두 800개의 20절점 3차원 요소로 모델을 구성하였다. 적은 수의 요소를 사용하여도 정확한 해를 구할 수 있음을 보이기 위하여 비교적 적은 수의 요소를 사용하였다. 또한 이때 사용된 균열모델은 Fig. 5와 같다. 균열모델은 68개의 균열요소로 이루어져 있다. 그림에는 절점도 함께 나타내었는데, 균열선단 바로 뒤쪽의 중간절점들은 1/4 지점으로 옮겨져 있음을 볼 수 있다. 이는 전술한 바와 같이 응력의 특이성을 나타내기 위

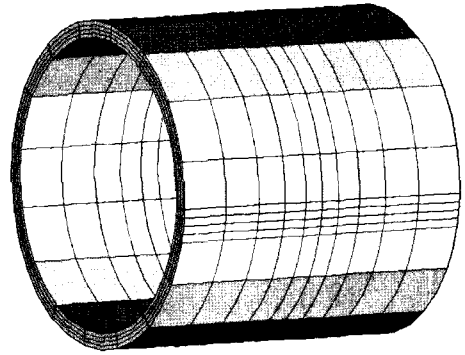


Fig. 4. Finite element model.

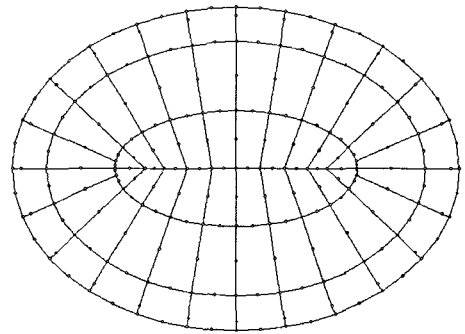


Fig. 5. Crack mesh.

하여 필요하다. 해석의 정확성을 높이기 위해서는 균열선단에서 균열요소의 모서리들이 직각을 이루는 것이 좋다. 이러한 조건을 만족할 수 있도록 균열모델을 형성하였다.

FEAM 해석에서는 유한요소 격자와 균열 격자는 완전히 분리되어 있다. 따라서 균열해석을 하고 싶은 위치에 균열격자를 삽입하면 삽입된 균열에 대한 응력강도계수를 구할 수 있다. 표면균열을 해석할 경우는 Fig. 5의 균열격자에서 위쪽 반은 물체 내에 들어가 있고 아래쪽 반은 물체 바깥쪽에 위치하게 된다.

Fig. 6은 응력강도계수 분포를 나타낸 것이다. 가로축의  $\phi$ 는  $\phi = \arcsin(y/a)$ 의 식에서 구해진 각도이다. 여기서  $y$ 는 균열의 중심에서 수직방향으로의 좌표이며  $a$ 는 해당 균열 형상에서의 균열 깊이이다. Newman 등<sup>10)</sup>의 해와 비교하면 FEAM에 의한 해가 전반적으로 조금 작은 값이 얻어지고 있음을 알 수 있고 균열의 깊은 영역에서 두 해가 비교적 잘 일치하고 있으나 표면 영역에서는 FEAM에 의한 해가 작게 나타나고 있다.

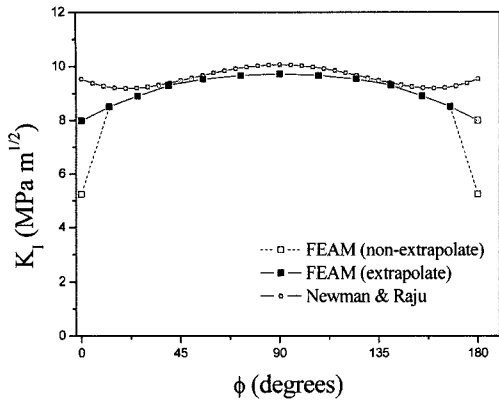


Fig. 6. Stress intensity factors for a semielliptical surface crack with  $c=7\text{mm}$ ,  $a=5\text{mm}$ .

Fig. 6에서 자유표면에서의 응력강도계수는 원래의 값과 외삽하여 구한 두 가지 값이 표시 되어 있다. 일반적으로 FEAM과 경계적분법 등에 의한 해에서는 자유표면에서의 응력강도계수가 기존의 해에 비하여 아주 작은 값이 얻어지고 있다. 이의 원인에 대해서는 아직 정확한 결론을 내리지는 못하고 있으나 이러한 현상으로 인하여 얻어진 응력강도계수 값을 그대로 사용하여 균열성장 해석을 하는 경우는 자유표면에서의 균열성장이 아주 느려지는 현상이 일어난다. 따라서 이러한 현상을 방지하기 위하여 자유표면에서의 응력강도계수를 내부에서 얻어진 응력강도계수의 외삽된 값으로 사용하였다. 본 해석에서는 자유표면에 가까운 내부의 4 점에서의 값을 이용하여 2차 다항식으로 외삽하여 자유표면에서의 값으로 사용하였다.

#### 4.2. 배관에 존재하는 삼차원 균열의 성장

배관의 내면에 위치하는 반타원형 표면균열의 피로균열 성장을 FEAM을 사용하여 시뮬레이션하였다. 초기 균열 길이로 앞과 같이  $c=7\text{mm}$ ,  $a=5\text{mm}$  이라고 가정하고 최대 작용하중도 앞과 같이 10MPa의 내압으로 하였고, 변동하중에서의 응력비는 0으로 가정하였다. 해석을 통하여 피로균열 성장에 따른 균열의 형태 및 응력강도계수의 변화와 필요한 하중 사이클 수를 구하였다. 각 단계별로 최대 1mm 씩 성장하게 하여 4단계 해석을 하였다.

균열 성장시의 균열의 형태는 Fig. 7과 같다. 진한 색으로 된 가운데 부분이 원래의 균열이고 흰 부분이 성장된 부분을 나타낸다. 아래 반은 물체 밖에 위치하는 부분이며 이 부분에서도 경계면에 위치하는

절점의 성장량과 동일하게 성장시켰다. 위 부분을 볼 때 성장함에 따라 점차 원형으로 변화되어 가고 있는 균열형태를 볼 수 있다.

Fig. 8은 성장 동안의 응력강도계수 변화를 보여주고 있다. 성장에 따라 점차 응력강도계수가 증가하고 있음을 알 수 있고, 처음은  $\phi=90^\circ$  부근의 값이 표면보다 컸으나 성장함에 따라 표면쪽에서의 응력강도계수의 증가가 더 빨리 됨을 볼 수 있다.

Table 1은 각 성장 단계에서 가해진 하중 사이클 수를 보여주고 있다.

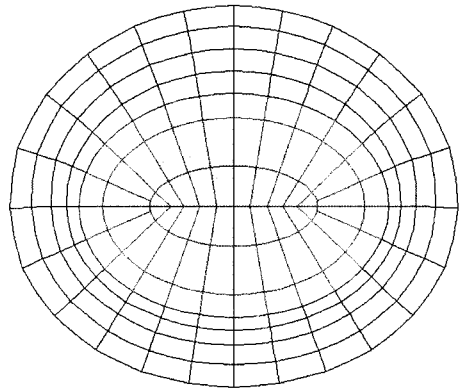


Fig. 7. Fatigue crack growth simulation.

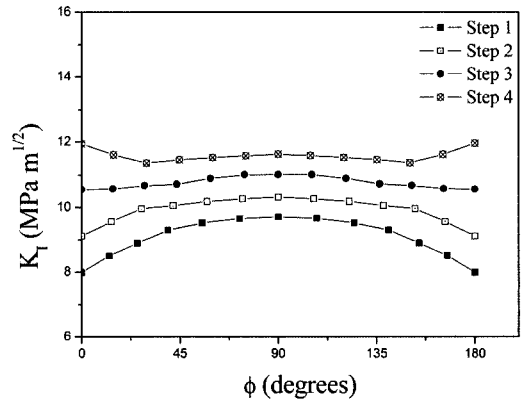


Fig. 8. Variation of stress intensity factors during the crack growth.

Table 1. Number of loading cycles

Step	Cycles in step	Total cycles
1	158,200	158,200
2	132,200	290,400
3	108,600	399,000
4	84,700	483,700

## 5. 결 론

유한요소 교호법을 이용한 삼차원 균열 해석 방법을 배관에 존재하는 표면균열에 적용하여, 균열 선단에서의 응력강도계수를 구하였고, 피로균열 성장을 예측하였다.

배관 내면에 축방향으로 존재하는 반타원형 표면 균열에 따른 응력강도계수를 구하여 기존의 해와 비교한 결과 비교적 잘 일치하고 있음을 알았고, 피로균열 성장해석에 적용하여 타원형 형상의 초기 균열이 원형에 가까운 표면균열로 성장하는 과정을 시뮬레이션하였다.

이로부터 유한요소 교호법을 삼차원 균열의 피로 균열 성장해석에 유용하게 사용될 수 있음을 확인할 수 있었다.

**감사의 글 :** 이 논문은 2004년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- 1) T. Nishioka and S. N. Atluri, "Analytical Solution for Embedded Elliptical Cracks and Finite Element Alternating Method for Elliptical Surface Cracks, Subjected to Arbitrary Loadings", *Engng Frac. Mech.*, Vol. 17, pp. 247~268, 1983.
- 2) C. Y. Liao and S. N. Atluri, "A Finite Element Alternating Method for Evaluation of Stress Intensity Factors for Part-circular Cracks Subjected to Arbitrary Loading", *Com. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 91, pp. 12531~1270, 1991.
- 3) H. Rajiyah and S. N. Atluri, "Analysis of Embedded and Surface Elliptical Flaws in Transversely Isotropic Bodies by the Finite Element Alternating Method", *J. Appl. Mech., Trans. of ASME*, Vol. 58, No. 2, pp. 435~443, 1991.
- 4) 박재학, 김태순, S. N. Atluri, "유한요소 교호법을 이용한 모드 I 하중 하의 삼차원 균열의 해석", *대한기계학회 논문집 (A)*, 제24권, 제4호, pp. 982~990, 2000.
- 5) S. C. Forth and W. D. Keat, "Three-dimensional Nonplanar Fracture Model Using the Surface Integral Method", *Int. J. Fracture*, Vol. 77, pp. 243~262, 1996.
- 6) G. P. Nikishkov, J. H. Park and S. N. Atluri, "SGBEM-FEM Alternating Method for Analyzing 3D Non-planar Cracks and Their Growth in Structural Components", *Computer Modeling in Engng & Sci.*, Vol. 2, No. 3, pp. 401~422, 2001.
- 7) S. Li and M. E. Mear, "Singularity-reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three Dimensional Linear Elastic Media", *Int. J. Fract.*, Vol. 93, pp. 87~114, 1998.
- 8) A. Frangi, G. Novati, R. Springhetti and M. Rovizzi, "Fracture Mechanics in 3D by the Symmetric Galerkin Boundary Element Method", VIII Conf. On Numerical Methods in Continuum Mechanics, Liptovsky Jan, Slovak Republik, 2000.
- 9) P. C. Paris and F. Erdogan, "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws", *J. Basic Eng.*, Vol. 85, pp. 528~534, 1960.
- 10) J.C. Newman and I.S. Raju, "Stress Intensity Factors for Internal Surface Cracks in Cylindrical Pressure Vessels", *Trans. ASME Ser. J, J. Pressure Vessel Technology*, Vol. 102, pp. 342~346, 1980.