

## 프랙탈 보간에 의한 진원도 모델링

윤문철\*, 김병탁<sup>+</sup>, 진도훈<sup>++</sup>

(논문접수일 2006. 1. 6, 심사완료일 2006. 2. 23)

### Roundness Modelling by Fractal Interpolation

Moon-Chul Yoon\*, Byung-Tak Kim<sup>+</sup>, Do-Hun Chin<sup>++</sup>

#### Abstract

There are many modelling methods using theoretical and experimental data. Recently, fractal interpolation methods have been widely used to estimate and analyze various data. Due to the chaotic nature of dynamic roundness profile data in roundness some desirable method must be used for the analysis which is natural to time series data. Fractal analysis used in this paper is within the scope of the fractal interpolation and fractal dimension. Also, two methods for computing the fractal dimension has been introduced which can obtain the dimension of typical dynamic roundness profile data according to the number of data points in which the fixed data are generally lower than 200 data points. This fractal analysis result shows a possible prediction of roundness profile that has some different roundness profile in round shape operation.

**Key Words** : Fractal dimension(프랙탈 차원), Fractal interpolation(프랙탈 보간), Roundness profile(진원도 형상), Round shape operation(등근형상 가공)

## 1. 서론

진원도 형상을 실제 형상과 같도록 모델링하고 예측하는 것은 등근형상 가공을 해석하고 분석하는데 매우 중요하다. 기존 연구<sup>(1)</sup>에는 주로 진동모델을 이용하여 모델링하거나 선형 보간법이나 시계열 모델링을 이용하여 진원도 모델을 분석하였다. 즉 진원도 모델을 정의하여 이 식에서 계산되는

여러 상수나 변수의 거동을 통하여 진원도의 특성을 분석할 수 있었다. 이 진동 모델을 이용한 전체적인 형상모델은 비교적 정확하게 모델링하여 형상을 구할 수 있었으나 동적성질을 부여하기에는 진원도 형상 신호에 동적성분을 인위적으로 포함하여 주어야 실제 진원도 형상과 비슷하게 나타낼 수 있었다. 또한 그 모델은 데이터 정보를 어느 정도 충분히 갖고 있어야 한다. 즉, 데이터 수가 많아야 신호를 충분

\* 부경대학교 기계공학부 (mcyoon@pknu.ac.kr)  
주소: 608-739 부산시 남구 용당동 산 100번지  
+ 부경대학교 기계공학부  
++ 부경대학교 대학원

히 나타낼 수 있다. 이와 같은 점을 동시에 보완하여 모델링하는 의미에서 본 연구에서는 적은 정보의 데이터를 이용하여 진원도를 모델링하는 목적으로 프랙탈 보간법을 이용하고자 시도하였다. 또한 프랙탈 보간법에서 얻을 수 있는 프랙탈 상수를 이용하여 진원도 형상을 분석하는 방법을 연구하였다. 대부분의 정적인 진원도 형상의 신호는 Euclidean 선으로 표현할 수 있다. 그러나 대부분의 진원도 형상은 다른 동적인 특이한 성질도 포함하여 표현할 필요가 있으며 이런 성질은 Euclidean 선으로 표현하는 것 보다는 프랙탈 보간으로 진원도를 표현하는 것이 보다 복잡한 진원도 특성을 표현할 수 있다고 볼 수 있다. 그 이유는 Euclidean 보간과 프랙탈 보간의 차이에서 알 수 있듯이 전자는 특성 방정식을 정의하여 이를 분석하는 방법에 의한 것이고 후자는 랜덤(random)성질을 이용한 순환 알고리즘을 이용한 방법이 있지만 전자는 스무싱(smoothing) 효과 때문에 급격히 변화하는 진원도 형상을 나타낼 수 없는 단점이 있다. 이런 점에서 프랙탈 방법은 진원도를 보다 잘 표현할 수 있고 형상의 충분한 정보를 가질 수 있다. 특히 동근형상 가공의 동적인 성질이 많이 포함된 진원도 형상의 경우 프랙탈 예측이 더 적절하다고 할 수 있다. 최근에 프랙탈을 적용한 연구가 수행되고 있으나 대부분 프랙탈 차원에 대한 분석으로 수행되고 있다. 또한 프랙탈에 의한 국내 연구는 가공분야에서 그다지 수행 되어오지 않고 있으나 최근 몇몇 연구가 수행되고 있다<sup>(2)</sup>. 본 연구에서는 프랙탈 해석을 진원도 형상 모델링에 적용하여 보간과 차원해석을 통하여 진원도의 형상 특성을 분석하고자 하였다. 형상 데이터 중 적은 수의 진원도 데이터를 이용하여 전 구간에 걸쳐 진원도 형상을 랜덤 순환 보간 방법으로 모델링하는 방법을 수행하였고 이 결과는 차후 프랙탈 보간을 응용한 진원도 형상 측정기에 적용할 수 있고 프랙탈 분석 차원 해석 등 독특한 해석을 통하여 진원도 형상 특성을 다양하게 분석할 수 있다.

## 2. 이론적 고찰

### 2.1 진원도 예측 모델링

진원도 모델로 비교적 잘 표현되고 있는 Yoon 및 Chin 이 제안한 형상모델은<sup>(1)</sup> 다음과 같이 정리가 된다.

가공기계의 스피들 축의 회전반경 및 공작물 진동 진폭이 각각  $R_o$ ,  $R_w$ 이고 스피들 축의 공전 주파수를  $f_o$ , 공작물의 선형 진동주파수를  $f_w$ 라 하면 각각의 조건에서 생성되는 진원도 형상은 Fig. 1의 결과와 같이 나타난다. 즉, 참고문헌 (1)의 이론 모델을 이용하여 2개짜리에서 6개짜리를 계산한

로브형상은 아래 그림과 같다. 따라서 이 결과는 향후 프랙탈 모델에 의한 진원도 형상 결과와 비교 분석하는데 이용할 수 있다.

### 2.2 프랙탈 보간에 의한 진원도 모델링

프랙탈 진원도 모델에서는 진원도의 형상데이터를 보간하여 진원도를 예측하고 또 이때 구해지는 프랙탈 차원은 숫자로 표현할 수 있으며 보통 일반적인 신호분석의 경우 Fig. 4에서 나타나듯이 1.3~1.8의 범위에 있는 것으로 알려져 있다<sup>(3)</sup>. 프랙탈 차원은 프랙탈 보간과 더불어 데이터에서 계산할 수 있고 프랙탈 차원을 구하는 방법으로는 여러 가지가 있다. 그 중 가장 많이 사용되는 방법이 BCM(box

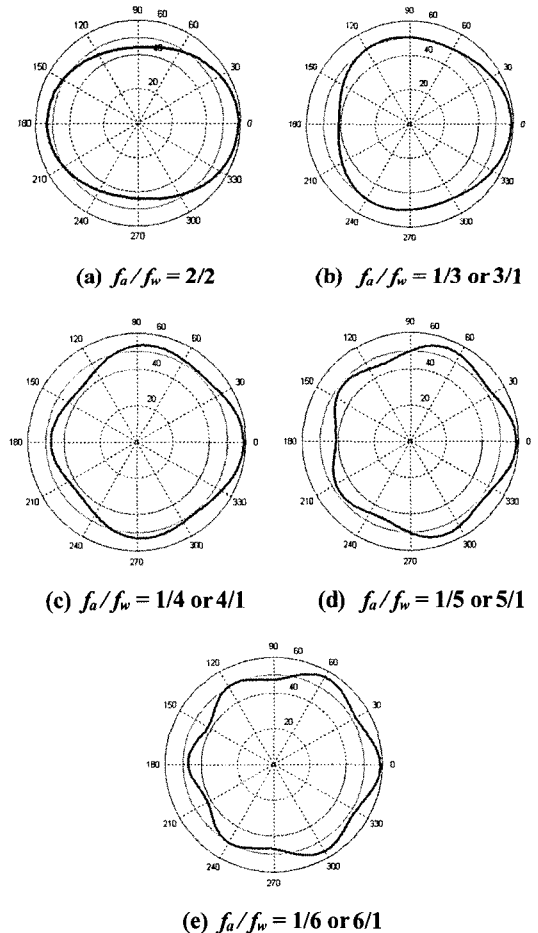


Fig. 1 Predicted lobe profile of the round shape ranging 2 to 6 lobe for  $R_o/R_w = 3/3$

counting method)<sup>(3)</sup> 이고 이 방법은  $L/2n$  크기의 박스 요소로 나누어 데이터를 나누어 표현하는 것이고 여기서  $L$ 은 길이 치수이고 정수  $n = 0, 1, 2, \dots$  이다<sup>(3)</sup>. 박스수와 박스크기의 역수관계를 도형으로 나타낼 수 있고 이 프랙탈 도형 영역의 구배(slope)를 프랙탈 차원이라고 하며 이 방법은 간단하기 때문에 가장 널리 사용되고 있다. 그러나 이 방법은 균일하게 배열되지 못한 실험 데이터에는 잘 나타내지 못하는 단점이 있다. 또 다른 방법은 Strahle<sup>(4)</sup>이 제안한 방법으로 데이터를 고정점(fixed point)과 이웃 고정점 구간에서 진원도 데이터의 목표점(target point)을 분류하여 보간이 되도록 한 방법이다. 고정점은 보간하려는 여러 구간에서의 데이터의 끝을 나타내며 목표점들은 이들 고정점사이에서 생성되는 신호를 나타내고 결국 진원도 형상을 나타내는 형상 보간 데이터라고 할 수 있다. 2개의 고정점 사이에서 각각의 데이터 그룹으로 나뉘지며 각 그룹에서 수축전사(contraction mapping)에 의하여 데이터가 보간 생성되게 되어 전체의 진원도 형상을 얻게 된다.

임의의 좌표를 직교좌표에서 위와 같이 전사하면 이런 전사를 수축전사라 하는데 이를 식 (1)과 같이 나타 낼 수 있고 이 경우 상수  $s$ 는 0과 1 사이의 상수여야 한다.

$$D(W_n(x), W_n(y)) \leq sD(x, y) \tag{1}$$

여기서  $D$ 는 변환된 좌표값이고  $s$ 는 수축상수(contractive factor) 라고 하고 이 좌표 변환에 의한  $w_n$ 은 다음과 같이 매트릭스 형태로 나타낼 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$w_n \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_n \\ f_n \end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서  $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ 은  $n$  번째 구간에서의 관련 변환 상수이고 프랙탈 보간은 식 (2)와 같이 유사형상의 변환(transformation) 이라고 할 수 있다.  $x$ - $y$  평면에서  $y$  축에 평행한 선은 변환 후  $y$  축에 평행하게 되고  $L$ 이  $y$  축에 평행한 조각의 길이라고 하면 다음과 같은 식이 성립된다.

$$|d_n| = \frac{w_n(L)}{L} \tag{3}$$

여기서  $d_n$ 은 수직방향의 특성을 나타내는 스케일 상수(scale factor) 라고 하며 수축형태의 전사에 의한 프랙탈 차원의 구배  $w_n$ 은 다음 식을 만족한다<sup>(3)</sup>.

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D_F-1} = 1. \tag{4}$$

식 (4) 에서  $a_n$ 과  $d_n$ 을 모든 구간에서 결정한 후 프랙탈 차원을 구할 수 있다. 이 방법은 구간에서 형상 데이터가 균등하게 배열이 되어있어야 하며 정확한 계산을 위해서는 많은 형상 데이터를 필요로 한다는 단점이 있지만 본 연구에서는 이 방법과 이후에 나오는 새로운 방법에 의한 고정점을 균일하게 배열하여 프랙탈 차원 상수 값을 계산하여 비교 분석 하였다.

### 2.3 진원도 모델의 프랙탈 차원

진원도 형상을 자세히 살펴보면 굴곡(flexion)과 신장(extension)부분의 조합으로 구성되어 있으며 두 점 사이에서 1 사이클의 신호모양이 형성된다. 이 사이클에서의 프랙탈 차원은 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>(2,3,7)</sup>.

$$NFD_F = \frac{\log(L)}{\log(d_i)} \tag{5}$$

여기서  $L$ 은 진원도 형상을 나타내는 곡선의 길이이고  $d_i$ 는 첫 번째 점과 다음 점 사이 거리(diameter)이다. 진원도 형상은 이런 각각의 데이터 집합이 순서적으로 결합 구성된 것으로 볼 수 있고 이 진원도 형상 곡선의 전체 길이는 한 개의 집합을 구성하는 2 점 사이의 거리를 합하여 구할 수 있다.

$$L = \sum dist[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})] \tag{6}$$

여기서  $dist$ 는 연속적으로 연결되는 두 점사이의 거리이다. 진원도 형상의 첫 번째 점과  $i$  번째 점 사이거리를  $d_i$  라고 하면

$$d_i = \max([(x_1, y_1), (x_i, y_i)]) \tag{7}$$

이고, 진원도 형상의 길이는 간격의 크기와 스케일링 크기에 좌우되며 간격이 작을수록 길이는 길어진다. 일정한 간격을 얻기 위해서 진원도 형상은 평균 간격으로 정규화(normalized) 시키는 것이 적절하다. 진원도 형상의 간격 크기는 연속되는 두 연속 점의 평균 거리라 할 수 있고 이 경우 프랙탈 차원은 다음과 같이 주어진다.

$$NFD_F = \frac{\log(L/a)}{\log(d_i/a)} \tag{8}$$

즉, 식 (9)와 같이 표현된다.

$$NFD_F = \frac{\log(n)}{\log(n) + \log(d_i/L)} \tag{9}$$

여기서  $n=L/a$ 이고  $n$ 은 형상데이터 점의 수를 나타내며  $a$ 는 평균 간격의 크기이다. 1개의 사이클 집합에서 원하는 진원도 형상의 랜덤 보간으로 진원도 형상 목표점을 구하게 되어있고 아래로 혹은 위로 향하는 방향성을 지정한 진원도 형상을 스케일 상수를 조절하여 만들 수 있다. 이 스케일링 상수를 잘못 선택하면 실제 진원도 형상이 갖고 있는 성질을 무시하고 다른 성질의 진원도 형상을 생성할 수가 있다. 그러나 이런 현상은 고정점의 수를 늘려서 목적하는 진원도 형상에 유사하게 접근을 할 수 있다.

### 3. 진원도 모델링 분석 및 고찰

#### 3.1 다 개수 로브 진원도 형상

Fig. 2는 Fig. 1의 진원도 모델을 프랙탈 보간을 이용하여 보간한 모델링 결과를 보여 주고 있다. Fig. 2 (a)는 두개짜리 로브의 진원도 형상을 보여 주고 있다. 이때의 스케일 상수  $d_n$ 의 수치에 따라 여러 가지 형상이 나타났으나 그림의 경우는 동적인 성분이 약간 많이 포함된 경우로 스케일상수가 0.35로 모델링한 결과이다. Fig. 2 (b)-(e)는 각각 3개 - 6개짜리 로브의 진원도 형상을 보여 주고 있으며 그때의 경우도 각각 스케일 상수  $d_n$ 의 수치에 따라 여러 가지 형상이 나타났으며 그림의 경우는 동적인 성분이 약간 포함된 스케일 상수가 0.35인 경우의 프랙탈 모델링 결과이다. 일반적으로 2-3개의 진원도 형상이 실험적으로 가장 많이 관찰되고 있다<sup>(1)</sup>. Fig. 2 (a), (b)와 같이 나타나고 있으며 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 진원도 형상의 전체의 형상 데이터수가 2000 개이고 본 연구에서는 Fig. 1의 형상에서 고정점을 100 개 정도 선택한 데이터를 이용하여 전체 진원도 형상을 프랙탈 보간으로 계산하여 나타낸 결과이다. Fig. 2의 결과는 Fig. 1의 각 경우에서 형상 데이터 고정점을 100 개로 하여 프랙탈 보간한 결과이며 비교적 모델링 형상이 잘 일치하고 있으며 동적인 성분을 포함시킬 수 있음을 알 수 있다.

#### 3.2 스케일링 상수에 따른 진원도 형상

Fig. 3 (a)-(i) 스케일링 상수를 0.05 - 0.45 까지 증가시키면서 3개짜리 로브의 경우 각각 진원도 형상을 구한 결과이고 스케일링 상수가 작아지면 일종의 필터링 효과가 나타나는 것을 알 수 있고 스케일링 상수를 증가 시키면 랜덤 성분 즉 동적성분이 많이 추가 되는 것을 알 수 있다. 따라서 진원도 측정 실험결과는 이런 점에서 진원도 형상의 특성차가 있게 되며 각 경우의 프랙탈 상수 값을 구하면 Fig. 4의 결과

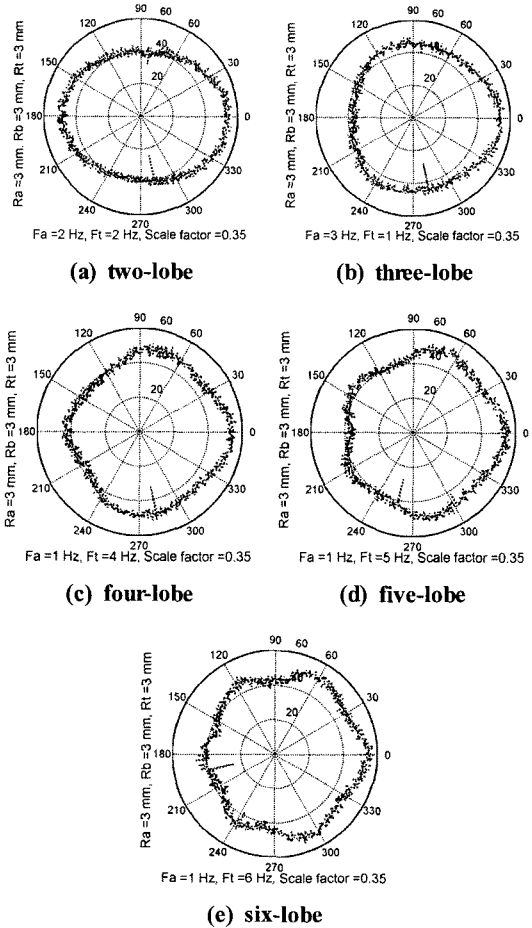


Fig. 2 Estimated roundness model for the profile with  $d_n = 0.35$  in round shape operation

와 같다. 각 스케일링 상수에서 계산되는 진원도 모델의 프랙탈 차원 수치 값은 본 연구에서 제시한 두 방법의 경우 대개 1.3에서 1.9 사이의 값을 갖고 있음을 알 수 있다. 여기에 사용된 진원도 형상 데이터는 연구논문(1)의 진원도 모델의 데이터를 이용하였고 그 계산 모델 결과는 Fig. 1의 그림과 같다. 모델링한 형상의 데이터를 샘플링 하여 100 개의 고정 데이터를 이용하였고 이 고정 데이터를 이용하여 식 (2)의 프랙탈 변환을 이용하여 전체 진원도 형상을 랜덤 생성 원리에 따라 목표점의 진원도 형상을 예측하여 나타내었다.

스케일 상수  $d_n$ 에 의하여 진원도의 변화가 심하게 나타났으며 진동 진폭이 작은 로브형상의 경우 스케일 상수가 커지면 오히려 로브의 수가 잘 나타나지 않게 됨을 알 수 있다. 즉  $R_o$  나  $R_w$  등의 진동진폭이 작게 나타나는 진원도의 경우

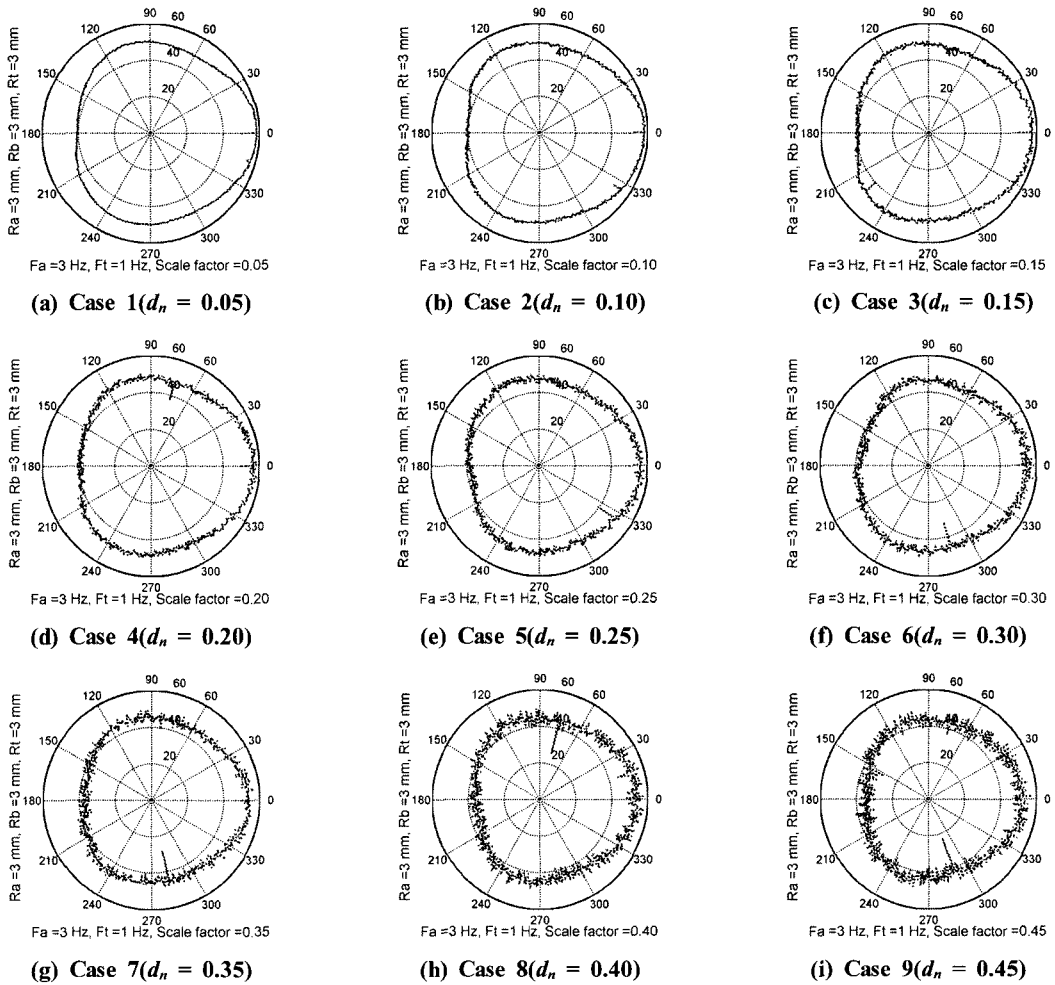


Fig. 3 Predicted roundness model by fractal interpolation according to scale factor  $d_n$

는 로브 형상을 잘 보이게 하기 위해서는 스케일링 상수를 줄여 모델링 하는 것이 필요하다는 것을 알 수 있다. 스케일 상수가 크면 진원도 형상에 진폭이 큰 잡음의 성질을 포함시킬 수 있음을 Fig. 3에서 알 수 있었다.

Fig. 4는 스케일 상수  $d_n$ 을 0.05에서 0.45까지 0.05씩 증가시킨 9가지 경우 진원도 형상에서 두 가지 방법의 프랙탈 차원 상수 값을 식 (4)를 이용한 일반적인 프랙탈 상수  $FD_F$  및 본 연구에서 이용한 식 (9)를 이용하여 계산한 프랙탈 차원수  $NFD_F$ 를 구하여 놓은 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이  $FD_F$  및  $NFD_F$ 의 두 경우 그 값이 증가하고 있는 것을 나타내고 있다. 두 경우 모두 스케일 상수가 증가된 형태의 진원도 형상에서는 프랙탈 차원의 수치가 증가하고 있음을 알

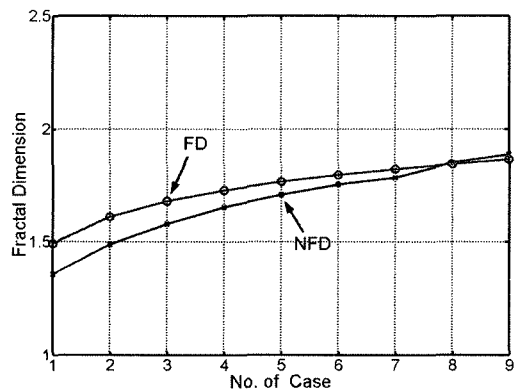


Fig. 4 Fractal dimension of each case for  $F_x$

수 있다. Fig. 2의 각 로브형상의 프랙탈 차원 수치 값은 Fig. 4의 case 7의 경우이고 약 1.75 - 1.8 사이 값이 되는 것을 알 수 있다. Fig. 3의 각 프랙탈 상수는 Fig. 4에서 각각 9가지의 경우에서 그 계산된 값을 확인할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서 진원도 형상의 기본 고정 데이터를 이용하여 프랙탈 보간에 의한 진원도 모델링법을 제안 하였다. 또한 프랙탈 차원과 진원도 형상과의 특성을 연구하였고 그 연구 결과는 다음과 같다.

- (1) 매우 적은 수의 데이터를 이용하여 진원도 모델을 적절히 예측해 낼 수 있었고 이 프랙탈 보간을 이용하면 진원도의 저주파 및 고주파를 부여하여 진원도 특성을 나타낼 수 있었다.
- (2) 계산으로 얻은 진원도 파형과 프랙탈 보간에 의한 진원도 형상은 비교적 잘 일치하고 있었고 특히 스케일링 변수를 조절하여 노이즈 효과 및 필터링 효과를 부여하여 적절한 진원도 형상을 예측할 수 있었다.
- (3) 본 연구에서 프랙탈 차원 해석도 수행되었다. 수행 결과 동근형상에 심한 진동 성분이 있는 경우는 스케일 상수를 크게하여 진원도를 적절히 표현할 수 있었고 이 경우 프랙탈 차원 수치는 증가하였다.
- (4) 진원도의 형상에 고주파 형상 특성이 포함 될수록 프랙탈 차원은 증가하는 것으로 판명되었다. 향후 이 프랙탈 차원 값의 분석을 통하여 진원도 모델의 천이지점의 판단에 대한 연구가 필요할 것으로 사료된다.

#### 참고 문헌

- (1) Chin, D. H., Yoon, M. C. and Sim, S. B., 2005, "Roundness modeling in BTA deep hole drilling," *Precision Engineering*, Vol. 29, pp. 176~188.
- (2) Kang, M. C., Kim, J. S. and Kim, K. H., 2005, "Fractal dimension analysis of machined surface depending on coated tool wear," *Surface & coating technology*, Vol. 193, pp. 259~265.
- (3) Barnsley, M. F., 1993, *Fractals everywhere*, Academic Press Inc.
- (4) Marvasti, M. A. and Strahle, W. C., 1995, "Fractal geometry analysis of turbulent data," *Signal processing*, Vol. 41, pp. 191~201.
- (5) Shah, E. N., Reddy, N. P. and Rothschild, B. M., 2005, "Fractal analysis of acceleration signals from patients with CPPD, rheumatoid arthritis, and spondyloarthropathy of the finger joint," *Computer methods and programs in biomedicine*, Vol. 77, pp. 233~239.
- (6) Yoon, M. C., Cho, H. D., Kim, S. K. and Kim, J. S., 2000, "A Study on the Characteristics of Machined Profile Modeling in Cylindrical Shape Machining," *KSMTE*, Vol. 9, No. 3, pp. 55~61.
- (7) Hadjileontiadis, L. J., Douka, E. and Trochidis, A., 2005, "Fractal dimension analysis for crack identification in beam structures," *MSSP*, Vol. 19, pp. 659~674.
- (8) Jeong, J. S., Chin, D. H. and Yoon, M. C., 2006, "End milling Force Estimation by Fractal Interpolation," *J. of KSMPE*, Vol. 5, No. 1, pp. 7~12.
- (9) Mistakidis, E. S., 1997, "Fractal geometry in structural analysis problems: A variational formulation for fractured bodies with non-monotone interface conditions," *Chaos, solutions & fractals*, Vol. 8, No. 2, pp. 269~285.