

콘크리트 재료손상에 대한 유한요소상의 의미

이인규^{1)*}·노영숙²⁾·김 우³⁾

¹⁾한국철도기술연구원 ²⁾서울산업대학교 건축공학과 ³⁾전남대학교 토목공학과

(2005년 2월 28일 원고접수, 2006년 1월 16일 심사완료)

Numerical Implication of Concrete Material Damage at the Finite Element Levels

In-Kyu Rhee^{1)*}, Young-Sook Roh²⁾, and Woo Kim³⁾

¹⁾Track & Civil Engineering Department, Korea Railroad Research Institute, Uiwang 437-757, Korea

²⁾Dept. of Architectural Engineering, Seoul National University of Technology, Seoul 140-714, Korea

³⁾Dept. of Civil Engineering, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea

(Received February 28, 2005, Accepted January 16, 2006)

ABSTRACT

The principal objective of this study is to assess the hierarchical effects of defects on the elastic stiffness properties at different levels of observation. In particular, quantitative damage measures which characterize the fundamental mode of degradation in the form of elastic damage provide quite insightful meanings at the level of constitutive relations and at the level of structures. For illustration, a total of three model problems of increasing complexity, a 1-D bar structure, a 2-D stress concentration problem, and a heterogeneous composite material made of a matrix with particle inclusions. Considering a damage scenario for the particle inclusions, the material system degrades from a composite with very stiff inclusions to a porous material with an intact matrix skeleton. In other damage scenario for the matrix, the material system degrades from a composite made of a very stiff skeleton to a disconnected assembly of particles because of progressive matrix erosion. The trace-back and forth of tight bounds in terms of the reduction of the lowest eigenvalues are extensively discussed at different levels of observation.

Keywords : heterogeneity, finite element, spectral properties, elasticity, mesoscale

1. 서 론

콘크리트 재료가 역학적인 또는 환경적인 외부조건들에 의해 손상을 받을 때, 재료 구성물의 개별 손상과 이들의 복합손상 정도에 따라 물리적인 강성 특성에 변화를 발생시킨다. 이러한 변화는 콘크리트 재료와 같은 이질성이 뚜렷한 재료인 경우에 전체적인 진행성 성능저하 현상으로 이어진다. 일반적으로 역학적인 손상은 콘크리트 재료 구성 관계의 탄성강성, 강도 그리고 연성의 저하를 내포하고 있다. 콘크리트 재료의 손상을 적절히 수치적으로 묘사하기 위해서는 외부상태변수와 내부변수 그리고 이들의 연관 관계 정립이 필요로 하다. 다양한 크기규모(scale)의 구성 관계로 손상을 특성화, 정량화하려면 다음과 같은 두 가지 크기규모에 관해 관찰할 필요가 있다. 즉, (가) 분명한 이질성과 국부적 불연속성이 주로 나타나는 중간규모(mesoscale),

(나) 중간규모의 조합으로 조밀성, 연속성 그리고 통계적인 동질성을 나타내는 거시규모(macroscale)등이 있다. 이러한 크기규모들에 손상영향을 표현하기 위해서는 다음과 같은 세 가지 단계의 전략으로 정리할 수 있다. 즉, (가) 중간규모에서는 재료 구성요소에 의한 형태학상 구조(morphology)의 영향을 고려한 해석적인 모델을 제시하고, (나) 결함으로 인한 상태변수의 변화를 해석적으로 평가하며, (다) 중간규모 영역을 변분적 또는 통계학적인 평균을 이용하여 거시규모 구조 영역으로 동질화시켜 각각의 미세 손상이 거시손상으로의 계층적 전파를 확인할 수 있다.

콘크리트와 같은 이질성이 큰 재료에서의 미세균열의 전파는 응력 뿐 아니라 중간규모에서의 조직구조(콘크리트의 균열 면 또는 혼입재료인 골재와 모르타르의 경계면을 따라)에 따라서도 영향을 받는다. 따라서 중간규모 해석은 임의성에 대한 고려 및 그에 따른 내부변수의 영향을 고려하여야 한다. 대표체적요소는 이러한 미세균열 그리고 미세 공동의 진전 및 연합으로 인해 주요균열로 전파하는 과정을 관찰할 수 있도록 한다. 중간규모와 거시규모의 해석은

* Corresponding author

E-mail : rhee@kri.re.kr

©2006 by Korea Concrete Institute

연속체에서 손상역학을 이용하여 통상적으로 해석을 하고 중간규모는 거시규모에서 정의된 변수들을 이용하여 파괴역학을 이용하여 주로 해석되어진다. 본 논문에서 고려된 모형은 손상 특성을 손상단계별로 강성행렬의 고유치와 고유벡터를 이용하여 측정하고자 한다. 강성이 약한 모르타르에 상대적으로 강한 혼입재료인 골재가 포함된 2상복합체의 상세모형을 통해 수치적 손상측정을 시도하였다.

2. 성능저하 해석

2.1 스펙트럼 손상 측정

“작은” 규모의 성능저하가 “큰” 규모의 성능저하에 영향을 주는 상호 연관 관계를 이해하기 위해 선형탄성에서 변위형식의 유한요소를 먼저 생각해보자. 모든 요소의 전체 강성행렬은 정적 평형식, $\mathbf{F} = \mathbf{K}_o \mathbf{r}$ 을 유지한다. 여기서 각 요소들은 Boolean 영향연산자(incidence operator) \mathbf{a} 를 통해 전체 자유도 $\mathbf{u} = \mathbf{a} \mathbf{r}$ 로 연결된다. 즉 전체 강성행렬은 다음 식(1)과 같다.

$$\mathbf{K}_o = \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n^T \mathbf{k}_n \mathbf{a}_n \quad (1)$$

이러한 전체강성행렬은 만약 강제운동 모드가 적절히 구속되어 있다면 일반 유한요소 모델에서는 그 스펙트럼 특성은 항상 양의 실수를 가지게 된다. 유한요소에서 구조물이 정규직교(orthonormal) 고유벡터의 변형모드를 받는다면, 식(2)에서처럼 각 고유치는 탄성 변형에너지의 양을 나타낸다.

$$[\mathbf{K}_o - \Lambda_{min} \mathbf{I}] \mathbf{r} = 0 \quad (2)$$

여기서, 최소고유치는 평형방정식의 특이점의 근접을 측정할 수 있게 한다. 다시 말하자면, $\Lambda_{min} \rightarrow 0$ 이면 강성행렬은 양의 정부호성(positive-definite)의 상실과 함께 유일성(uniqueness)의 상실을 나타낸다. 식(3)과 같이 최소고유치의 이차형식은 임박한 안정성(stability)의 손실에 대한 결정적 지표이며 보통 에너지 노름(norm)이 0 이 됨을 의미한다.

$$W_{cr} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{min}^T \mathbf{K}_o \mathbf{r}_{min} = \frac{1}{2} \Lambda_{min} = 0 \quad (3)$$

이때, 최대고유치와 최소고유치로 정의되는 각각 상계(upper bound)와 하계(lower bound)를 가진 스펙트럼 유계를 식(4)와 같이 Rayleigh 지수, ρ 에 의해 정의할 수 있다.

$$\rho = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{K}_o \mathbf{r}}{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} \quad \text{여기서, } \Lambda_{min} \leq \rho \leq \Lambda_{max} \quad (4)$$

식(4)의 기본적인 표현이 우리가 전체강성행렬의 최소고유치를 각 부재행렬의 최소고유치와 비교할 때 몇 가지 중요한 정보를 알려준다. Rayleigh 지수의 유계에 의하면, Boolean 영향인자로 전체강성행렬이 구성된 후 적절한 경계구속조건을 가졌다면 식(5)에서처럼 전체강성행렬의 최소고유치는 부재강성행렬의 최소고유치를 아래로 유계하도록 되어있다.

$$[\mathbf{K}_o - \lambda_{min} \mathbf{I}] \cdot \mathbf{x}_{min} = 0, \lambda_{min} \leq \Lambda_{min} \quad (5)$$

역으로 부재완전부식, 즉 한 부재의 강성이 0 까지 감소한다면 전체강성행렬의 최소고유치도 감소한다. 이는 식(6)과 같이 양의 정부호성(positive-definite)을 가진 전체강성행렬에서 양의 준정부호성(positive semi-definite)을 가진 부재행렬을 제거하는 것과 동일하다고 볼 수 있다.

$$\Lambda_{min} [\mathbf{K}_o - \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{a}_e] \leq \Lambda_{min} [\mathbf{K}_o] \quad (6)$$

직관적으로도 양의 준정부호성을 가진 부재행렬을 양의 정부호성을 가진 전체강성행렬에서 제거한다면 이에 상응하는 전체강성행렬의 스펙트럼 특성이 감소할 것은 쉽게 알 수 있다. 만약 부재부식을 구조변경의 일반적인 형식으로 간주하면 강성감소에 대한 정량적인 유계를 설정할 수 있다. 단자유도계에서 대칭 일순위 수정(rank one update)을 통한 구조변경은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{update} = \mathbf{K}_o - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \quad (7)$$

만약 기준 강성행렬을 선조건자, \mathbf{K}_o^{-1} 를 이용하여 정규화한다면

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{K}_{update} &= \mathbf{I} - \mathbf{K}_o^{-1} [\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] \\ &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{r} \end{aligned} \quad (8)$$

비록 $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{r}$ 은 비대칭 수정벡터를 오른편 식에 나타나게 하지만, 기준 강성행렬, $\mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{K}_{update}$ 의 최소고유치는 두 개의 정규화된 수정벡터들의 내적으로 인한 일원행렬에 의해 표현된다¹⁾.

$$\lambda_{min} [\mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{K}_{update}] = 1 - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{r} \quad (9)$$

간단하게 말하자면, 정규화된 기준 강성행렬의 부수적인 문제는 단순히 $\mathbf{r}^T \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{r}$ 의 일원고유치의 감소를 보여주고 있다. 대칭성의 손실에도 불구하고 스펙트럼 특성은 실수의 값을 가진다. 이는 일원 비대칭 수정항이 복소공액 고유치의 형성을 허용하지 않기 때문이다. 결과적으로 일순위 수정형식의 손상측정은 손상역학에서의 스칼라 값을 가진 건전도(integrity), $1 - D_E = 1 - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{r}$ 과 유사한 “정규화된 에너지 손실”을 의미한다.

2.2 행렬식 손상 측정

행렬식(determinant)을 이용한 스펙트럼 성능저하 해석방법이 있다. 이런 경우 Schur 행렬식분해법은 손상에 의한 양성(positiveness) 즉, 건전성의 감소에 대해 정량적으로 제공한다. 예를 들면, 전체강성행렬 \mathbf{K} 를 분할하면,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

손상된 부분 \mathbf{K}_{11} 과 건전한 부분 \mathbf{K}_{22} 으로 각각 분할할 수 있으며 비대각선 행렬인 \mathbf{K}_{12} 와 \mathbf{K}_{21} 에 의해 연결되어 있다. \mathbf{K}_{11} 가 강성손실을 받는 손상부분이고 즉 \mathbf{K}_{11} 의 자유도는 현재손상진행에 영향을 받고 있고, 반면에 \mathbf{K}_{22} 는 건전한 상태라고 가정하자. 또한 \mathbf{K}_{12} 와 \mathbf{K}_{21} 는 모두 현재 손상진행에 영향을 받는다. 위의 내용을 Schur의 행렬식 정리^{7,10)}를 이용하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{stability} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}$$

$$|\mathbf{K}| = |\mathbf{K}_{22}| |\mathbf{K}_{stability}| \quad (11)$$

$$|\mathbf{K}| = f(|\mathbf{K}_{11}|) \text{ 또는 } f(|\mathbf{K}_{integrity}|)$$

$$|\mathbf{K}_{22}| \rightarrow \text{positive definite} \quad (12)$$

만약 결합항인 $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} = \mathbf{0}$ 이면 두 대각선 분할행렬식의 적으로 표현되며 완전결합된 경우 $|\mathbf{K}|$ 의 상계를 의미한다.

$$|\mathbf{K}|_{upper} = |\mathbf{K}_{22}| |\mathbf{K}_{11}| \quad (13)$$

2.3 일차원 봉문제의 탄성 손상

Fig. 1의 봉문제의 진행성 손상효과를 검사하기 위해 중간부재가 진행성 손상을 받으며 종국에는 완전부식으로 이어진다고 하자. 직렬 봉구조의 건전성이 어떻게 손상진행에 의해 영향을 받는지를 검사하도록 한다. 이때 중간부재가 스텔라 손상⁴⁵⁾의 전형적인 형식에 의해 성능저하를 받는다고 정의한다.

$$\mathbf{E}_{damage} = [1 - D_E] \mathbf{E}_0, \quad D_E = 1 - \frac{E_s}{E_0} \quad (14)$$

여기서 E_0 는 초기 건전한 탄성계수이며 D_E 는 초기 강성에 대한 할선비로서 손상정도를 의미한다.

다양한 값의 손상 $0 \leq D_E \leq 1$ 을 고려하면 Fig. 2에는 중간부재의 성능저하로 인한 봉구조물의 스펙트럼 특성을 보여주고 있다. 부재의 성능저하는 재료손상에 직접적

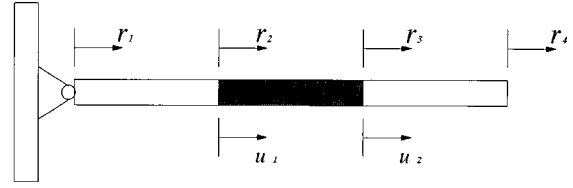
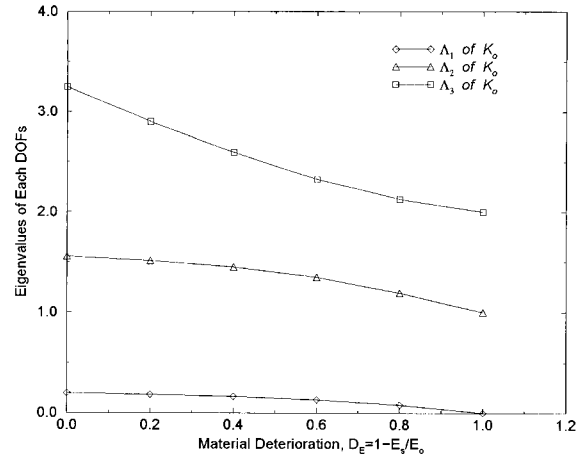
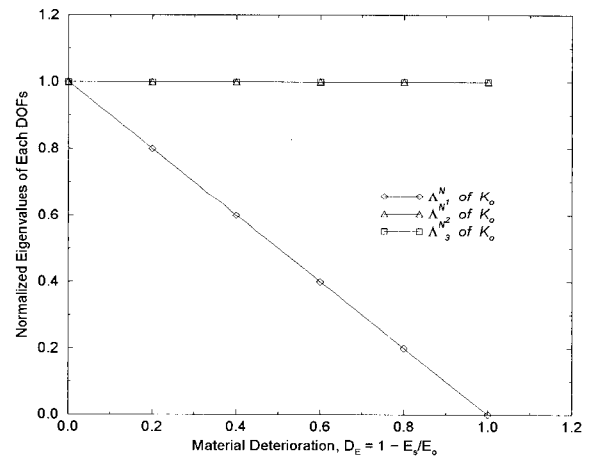


Fig. 1 Element erosion in 1-D bar structure, EA/L



(a) Without preconditioning



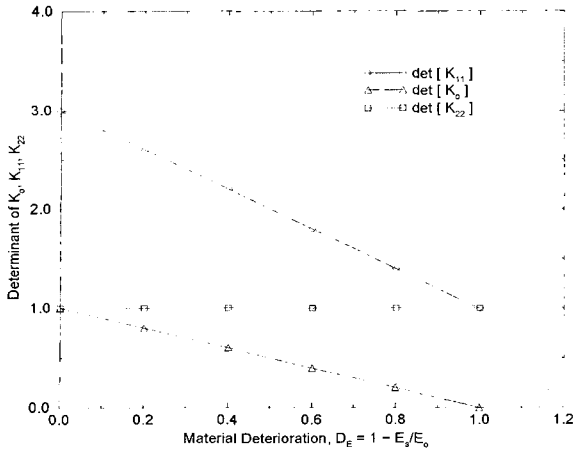
(b) With preconditioning

Fig. 2 Degradation of structural eigenvalues due to progressive erosion in serial bar example

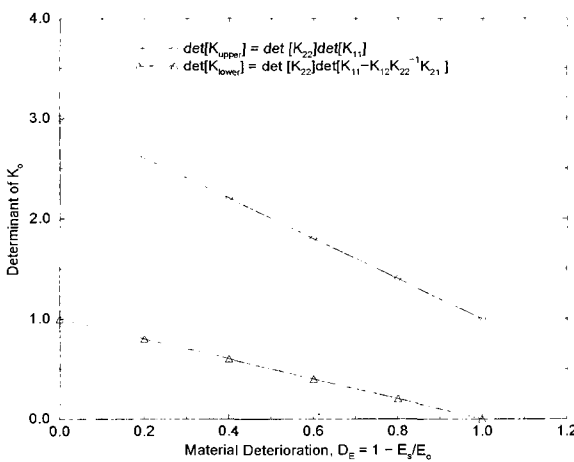
으로 비례한다. 즉,

$$\mathbf{k}_{damage} = [1 - D_E] \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서, $E_0 A/L = 1$. 영이 아닌 부재의 고유치가 비례적으로 재료손상 $\lambda_k = [1 - D_E] E_0 A/L$ 에 의해 감소하더라도, Fig. 2(a)는 전체 구조물에서 3개의 고유치 모두 비례적이지 않는 것을 보여주고 있다. \mathbf{K}_0^{-1} 로 정규화하면 일 순위 수정변수에 의한 손상은 분리되고 있음을 Fig. 2(b)에서 보여주고 있다. 여기서 우리는 선조건화가 진행성 손상



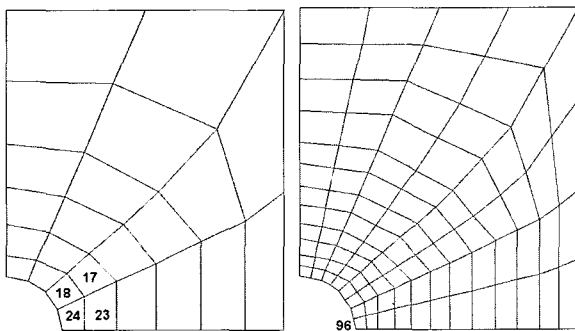
(a) Determinants of K_o, K_{11} and K_{22}



(b) Determinant of K_o and Upper bound

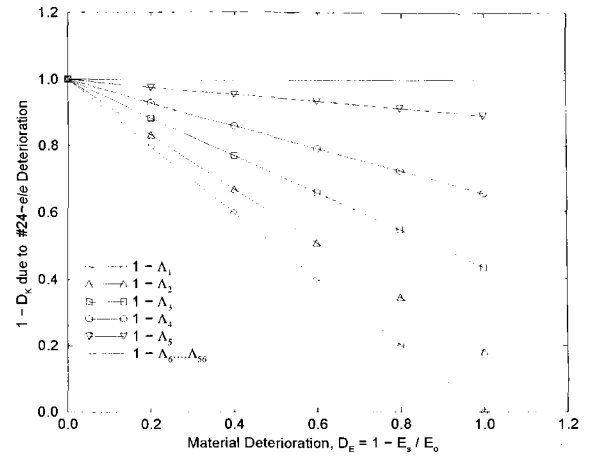
Fig. 3 Degradation of partitions due to progressive erosion in serial bar example

을 한 개의 고유치로 고립되어 나타나고 그 변화 역시 비례적인 손상을 보여주고 있다. 직렬 배치된 구조물은 약한 고리개념(weakest link concept)에 의해 전체 구조물에 영향을 주며 재료손상, 부재부식 그리고 전체구조물 손상이 함께 나타남을 알 수 있다. 즉, $D_E = D_k = D_K$ 이다.

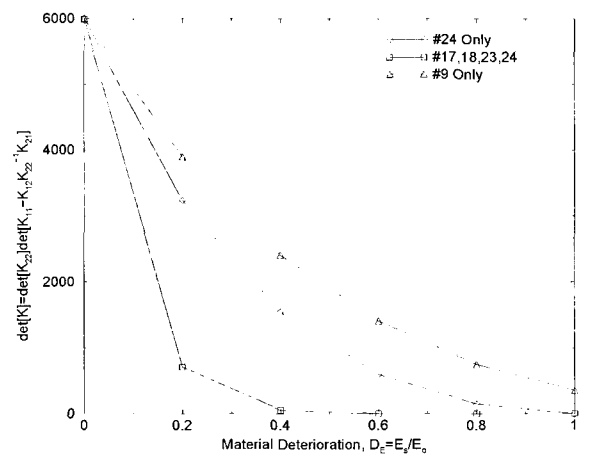


(a) Basic mesh (b) Refined mesh

Fig. 4 2-D panel with a circular hole element erosion



(a) Element No. 24



(b) Three damage scenarios

Fig. 5 Structural integrity due to material erosion and determinant reduction of preconditioned stiffness matrix

Fig. 3 은 Schur정리에 의한 행렬식의 기여정도에 따라 다양한 분할행렬에 대한 재료손상의 효과를 보여주고 있다. 또한 손상과 연관된 분할 K_{11} 과 아직 건전한 부분과 연관된 K_{22} 의 분리의 중요성을 보여주고 있다. 결합보조 분할인 K_{12} 와 K_{21} 이 전체강성을 특이하게 하는 부수적인 효과도 확인할 수 있었다.

2.4 이차원 평면응력문제의 탄성 손상

위의 일차원 봉구조의 위상(topology)은 직렬배치구조의 약한고리개념을 잘 보여주었지만 현실에서는 이러한 경우보다는 병렬하중 전달경로가 대개의 연속체에 나타나므로 전체구조물의 손상에 있어 재료손상이 미치는 정도가 상대적으로 감소한다. 따라서 재료손상이 전체구조물 손상에 아래로 유계한다. 즉, $D_E \leq D_K$ 또는 “작은” 손상이 항상 “큰” 손상보다 먼저 일어난다. 두 번째 예제는 Fig. 4

에서처럼 패널(panel)의 응력집중문제이며 패널 중심에 원형구멍이 있는 문제로 4절점 사변형요소로 모형화하였다. 응력집중이 되고 있는 24번 요소가 탄성 재료손상을 받을 때, Fig. 5(a)에서처럼 정규화된 전체강성행렬의 5개 고유치가 초기 값으로부터 감소한다. 이때 5개의 부재 고유치가 재료손상에 따라 Fig. 5(b)와 같이 비례적으로 0이 됨을 알 수 있었다.

$$\mathbf{k}_{damage} = [1 - D_E] \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_o \mathbf{B} dV \quad (16)$$

정규화된 전체강성의 5개 고유치도 재료손상에 따라 영향을 받는 것을 알 수 있다. 반면에 나머지 고유치 $\Lambda_6 = \dots = \Lambda_{56} = 1$ 는 건전함을 알 수 있다. 부재의 모든 고유치는 0으로 진행하는데 반해 전체구조물의 고유치는 오직 한 개의 최소고유치만 0으로 진행한다.

즉, $D_E \rightarrow 1$ 에 따라 $\Lambda_{min} \rightarrow 0$ 로 된다. 다시 강조하자면, 오직 한 자유도만 특이화 되었다. 즉, 24번 부재의 수평자유도가 전체 구조물로부터 완전 분리를 의미한다. 나머지 4개의 고유치는 재료손상이 완전히 진행되었다라도 아직 건전성을 띠며 그 이유는 주변 연속요소들의 강성기여로 기인한다.

Fig. 4(b)는 Fig 4(a)의 그물망보다 한 요소에 4개의 내부요소를 더 만들어 조밀하게 하였다. 동일한 해석을 하였을 때, 2차원에서는 요소의 형상과 달리 요소의 크기는 부재강성행렬에 영향을 주지 않는다. 즉, $\mathbf{k}_{24} \approx \mathbf{k}_{96}$ 이다. 결과적으로 부재단계에서의 손상은 요소의 크기와는 상관이 없이 일정하였다. 즉, $D_k = const.$ 이다.

Fig. 6은 전체강성행렬의 최소고유치를 부재의 0이 아닌 최소고유치에 의해 아래로 유계한다. 여기서 n, m 은 최종 손상단계 그리고 m 번째 손상단계를 각각 나타내며, ρ 는 Rayleigh 지수이다. 이러한 관계는 각 유한요소에 저장된 변형에너지에 의해 쉽게 설명된다. 이러한 구체적인 항이 아니더라도, 진행성 손상은 전체강성행렬의 일계 수정항의 열로도 표현이 가능하다.

$$\lambda_{min}^{n-m} \leq \Lambda_{min}^{n-m} \leq \rho^{n-m} \leq \lambda_{max}^{n-m} \leq \Lambda_{max}^{n-m} \quad (17)$$

다시 손상부분과 건전부분으로의 분할에 대해 보면, 전체강성행렬의 분할인 \mathbf{K}_{11} 의 고유치들은 Fig. 7 에서처럼 부재강성행렬의 최소, 최대고유치로 유계된다. 전체행렬식의 손상은 24번 요소의 재료손상으로 인하여 4개의 주변요소들 17, 18, 23 그리고 24번 요소의 손상을 의미한다. 이 경우 약간 다른 유계를 나타내는데, 그 이유는 \mathbf{K}_{11} 가 인접 건전한 요소들의 부분적 건전성을 기여 받기 때문이다.

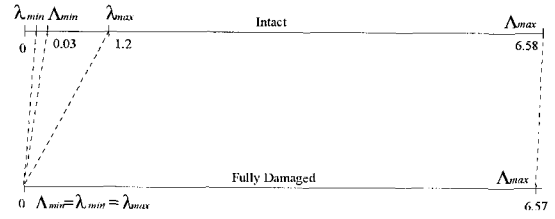


Fig. 6 Deterioration of eigenvalues of element and structure stiffness matrix from initial stage to n-th stage of eroding element No. 24

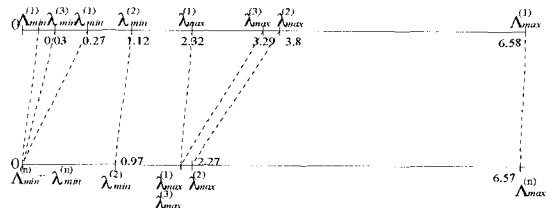


Fig. 7 Deterioration of eigenvalues of partition \mathbf{K}_{11} from initial stage to n-th stage of eroding element No. 24

$$\Lambda_{min}^{n-m} \leq \lambda_{min}^{n-m} \leq \rho^{n-m} \leq \lambda_{max}^{n-m} \leq \Lambda_{max}^{n-m} \quad (18)$$

3. 중간규모의 콘크리트 성능저하 해석

콘크리트 재료는 근본적으로 서로 다른 재료로 구성된 이질재료이다. 따라서 이들의 미세손상을 추적하기 위해서는 이질성의 영향이 잘 표현되는 중간규모 크기가 적절하다. 시멘트성 입자재료인 콘크리트는 골재입자, 굳은 매트릭스(모르타르) 그리고 공동으로 구성되어 있다. 그러나 각각의 모든 구성요소들을 모두 형태학적으로 표현하기가 어려우므로 중간규모 구조의 수치모형은 2가지 구성요소, 굽은 골재와 굳은 매트릭스가 모형화 되었다.

3.1 중간규모 콘크리트의 유한요소모델

매트릭스-골재의 대표체적요소는 Fig. 8 에서처럼 매트릭스에 채석골재를 임의적으로 위치하여 구성하였다. 이 대표체적요소의 크기는 100×100 mm이며 골재입자와 시멘트 매트릭스의 탄성강성비는 $E_a/E_m = 3$ 이다. 두 구성요소의 푸아송비는 동일하게 $\nu_a = \nu_m = 0.2$ 이다. 또한 이 구성요소들이 진행성 손상을 받는 동안 골재와 매트릭스는 선형탄성구간에 있다고 가정한다.

3.2 골재/매트릭스 복합체의 성능저하

골재/매트릭스 복합체의 손상을 고려하기 위해, 역학적인 성능저하는 전체 매트릭스의 균등한 손상 또는 전체 골재

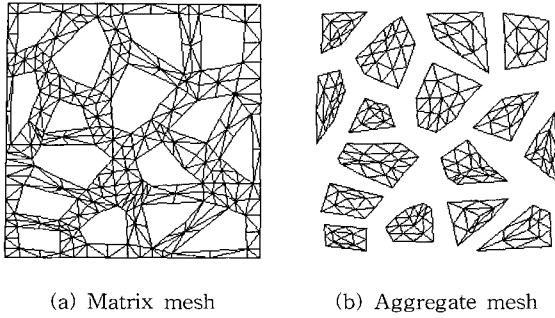


Fig. 8 Mesh layout for two-phase composite material

영역의 손상 등으로 가정한다. Fig. 9(a)에서는 정규화된 전체강성의 스펙트럼 특성의 형식으로 진행성 골재영역 손상을 나타내고 있다.

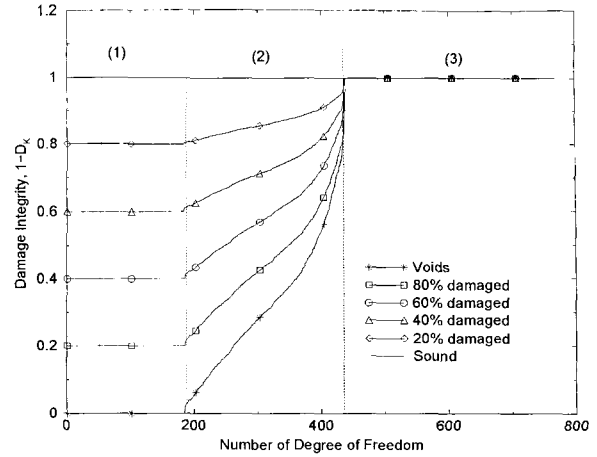
이 그림에서는 손상영역이 다음과 같이 나타난다. 즉, (가)골재 분할영역, (나)계면 분할영역 그리고 (다)매트릭스 분할영역. 영 고유치의 범위는 골재 강성의 손상된 분할 (K_{11})영역을 나타내며, 맨 왼쪽의 손상정도가 일정한 부분은 건전한 분할(K_{22})영역을 나타낸다. 건전한 분할과 손상된 분할영역의 사이에 이들의 결합항인 $K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$ 은 골재와 매트릭스사이의 계면(interface)을 의미한다. 결론적으로 '작은'골재손상이 초기강성에 계층적 혼란을 주면서 마침내 '큰' 복합체의 스펙트럼 특성에 변화를 준다는 사실은 다소 명백해 보인다. Fig. 9(b)에서는 정규화된 전체강성행렬에 진행성 매트릭스 손상이 스펙트럼 특성에 주는 영향을 보여주고 있다. 전체 769 자유도중 골재손상인 경우 모두 185 자유도가 특이화 되었고 반면에 매트릭스손상으로 333 자유도가 특이화 되었다.

3.3 2상 복합체의 동질화

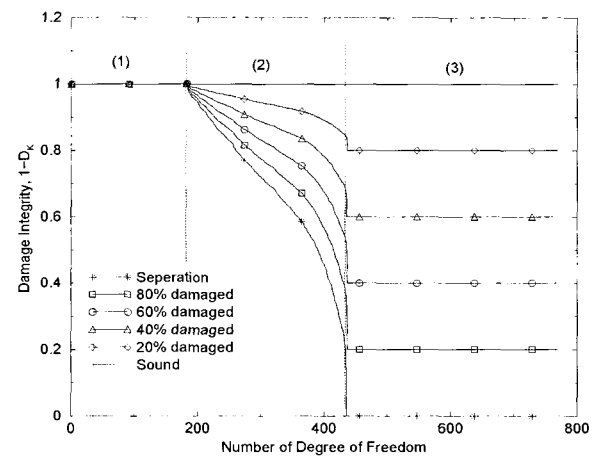
많은 수의 고유치가 대표체적요소의 건전 성손실에 대한 정보를 가지고 있을 때 중간 또는 최종단계의 재료손상에 대한 대표체적요소의 성능을 어떻게 특성화 할 수 있는지 알 수 없다.

따라서 스칼라 형식의 거시손상 스펙트럼을 구성할 수 있다면 중간규모의 복잡한 손상을 단순화 할 수 있다. 이러한 과정을 동질화(homogenization) 과정이라고 하며 유효강성으로 정의한다^{1-3,8,9}. 유사등방성, 유사동질성 복합체의 유효강성특성은 이 복합체가 외부하중을 받을 때 저장된 변형에너지에 의해 쉽게 정의된다. 구성요소의 재료가 성능저하를 받을 때 유효계수(effective moduli)의 감소는 손상진행 동안 하중전달경로의 변경에 대한 중요한 의미를 갖고 있다. 유효계수 접근방식은 개념적으로 감소된 변형 에너지 항을 기준으로 한다는 점에서 정규화된 고유치 해석과 기본적으로 동일하다.

선형탄성에서의 변분이론은 기본적인 상계와 하계를 제공



(a) Aggregate damage



(b) Matrix damage

Fig. 9 Structural integrity due to progressive damage in aggregate/matrix: (1) Aggregate region, (2) Interface region, (3) Matrix region

하며 각각 Reuss¹⁾와 Voigt¹⁾ 모델이다. 반면에 Hashin-Shtrikman의 탄성편광텐서³⁾(elastic polarization tensor)를 기준으로 임의상태의 기하형상을 가진 유사등방성, 유사동질성 다상재료에 매우 정확한 유계를 표현할 수 있다. 서로 다른 상의 재료계수가 극심한 차이를 보이지 않는다면 이 Hashin-Shtrikman(H-S) 유계는 유효계수를 예측하는데 있어 상당한 정확성을 보인다.

$$E_{(-)}^* \leq E^* \leq E_{(+)}^* \quad (19)$$

$$E_{(\pm)}^* = \frac{9K_{(\pm)}^* G_{(\pm)}^*}{3K_{(\pm)}^* + G_{(\pm)}^*} \quad (20)$$

$$\nu_{(\pm)}^* = \frac{3K_{(\pm)}^* - 2G_{(\pm)}^*}{2(3K_{(\pm)}^* + G_{(\pm)}^*)}$$

$$K_{(\pm)}^* = F[\mu_i, K_i, G_i] \quad (21)$$

$$G_{(\pm)}^* = F[\mu_i, K_i, G_i], i=1, 2$$

여기서, $E_{(-)}^*$, $E_{(+)}^*$ 는 유효탄성계수의 하계와 상계이며 μ_i 는 각 재료의 체적비이다. K_i, G_i 는 각각체적탄성계수, 전단탄성계수이다. 지수 1, 2는 각각 매트릭스와 골재 구성요소를 나타낸다. 다음은 Fig. 10에서처럼 두 구성요소로 된 대표체적요소를 동질화 하여 그 결과를 Hashin-Shtrikman 변분유계^{1,2)}에 비교하려한다. 이 예제의 경우 초기 건전한 복합체인 경우 유효탄성계수의 하계와 상계는 $E_{(-)}^* = 1.522$, $E_{(+)}^* = 1.645$ 이며, 이때 골재 구성요소의 골재체적비는 $\mu_2 = 0.413$ 이다.

3.4 골재/매트릭스 복합체의 탄성 손상 진행

보통 이질재료는 서로 다른 구성요소의 재료적 특성으로 인한 손상을 경험하게 된다. 즉, 서로 다른 골재와 매트릭스의 탄성계수 그리고 푸아송비이다. 이러한 불합치(mismatch)는 골재와 매트릭스사이의 계면에 응력 그리고 변형 집중현상을 일으키게 된다. 만약 이러한 이질재료가 유효탄성계수를 가진 재료로 동질화 된다면 이러한 계면상의 성능저하 또는 불합치는 제거될 것이다. 더 나아가서 이질재료의 평균하중-변위관계를 이용하여 손상된 복합체내에 저장된 변형에너지를 구하고 이를 유효탄성계수를 가진 동

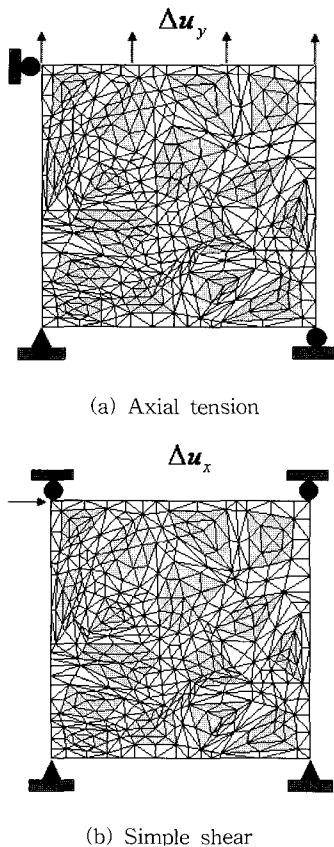
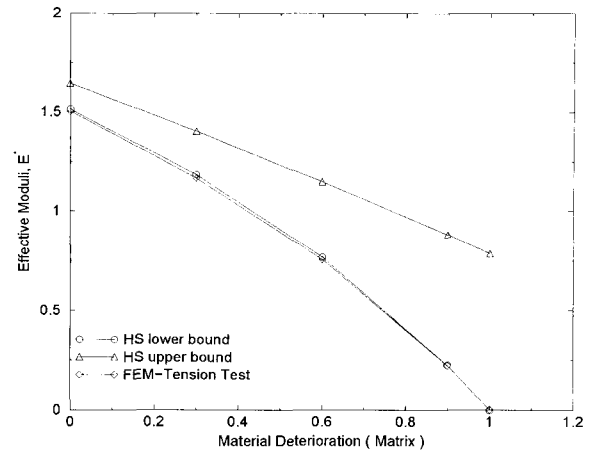
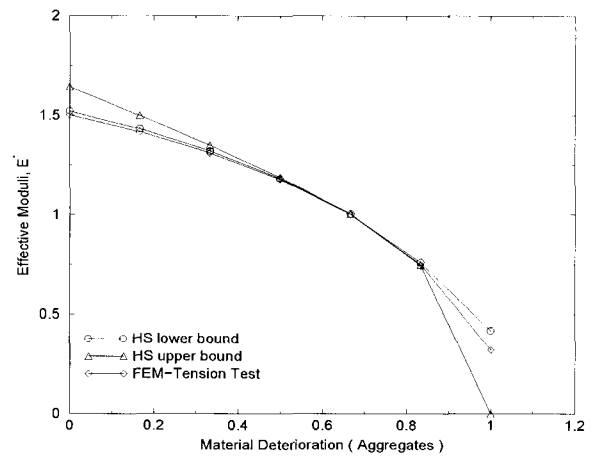


Fig. 10 Numerical evaluation of effective moduli, E and G



(a) Matrix damage



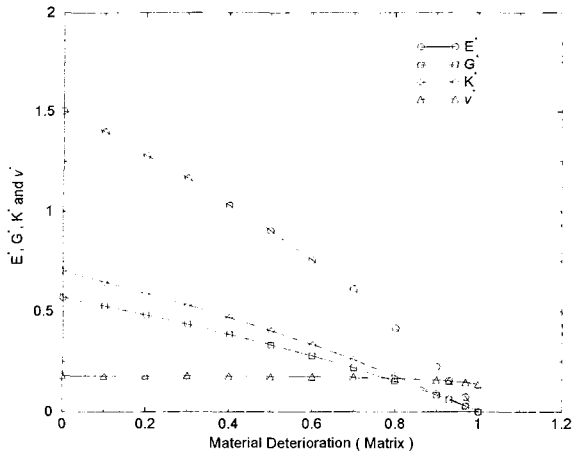
(b) Aggregate damage

Fig. 11 Reduction of effective moduli due to two degradation scenarios in composite

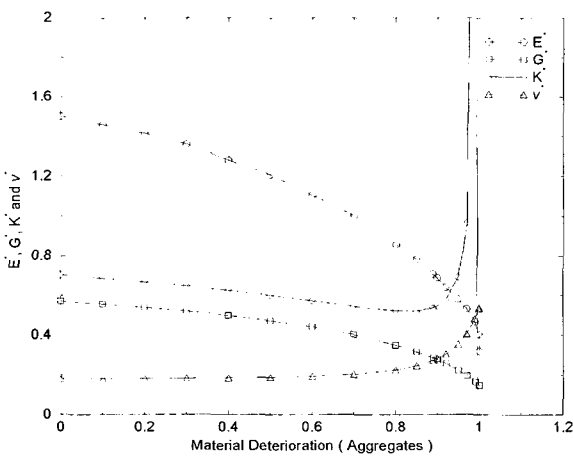
질재료의 손상과 비교하려 한다.

이를 위해 균등인장과 직접전단 실험을 수치적으로 Fig. 10의 대표체적요소를 이용하여 정량적으로 검사하려한다. 여기서 얻은 최종절점력을 유효계수로 환산하여 H-S 유계와 비교할 수 있다. Fig. 11(a)는 균등인장실험하의 매트릭스 손상에 대한 수치결과가 H-S 유계에서 그 하계와 근접하다는 것을 보여주고 있다.

실제에 응용하는 점에서는 H-S 상계는 현실적이지 못하다. 즉, 매트릭스 부분이 완전히 손상되었을 때 H-S의 상계는 전체하중전달능력을 감소시키지 않기 때문이다. 이러한 결과는 기초적인 고유모드가 손상진행을 지배한다는 것을 보여준다. Fig. 11(b)에서는 두 번째 시나리오, 즉 골재 부분이 점차적으로 손상을 받았을 경우, 또한 두 탄성계수 비 E_m/E_a 가 1로 근접할 때는 중간규모 구조의 응답은 중간손상단계에서 동질화된다. 중국적으로 완전손상을 받았을 때는 골재입자 대신에 공극을 가진 재료로 바뀌게 되며 공극주변에 응력집중과 부수적인 하중전달변화가 생기게



(a) Matrix damage



(b) Aggregate damage

Fig. 12 Reduction of effective properties K^* , G^* and ν^* due to two degradation scenarios in composite

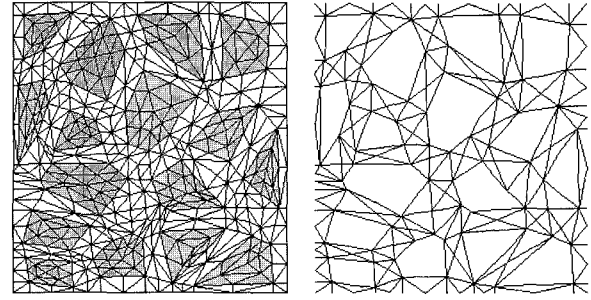
된다. Fig. 10의 직접인장 그리고 전단실험에서 얻어진 유효계수 K^* , G^* 그리고 ν^* 의 변화 또한 관심을 가질 필요가 있다.

Fig. 12에서는 골재성능저하에 경우, 그 손상정도가 80% 정도일 경우 즉, $D_E > 0.8$ 인 경우, 푸이송비가 거의 비압축성 거동에 가깝게 증가하였다. 그 후, 골재부분이 완전 손상되었을 경우 기존 복합체는 매우 큰 공동을 가진 스펀지같은 재료로 변화하면서 체적탄성계수가 갑자기 매우 높은 값으로 증가한다($K^* \rightarrow \infty$).

4. 계면 특성의 성능저하 해석

4.1 계면요소 모델

이 장에서는 매트릭스와 골재의 연관성을 그 사이에 계면요소를 넣어 모델화 하였다. 가장 간단한 부착계면요소



(a) Mesh layout

(b) Interface lines

Fig. 13 Interface element for matrix-aggregate bond, two-point Lobatto integration rule of lumping

는 진행성 부착상실로 인해 그 계면의 특성(수직강성과 접선강성의 손실)의 성능저하를 고려한다. 여기서는 마찰결합항을 고려하지 않았다. 두께가 0인 계면요소는 Fig. 13에 나타나있다. 계면의 기초적인 응력과 상대변위의 탄성구성관계를 이용하여 일반유한요소법의 과정을 따라 다음과 같이 정의한다.

$$t = E_o \cdot \Delta u, \text{ 여기서 } E_o = \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서, t 는 두 인력 구성분 t_t 와 t_n 그리고 그의 공액 상대변위 Δu 이다. E_o 는 수직 및 접선 구성분이 분리되어 있는 탄성행렬이다. 이 경우 계면요소의 탄성강성행렬은 표준 등매개변수 형식으로 다음과 같이 정의한다.

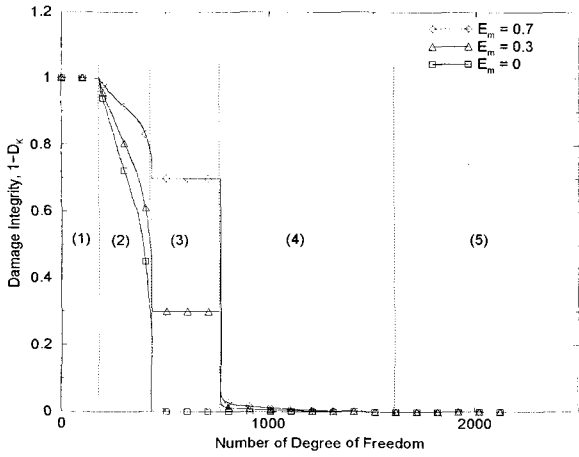
$$k_{damage} = b \int_{-1}^{+1} B^T E_{damage} B J d\xi \quad (23)$$

$$E_{damage} = [1 - D_E] \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

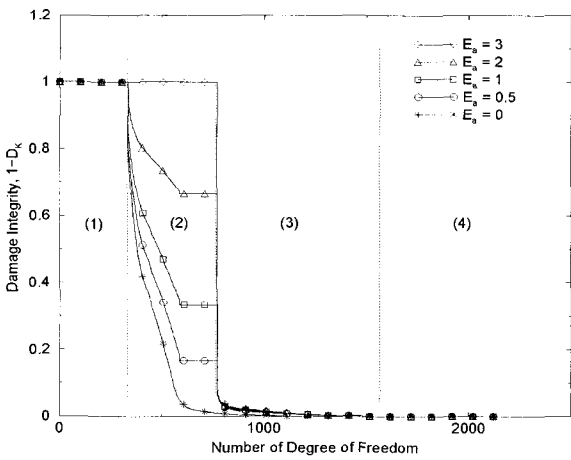
탄성계수인 E_t 와 E_n 는 수직 및 접선 계면강성이며 일반적인 탄성계수(FL^{-2})와는 차원이 FL^{-3} 으로 다르다. 4절점 계면요소의 경우 그림 13(b)에서처럼 강성적분체는 Lobatto(Newton-Cotes) 적분방법이 쓰이는데 그 이유는 강성행렬자체를 대각선화하며 의사계면응력(spurious interface stresses)을 감소시키기 위해서이다⁶⁾.

4.2 3상 복합체의 동질화

복합재료의 파손진행에는 대개 계면영역이 재료응답거동을 주로 지배하게 된다. 골재와 매트릭스의 계면들에 응력이 집중되어 초기손상을 야기시키며 점차적으로 골재영역보다는 매트릭스영역에 전파된다. 그러므로 3절에서 보여졌듯이 2상 복합체의 손상진행과정의 초기단계(부착 손상)를 추적하는데 계면영역이 중요한 의미를 갖게 된다. 두께



(a) Matrix degradation

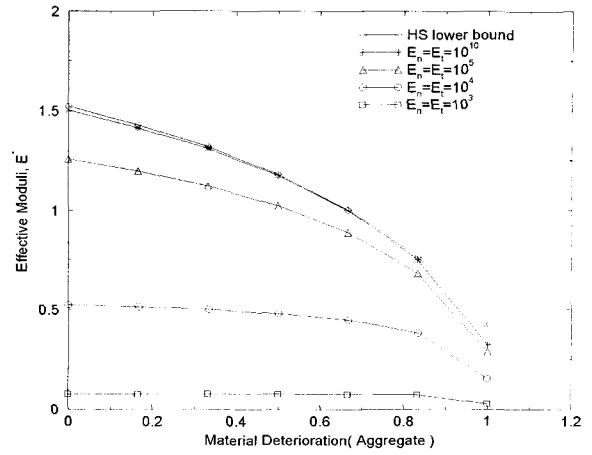


(b) Aggregate degradation

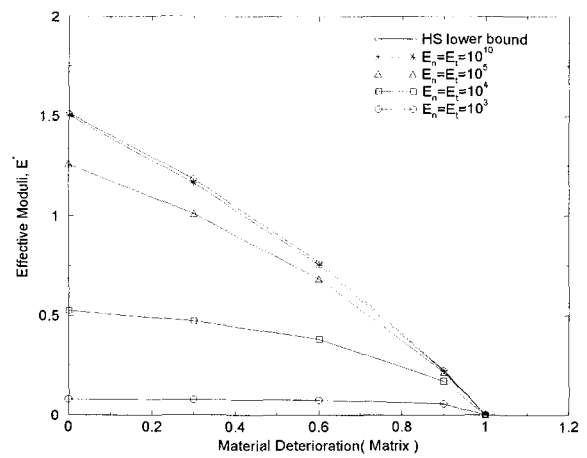
Fig. 14 Structural integrity, $1 - D_K$ due to (a)matrix, (b)aggregate degradation, $k_{tm} = k_{ss} = 10^2$

가 0 인 계면요소에서는 두 계면인력이 중요한 인자들인데, E_t 와 E_n 으로 정의되며 만약 이들 인자들이 주변 연속요소들의 탄성계수보다 상당히 크다면 완전부착연결 되었다는 것을 의미하며 표면인력들은 단순히 Cauchy정리에 의한 평형조건을 만족한다. 만약 이들 인자들이 주변 연속요소의 탄성계수보다 낮아질 경우는 약하게 부착되어있어 복합체의 성능저하를 표현할 수 있다. Fig. 13 에서는 계면요소를 가진 2상 복합체의 그물망을 보여주고 있다. $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ 크기의 2상 복합체는 골재-매트릭스 탄성계수 비 (E_a/E_m)가 3 이며 푸아송비는 각각 골재일 경우 $\nu_a = 0.1$ 이며 매트릭스의 경우 $\nu_m = 0.2$ 이다. 이때 초기 H-S 유계는 각각 하계, 상계일 경우 $E_{(-)}^* = 1.522$, $E_{(+)}^* = 1.645$ 이다. 또한 골재혼입률(volume fraction), $\mu_2 = 0.413$ 이다.

Fig. 13에서 약하게 부착연결된 경우($E_t = E_n = 10^2$)의 변형 후 모습을 보여주고 있다. 강하게 부착연결된 경우($E_t = E_n = 10^{10}$) 즉 3절에서의 연속요소만으로 2상 복합



(a) Aggregate damage



(b) Matrix damage

Fig. 15 Progressive damage of effective elastic modulus E due to interface deterioration

체의 경우와 비교하면 다음과 같은 4가지의 서로 다른 손상 영역을 정의할 수 있다. 즉, (가) 계면성능저하와 관련 없는 매트릭스 영역, (나) 계면성능저하와 관련 있는 매트릭스 영역, (다) 계면성능저하와 관련 없는 골재 영역, (라) 계면성능저하와 관련 있는 골재 영역 등이 있다. Fig. 14는 두 가지 손상시나리오 즉 골재와 매트릭스 손상의 스펙트럼 손상 특성에 대해 보여주고 있다. 모든 그래프들에서 골재와 계면의 조합손상이 상당히 큰 변형에너지의 손실을 보여주고 있다. 전반부의 손상 해석에 비교하면 Fig. 14(b)는 계면탄성계수의 성능저하는 대표체적요소의 손상에 가장 큰 영향을 줄을 알 수 있었다. Fig. 15의 유효탄성계수와 전단계수를 확인하면 좀 더 확인해진다.

6. 결 론

본 논문에서는 구성관계나 유한요소 범위에서의 성능저하를 스펙트럼 특성을 이용하여 새로운 손상 측정용 제시

하였다. 건전한 탄성강성에 각각 선조건화 또는 정규화는 일원기준강성(unitary reference stiffness)에서 성능저하의 기본 모드를 추출하여 스펙트럼 손상 측정을 정의하였다. 이러한 과정은 일순위 수정(rank-one update)의 과정과 유사하다는 점을 알았다.

따라서 유한요소에서 “작은” 규모에서의 재료건전도 $1 - D_E$ 로 “큰” 규모의 구조적 건전도 $1 - D_K$ 를 예측할 수 있었다. 기본적인 1-D, 2-D 예제와 2-D 2상복합체의 예제가 각 구성요소별 성능저하에 따른 손상측정에 관하여 제시되었다.

여기서 2상복합체의 전체손상진행에 대해 계면손상 그리고 모드전환 등이 매우 중요함을 보여주었으며 이질성 복합체의 동질화의 단점을 또한 보여주었다. Hashin-Shtrikman 유계의 하계는 진행성 손상을 받는 경우, 양의 건전도의 매우 근접한 예상치를 표현한다는 사실 또한 알 수 있었다. 마지막으로 강조하고 싶은 점은 여기에 소개된 관찰은 탄성 스칼라 손상의 가장 기본적인 개념을 이용하였고 복잡한 이력을 고려하지 않았다는 점이다. 따라서 이력의 영향을 크게 받는 비선형해석으로의 일반화가 필요하다. 그러나 그러한 부가적인 복잡성은 본 논문의 주요 결론을 기본적으로 변경할 수 없다.

감사의 글

이 연구는 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행 한 2004년도 건설핵심기술연구개발사업(과제번호: 04핵심기술C02-02)의 연구비 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

1. Hashin, Z. and Shtrikman, S., “Variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase material”, *J. Mech Phys. Solids*, Vol.11, 1962, pp.127~140.
2. Hashin, Z., “Analysis of composite materials-a survey”, *J. of the Earth and Planetary Interiors*, Vol.21, 1980, pp.359~370.
3. Hill, R., “A self-consistent mechanics of composite materials”, *J. Mech Phys. Solids*, Vol.13, 1965, pp.213~222.
4. Krajcinovic, D., “Damage Mechanics,” *Mechanics and Materials*, Vol.8, 1999, pp.213~222.
5. Lemaitre, J., *Damage Mechanics*, Springer-Verlag, New York, NY, 1987.
6. Willam, K., Rhee, I., and Beylkin, G., “Multi-resolution analysis of elastic degradation in heterogeneous materials”, *Meccanica*, Vol.36, No.1, 2001, pp.131~150.
7. Strang, G., *Linear algebra and its applications*, Academic Press, New York, NY, 1976.
8. Watt, J. P. and O’Connell, R. J., “An experimental investigation of the Hashin-Shtrikman bounds on the two phase aggregate elastic properties”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.31, No.20, 1994, pp.2835~2865.
9. Willis, J. R., “Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites”, *J. Mech Phys. Solids*, Vol.25, 1977, pp.185~202.
10. Wilkinson, J. H., *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp.1~439.

요 약

재료구성관계의 범위에서의 강성 성능저하의 스펙트럼 특성을 기본 유한요소법을 이용하여 개별 유한요소와 그의 조합행렬에 대한 스펙트럼 분석을 상호 비교하여 수치적인 의미를 확인하고자 한다. 본 논문의 주 관심부분은 탄성 강성특성의 저하로 인한 콘크리트 재료의 손상정도를 다양한 스펙트럼 특성인 최소고유치의 변화, 유효계수의 변화 등의 시나리오를 가지고 해의 유일성 여부, 특이성의 표현 여부 그리고 변분유계와의 근접여부 등을 관찰하였다. 1차원 및 2차원 예제가 제시되었으며 강성이 서로 다른 혼입재를 가진 2상복합체의 형식으로 콘크리트의 골재, 매트릭스를 표현하고 상호연관성 및 기하학적 영향을 고려하였다. 더불어 2차원 탄성계면요소를 이용하여 골재와 매트릭스 사이에 존재하는 약한 고리인 계면을 묘사하고 이들 계면의 탄성계수의 성능저하로 인한 전체 구조계의 영향 등을 분석, 비교하였다.

핵심용어 : 비균질성, 유한요소법, 스펙트럼 특성, 탄성손상, 중간규모크기