

일정체적 단순지지 변단면 기둥의 정·동적 안정해석

Static and Dynamic Stability Analyses of Simple Tapered Columns with Constant Volume

이병구* · 김석기**

Lee, Byoung Koo · Kim, Suk Ki

Abstract

This study deals with the static and dynamic stability analyses of simple tapered columns with constant volume. The cross-sections of column taper are the regular polygons whose depths are varied with the parabolic functional fashion. The hinged-hinged end constraint is chosen as the boundary condition of the column. The non-dimensional ordinary differential equation governing free vibrations of such column subjected to an axial load is derived and solved numerically. From numerical results, the relationships between natural frequencies and section ratios are obtained, from which the configurations of dynamic optimal shapes of columns and the strongest columns are extracted.

Keywords : constant volume, taper column, regular polygon cross-section, dynamic optimal column, strongest column

요 지

이 논문은 단순지지된 변단면 기둥의 정적, 동적 안정해석에 관한 연구이다. 이 연구에서 기둥의 체적과 지간길이는 일정하다. 기둥의 단면은 정다각형 단면이고 단면깊이의 변화는 포물선형으로 채택하였다. 압축하중을 받는 이러한 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 무차원으로 유도하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형 및 좌굴하중을 산정하였다. 단면비와 고유진동수 및 좌굴하중의 관계를 분석하여 동적 최적단면비, 최적 고유진동수 및 최강기둥의 단면비 및 좌굴하중을 얻었다.

핵심용어 : 일정체적, 변단면 기둥, 정다각형 단면, 동적 최적 기둥, 최강기둥

1. 서 론

기둥은 보, 평판 등과 더불어 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이다. 압축하중이 작용하는 기둥에서 최대 하중능력 즉 좌굴하중을 산출하는 문제는 기둥의 정적 안정해석에서 매우 중요한 해석단계이다. 기둥의 동적 안정성을 해석하기 위해서는 기둥의 고유한 특성 중에 하나인 고유진동수를 산출하는 것은 무엇보다 먼저 선행되어야 할 해석단계이다. 이러한 관점에서 기둥의 정적, 동적 안정성을 확보하기 위하여 기둥의 최대 좌굴하중 및 최대 고유진동수를 산정하는 것은 매우 중요한 연구과제이다(Haftka and Grudal, 1990).

이러한 문제와 관련된 연구들은 많은 문헌들에서 찾아볼 수 있다. 먼저 보기둥의 동적 안정과 관련된 문헌을 고찰하면 다음과 같다. Niordson(1965)은 자유진동하는 보의 최적 단면형상에 관하여 연구하였다. Kamat와 Simites(1973; 1975)는 유한변위법에 의하여 동적 최적보의 고유진동수를 산출하였으며, 전단변형과 회전관성이 동적 최적보의 고유진

동수에 미치는 영향을 고찰하였다. Gupta(1985)는 선형 변단면 보의 고유진동수를 산출하였다. 이 등(2005)은 자유단에 집중질량을 갖는 Beck 기둥의 안정성 해석에 관한 연구를 하였다. 다음은 기둥의 정적 안정과 관련된 문헌에 대하여 고찰한다. Taylor(1967)는 최강기둥의 형상에 대하여 연구하였다. Wilson과 Holloway(1971)는 최강기둥과 원호형 아치의 정적 안정에 관한 실험적 연구를 하였다. Lee와 Oh(2000)는 Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 단순지지 변단면 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동을 해석하였다. Lee 등(2002)은 양단고정 변단면 기둥의 최강 단면비와 최강 좌굴하중을 산출하였다. Lee 등(2005)은 전단변형효과를 고려한 선형 변단면 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동을 해석하였고 실험적으로 후좌굴 거동을 검증하였다.

이 연구는 일정체적 단순지지 변단면 기둥의 정적, 동적 안정해석을 연구목적으로 한다. 기둥의 단면은 정다각형이고, 단면깊이는 포물선형으로 변화하는 변단면을 채택하였다. 압축하중이 작용하는 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수, 진동형 및 좌굴

*정희원 · 원광대학교 공학부 토목환경도시공학전공 교수(E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr)

**정희원 · 단국대학교 공학부 토목환경공학전공 교수(E-mail: skim@danook.ac.kr)

하중을 산정하였다. 수치해석의 결과를 분석하여 동적 최적 기둥의 단면비와 고유진동수를 산정하였다. 또한 최강기둥의 단면비 및 좌굴하중을 산출하였다.

이 논문에서 사용한 동적 최적 기둥과 최강기둥의 학술용어를 정의하면 다음과 같다(Niordson, 1965; Taylor, 1967).

- 동적 최적 기둥: 일정조건에서 가장 큰 제1고유진동수를 갖는 기둥
- 최강기둥: 일정조건에서 가장 큰 좌굴 하중을 갖는 기둥 위의 정의에서 일정조건은 정다각형 단면의 일정체적과 일정 지간길이를 갖는 변단면 기둥을 조건으로 한다.

2. 일정체적 변단면 기둥

그림 1(a)는 정다각형 단면의 예를 나타낸다. 그림 1(b)에 기둥의 축 좌표 x 의 변화에 따른 단면깊이 h 의 변화를 나타내었다. 이 그림에서 A , I 는 x 에서 h 에 대응되는 변화 단면적 및 변단면 2차모멘트를 나타낸다. 좌측지점($x=0$)에서 $h=h_a$ 이고 우측지점($x=l$)에서 이다. 이 연구에서 모든 기둥은 일정체적을 갖기 때문에 그림 1(a)에 나타난 바와 같이 h_a , h_b , h 는 정다각형의 변수에 따라서 변화하지만 기둥의 축 좌표 x 에서 단면적 A 는 모두 같다. 단면깊이 h 를 함수식으로 나타내기 위하여 무차원 단면비 r 를 다음 식 (1)과 같이 정의한다.

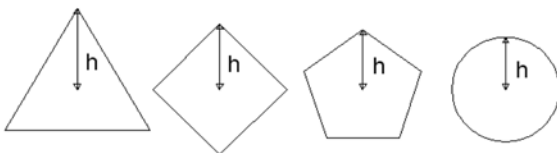
$$r = \frac{h_b}{h_a} \quad (1)$$

그림 1(a)에 나타난 단면깊이 h 를 갖는 정 m 각형의 A , I 는 다음과 같이 구할 수 있다(Lee and Oh, 2000).

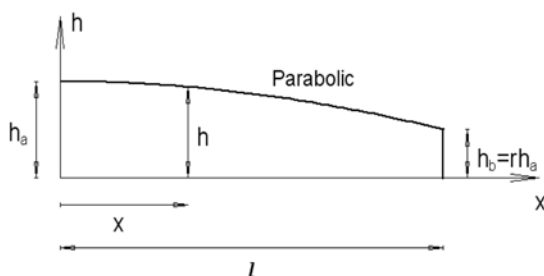
$$A = m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) h^2 \quad (2)$$

$$I = \frac{m}{12} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{m}\right) \left[3 + \tan^2\left(\frac{\pi}{m}\right)\right] h^4 \quad (3)$$

여기서 m 은 정다각형의 변수이고 $m \geq 3$ 인 정수이다. m 이 ∞ 로 수렴하면 위의 두 식은 원형 단면의 단면적과 단면 2차모멘트로 수렴한다. 식 (3)의 단면 2차모멘트는 정다각형 단면의



(a) Regular polygon cross-sections



(b) Variation of taper depth h

그림 1. (a)정다각형단면 (b)단면깊이변화

도심을 통과하는 모든 축에 대하여 주축이 된다.

그림 1(b)에 나타난 정다각형의 단면깊이 h 의 변화식을 정의한다. h 의 변화식으로는 직선, 포물선, 정현 등 다양한 함수식이 가능하지만 이 연구에서는 다음과 같은 포물선 식을 채택한다.

$$h = h_a \left[(r-1) \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right], 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

변단면 기둥의 체적 V 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = \int_0^l A dx = m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \alpha h_a^2 l \quad (5.1)$$

$$\alpha = (3r^2 + 4r + 8)/15 \quad (5.2)$$

3. 수학적 모형

그림 2는 좌굴하중 B 보다 작은 압축하중 P 를 받고 있는 단순지지 기둥을 나타내고 있다. 이 그림에서 A , I 는 2절에서 정의된 식 (2), (3)의 A , I 이다. 기둥이 좌굴하면 안정성을 잃기 때문에 이 연구에서 모든 P 는 B 보다 작다. 점선은 정적 상태의 기둥이고 실선은 자유진동하는 기둥의 진동형의 예를 나타낸다. 자유진동을 조화진동으로 나타내면 진동형 $W(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$W(x, t) = w(x) \sin(\omega_i t) \quad (6)$$

여기서 $w(x)$ 는 자유진동의 진폭이며 x 만의 함수이고 ω_i 는 고유진동수(ω_i/s), i 는 모드 번호, t 는 시간이다.

압축하중 P 를 받는 기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식 (7)과 같다(Timoshenko et al, 1974).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

여기서 $W=W(x, t)$ 이고 E 는 탄성계수, ρ 는 질량밀도이다.

위의 식 (7)에 식 (6)을 대입하고 전개하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + 2EI \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3} + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - \rho A \omega_i^2 w = 0 \quad (8)$$

여기서 $w=w(x)$ 이다.

기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원 미분방정식으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (9)$$

$$\eta = \frac{w}{l} \quad (10)$$

$$P = \frac{P l^2}{EI_e} \quad (11)$$

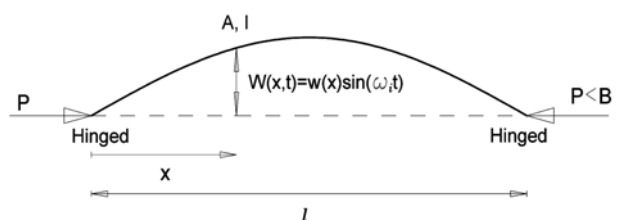


그림 2. 단순지지 기둥의 진동형의 예

$$C_i = w_i l^2 \sqrt{\frac{\rho A_e}{EI_e}} \quad (12)$$

여기서 ξ , η 는 축 좌표 x 및 진폭 w 를 시간길이 l 로 정규화한 변수이다. p , C_i 는 무차원 하중변수, 무차원 고유진동수이다. 식 (11), (12)에서 A_e , I_e 는 체적이 V , 시간길이인 원형 단면을 갖는 등단면 기둥의 단면적 및 단면2차모멘트이다. 이들 A_e , I_e 는 V 와 l 을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_e = \frac{V}{l} \quad (13)$$

$$I_e = \frac{V^2}{4\pi l^2} \quad (14)$$

따라서 위의 식 (13), (14)를 식 (11), (12)에 대입하고 정리하면 식 (11), (12)는, $p = 4\pi P l^2 / (EV^2)$, $C_i = 2w_i \sqrt{\pi P l^5} / (EV)$ 로 표현할 수도 있다.

위의 식들을 이용하면 단면이 정다각형이고 일정체적이 V 이며 압축하중 P 를 받는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도할 수 있다. 먼저, 식 (3)으로부터 dI/dx , d^2I/dx^2 를 구한다. 다음, 이 식들과 식 (2)를 식 (8)에 대입하고 마지막으로 식 (9)~(12)를 이용하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = \alpha_1 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + (\alpha_2 + \alpha_2 p) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 \alpha_4 \eta \quad (15.1)$$

$$\alpha_1 = -\frac{16\xi}{\xi^2 + d_1} \quad (15.2)$$

$$\alpha_2 = -\frac{8(\xi^2 + d_1)}{(\xi^2 + d_1)^2} \quad (15.3)$$

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha^2 d_1^4 d_2}{(\xi^2 + d_1)^4} \quad (15.4)$$

$$\alpha_4 = -\frac{\alpha d_1^2 d_2}{(\xi^2 + d_1)^2} \quad (15.5)$$

위의 식에서 계수 d_1 , d_2 는 다음 식과 같다.

$$d_1 = \frac{1}{r-1} \quad (16.1)$$

$$d_2 = \frac{m \tan(\pi/m)}{\pi[1 + \tan^2(\pi/m)/3]} \quad (16.2)$$

이 연구에서 기둥의 지점조건은 단순지지로 국한한다. 회전지점($x=0$ 및 $x=l$)에서 변위 w 및 휨 모멘트 $EI(d^2w/dx^2)$ 는 0이므로 식 (9), (10)을 이용하면 다음과 같은 회전지점($\xi=0$ 및 $\xi=1$)에서 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\eta=0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0 \quad (18)$$

4. 수치해석 예 및 토의

이상에서 일정체적 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식과 경계조건을 유도하였으며, 적당한 수치해석 방법을 도입하면 이 상미분방정식을 풀 수 있다. 진동형 η 를 산출하기 위한 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법

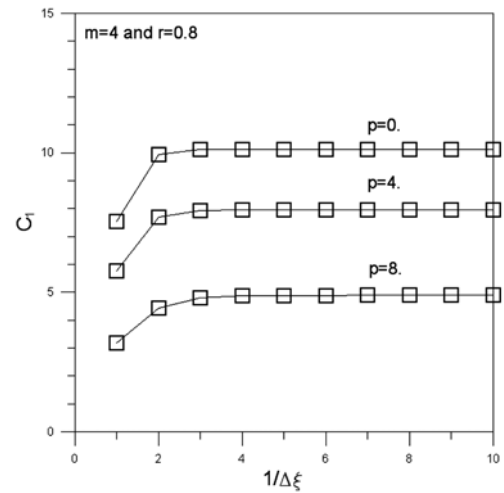


그림 3. 수렴해석

(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하였고 미분방정식의 고유치 C_i 의 산출은 Regula-Falsi법(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하였다. 이와 같은 수치해석 방법은 이미 여러 문헌들(Lee *et al.*, 2006)에서 그 유용성이 입증된 바 있다.

수치해석 예를 실행하기 전에 수렴해석을 실시하여 Runge-Kutta법에서 필요한 적당한 단계길이 $\Delta\xi$ 를 산정하였다. 그림 3은 제1고유진동수 C_1 에 대한 수렴해석 결과를 나타낸 그림이다. 이 그림에 수치해석에 이용한 기둥의 체적을 표시하였다. 이 그림으로부터 $1/\Delta\xi$ 가 4이상이면 즉 $\Delta\xi$ 가 $1/4$ 이하이면 C_1 은 충분한 정도로 수렴되는 것을 있다. 이 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\xi=50$ 로 하였으며 이 경우에 C_1 는 유효숫자 3자리의 정도를 갖는다.

본 연구의 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 SAP 2000의 C_i 값을 표 1에서 비교하였다. SAP 2000의 적용에서는 보요소를 사용하였고 유한요소의 개수는 50으로 하였다. 두 결과는 매우 우수하게 접근하여 본 연구의 이론과 수치해석 방법의 타당성을 입증할 수 있다.

구조물의 건전성 평가에서 제1고유진동수는 가장 중요한 평가지수 중에 하나이다. 이 연구의 목적은 앞에서 정의한 동적 최적 기둥을 산정하는 것이므로 이후의 수치해석 예에서 C_i 는 C_1 값 하나만을 산출하였다.

그림 4는 압축하중이 작용하지 않는 경우($p=1$)에 정다각형 변수의 변화에 따른 C_i 과 r 사이의 관계를 나타낸 곡선을

표 1. 본 연구 및 문헌의 C_i 값 비교*

i	자료 출처	무차원 고유진동수, C_i			
		m=3	m=4	m=5	원형
1	본 연구	10.38	9.656	9.515	9.436
	SAP 2000	10.36	9.698	9.597	9.429
2	본 연구	42.23	39.30	38.73	38.40
	SAP 2000	42.47	39.15	38.54	38.98
3	본 연구	94.55	87.99	86.71	85.99
	SAP 2000	94.73	88.48	87.52	86.43
4	본 연구	167.5	155.9	153.6	152.3
	SAP 2000	166.5	156.7	152.9	151.7

* $p=0$, $r=0.5$

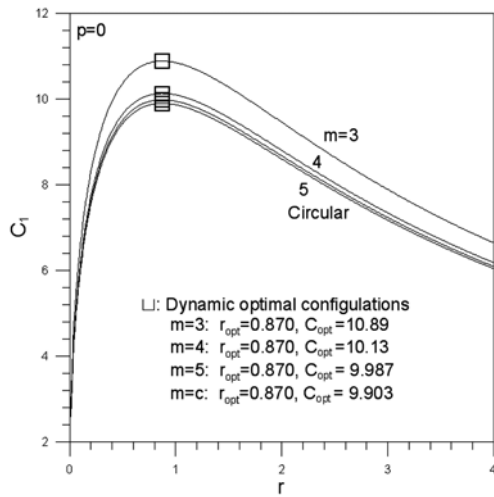


그림 4. r - C_1 곡선($p=0$)

나타낸다. r 이 증가함에 따라 C_1 은 증가하다 \square 로 표시한 곳에서 C_1 의 최대값을 보인 후에 다시 감소한다. 이 그림에서 \square 로 표시한 값이 최적 단면비 r_{opt} 가 되며 이 때의 C_1 값이 최적 고유진동수 C_{opt} 가 된다. $m=3$ 인 경우에 $r_{opt}=0.870$, $C_{opt}=10.89$ 이다. 이 그림 상에 m 값 변화에 따른 동적 최적 단면의 (r_{opt} , C_{opt})를 나타내었다. r_{opt} 는 m 값에 상관없이 모두 0.870을 보이고 있다. C_{opt} 는 $m=3$ (정삼각형 단면)에서 가장 크고 $m=\infty$ (원형 단면)에서 가장 작다. 따라서 자유진동에 대하여 가장 큰 고유진동수를 갖는 가장 강인한 단면은 정삼각형 단면이며 원형 단면과 비교하여 $1.100(=10.89/9.903)$ 배이므로 원형 단면보다 약 10.0% 더 큰 C_1 값을 갖는다. C_1 은 C_{opt} 이상의 값을 가질 수 없기 때문에 $m=3$ 의 $C_{opt}=10.89$ 가 가장 큰 무차원 제1고유진동수가 되며 그 이상의 C_1 값은 존재하지 않는다.

그림 5는 $m=3$ 일 때 하중단계별($p=0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 10$) r - C_1 곡선을 나타낸다. 하중단계별의 모든 곡선들은 그림 4($p=0$)와 마찬가지로 r 이 증가함에 따라서 C_1 은 증가하다가 C_1 의 최대값을 보인 후에 다시 감소한다. 각각의 곡선은 $C_1=0$ 이 되는 r 축 상에 r 의 최소값 r_{min} 과 최대값 r_{max} 값을 갖고 있다. 예로서 $p=3$ 인 경우에 점선으로 표시한 r - C_1 곡선은 r 축 상에 \blacktriangle , \blacksquare 로 표시한 $r_{min}=0.173$ 및 $r_{max}=3.404$ 의 값을 갖는다. 압축하중이 작용하면 고유진동수는 감소하고

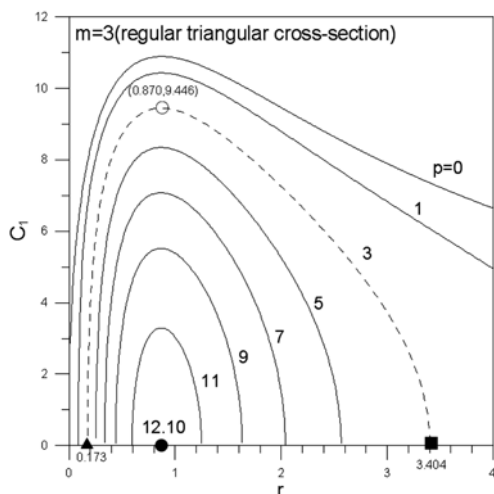


그림 5. 하중 단계별 r - C_1

표 2. 하중단계별 r_{min} , r_{max} 및 C_{opt}

• $m=3$ (정삼각형 단면)

p	r_{min}	r_{max}	C_{opt}
0	0.000	-	10.89
1	0.087	-	10.43
3	0.173	3.404	9.446
5	0.251	2.565	8.346
7	0.335	2.038	7.075
9	0.438	1.632	5.519
11	0.594	1.246	3.293
$p_{opt}=12.10$	$r_{opt}=0.870$		0.000

• $m=4$ (정사각형 단면)

p	r_{min}	r_{max}	C_{opt}
0	0.000	-	10.13
1	0.095	-	9.639
3	0.191	3.160	8.564
5	0.282	2.339	7.332
7	0.387	1.810	5.845
9	0.536	1.369	3.815
$p_{opt}=10.48$	$r_{opt}=0.870$		0.000

• $m=5$ (정오각형 단면)

p	r_{min}	r_{max}	C_{opt}
0	0.000	-	9.987
1	0.097	-	9.484
3	0.195	3.111	8.389
5	0.289	2.294	7.127
7	0.400	1.763	5.585
9	0.563	1.309	3.403
$p_{opt}=10.18$	$r_{opt}=0.870$		0.000

• $m=\infty$ (원형 단면)

p	r_{min}	r_{max}	C_{opt}
0	0.000	-	9.903
1	0.098	-	9.396
3	0.198	3.083	8.289
5	0.294	2.267	7.009
7	0.407	1.734	5.434
9	0.581	1.272	3.149
$p_{opt}=10.18$	$r_{opt}=0.870$		0.000

고유진동수가 0이 될 때 구조물은 좌굴하므로 $m=3$ 인 기둥에 $p=3$ 이 작용하면 $r=0.173$ 과 $r=3.404$ 에서 좌굴한다. 따라서 $r \leq 0.173$ 및 $r \geq 3.404$ 의 범위에서 기둥은 좌굴하고, $0.173 < r < 3.404$ 의 범위에서 기둥은 좌굴하지 않고 안정상태를 유지한다. 안정상태인 $0.173 < r < 3.404$ 의 범위에서 C_1 값은 증가하다 \circ 로 표시한 $r_{opt}=0.870$ 에서 C_1 의 최대값인 $C_{opt}=9.446$ 의 값을 갖는다. 이 그림에서 하중의 크기에 상관없이 모든 하중단계별 $r_{opt}=0.870$ 임을 알 수 있다. 하중이 증가함에 따라서 C_{opt} 값은 감소하며 $p=12.10$ 일 때 \bullet 로 표시한 $r_{opt}=0.870$ 에서 $C_{opt}=0$ 이 된다. 따라서 $p=12.10$ 이 기둥이 좌굴하지 않는 가장 큰 압축하중 p_{opt} 이다. 정삼각형 단면은

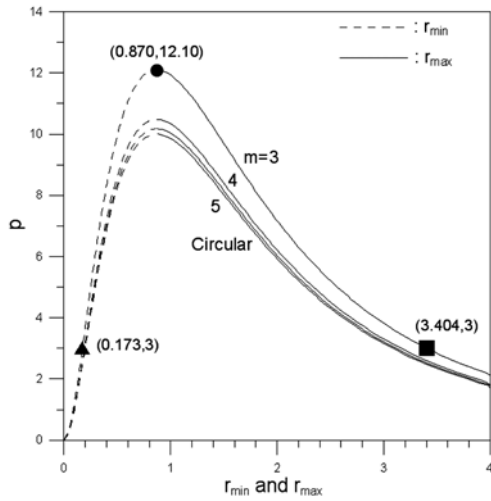


그림 6. γ_{\min} 과 γ_{\max} - p 곡선

다른 정다각형 단면들에 비하여 좌굴에 더 강인하기 때문에 일정체적 단순지지 변단면 기둥에서 $p_{opt}=12.10$ 이상의 압축 하중을 지지할 수는 없다. 하중이 증가함에 따라서 ▲, ■로 표시한 γ_{\min} , γ_{\max} 의 간격은 점점 축소되어 $p=12.10$ 에서 ▲, ■는 ●로 표시한 $r_{opt}(=\gamma_{\min}=\gamma_{\max})=0.870$ 에서 서로 만나고 이 때 $C_{opt}=0$ 이 되는 p 가 p_{opt} 이다.

표 2에 $m=3, 4, 5, \infty$ (원형 단면)의 하중단계별 γ_{\min} , γ_{\max} 및 C_{opt} 와 r_{opt} 및 p_{opt} 값을 수록하였다. r_{opt} 는 m 값에 상관없이 $C_{opt}=0$ 으로 일정하고 $C_{opt}=0$ 이 되는 최대 하중능력 p_{opt} 를 알 수 있다.

그림 6은 표 2에서 p 와 γ_{\min} , γ_{\max} 의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 점선은 γ_{\min} 을 나타내고 실선은 γ_{\max} 를 나타낸다. 이 그림에서 $m=3$ 인 경우에 그림 5에서 이미 나타낸바 있는 ▲, ■, ●의 대응 값들을 동일한 기호로 표시하였다. $p=3$ 에서 $\gamma_{\min}=0.173$, $\gamma_{\max}=3.404$ 이므로 $0.173 < r < 3.404$ 가 안정영역이다. 따라서 $m=3$ 인 기둥에 $p=3$ 인 하중이 작용하면 $r \leq 0.173$, $r \geq 3.404$ 인 r 의 범위에서 기둥은 좌굴한다. 이 그림으로부터 모든 $r_{opt}=0.870$ 이고 $m=3$ 의 $p_{opt}=12.10$ 임을 알 수 있다. m 의 변화에 따른 p_{opt} 는 m 값이 증가함에 따라서 감소한다.

그림 7은 $m=3, p=3$ 에 대한 진동형의 예를 나타낸다. r 값의 변화에 따라서 진동형이 크게 변화하는 것을 알 수 있다. 이 그림으로부터 최대 진폭의 위치를 알 수 있어 기둥 설계의 동적 자료를 제공해 준다.

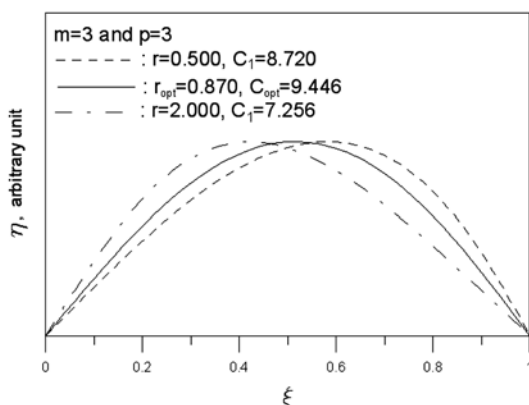


그림 7. 진동형의 예

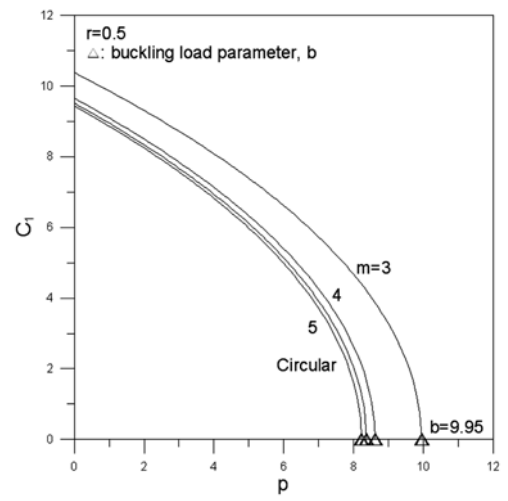


그림 8. p - C_1 곡선

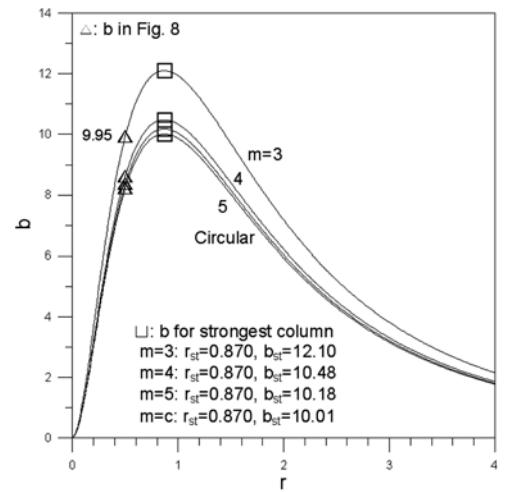


그림 9. r - b 곡선

그림 8은 $r=0.5$ 일 때 p - C_1 곡선을 나타낸다. 하중이 증가함에 따라서 C_1 은 감소하고 $C_1=0$ 되는 하중에서 기둥은 좌굴한다. 이 그림의 p 의 축($C_1=0$)상에 무차원 좌굴하중계수 b 를 ▲로 표시하였다. $m=3$ 에서 $b=9.95$ 이다. 여기서 $b=9.95$ 는 식 (11)로부터 다음 식과 같이 정의된다.

$$b = \frac{BL^2}{EI_c} \quad (19)$$

그림 9는 r - b 곡선을 나타낸다. 이 그림에 그림 8에서 ▲로 나타낸 $r=0.5$ 의 b 값을 나타내었다. r 값이 증가함에 따라서 b 값은 증가하고 □로 최대값을 보인 후에 다시 감소한다. 따라서 □로 표시된 b_{st} 값 이상의 압축하중을 받을 수 없기 때문에 이 때의 값이 최강기둥의 r 값 r_{st} 가 되며 m 값에 상관없이 모두 $r_{st}=0.870$ 이 된다. 이 그림에 (r_{st} , b_{st})를 나타내었다. 이 그림에 나타낸 (r_{st} , b_{st})는 그림 6에 ●로 나타낸 (r_{opt} , p_{opt})와 동일하다. 즉 정적, 동적의 최적 단면비는 같다.

5. 결 론

이 논문은 일정체적을 갖고 단순지지된 변단면 기둥의 정적, 동적 안정해석에 관한 연구이다. 기둥은 정다각형 단면이며 단면깊이는 포물선으로 채택하였다. 압축하중을 받는 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 무차

원으로 유도하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형 및 좌굴하중을 산정하였다. 단면비와 고유진동수 및 좌굴하중의 관계를 분석하여 다음의 결론을 얻었다.

1. 수치적분에서 단계길이를 1/4이하로 하면 무차원 고유진동수는 충분한 정도로 수렴한다.
2. 동적 안정영역인 하중단계별 단면비의 범위를 제시하였다.
3. 정적, 동적으로 가장 강인한 단면은 정삼각형 단면이다.
4. 동적 최적 단면비 및 동적 최적 고유 진동수를 제시하였다.
5. 최강기둥의 단면비 및 좌굴하중을 제시하였다.
6. 동적 최적 단면비 및 최강기둥의 단면 비는 $r_{opt}=r_{st}=0.870$ 으로 같고 정다 각형 변수 m 에 상관없이 모두 같다.
7. 일정체적을 갖는 변단면 기둥의 최대 무차원 제1고유진동수는 정삼각형 단면에서 $C_{opt}=10.89$ 이다.
8. 일정체적을 갖는 변단면 기둥의 최대 압축능력은 정삼각형 단면에서 $p_{opt}=b_{st}=12.10$ 이다.

이상과 같은 본 연구의 결과를 이용하면 일정체적을 갖는 단순지지 변단면 기둥의 정적, 동적으로 가장 강인한 최적 단면을 산정할 수 있다.

감사의 글

이 연구는 2006년도 원광대학교 교내 연구비 지원을 받았습니다. 제1저자는 대학 당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

이병구, 오상진, 이태은, 강희중(2005) 자유단 집중질량 및 스프링을 갖는 변단면 Beck 기둥의 안정 해석. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제25권 제6A호, pp. 1157-1162.

Bokaian, A. (1988) Natural frequencies of beams under compressive axial load. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49-65.

Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969) *Applied Numerical Method*. John Wiley & Sons, Inc., USA.

Haftka, R.T., Grudal, Z., and Kamat, M.P. (1990) *Element of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publisher.

Kamat, M.P. and Simites, G.J. (1973) Optimal beam frequencies by the finite element displacement method. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 9, pp. 415-429.

Kamat, M.P. and Simites, G.J. (1975) Effect of shear deformations and rotatory inertia on optimum beam frequencies. *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 9, pp. 51-62.

Kupta, A.K. (1985) Vibration of tapered beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, pp. 1244-1247.

Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Ahn, D.S. (2005) Elastica and buckling loads of shear deformable tapered columns. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 317-335.

Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume. *Journal of Sound and Vibration* (accepted and in press).

Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2507-2518.

Lee, B.K., Oh, S.J., and Li, G. (2002) Buckling loads of columns regular polygon cross-section with constant volume and clamped ends. *Electronic Journal of Structural Engineering*, Vol. 2, pp. 76-84.

Niordson, F.I. (1965) On the optimal design of a vibrating beam. *Quarterly Applied Mathematics*, Vol. 23, pp. 47-53.

Taylor, J.E. (1967) The strongest column-An energy approach, *Journal of Applied Mechanics*. ASME, Vol. 29, pp. 159-164.

Timoshenko, S.P., Young, D.H., and Weaver, W. (1974) *Vibration Problems in Engineering*, Wiley, New York, USA.

Wilson, J.F. and Holloway, D.M. (1971) Stability experiments on the strongest columns and circular arches. *Experimental Mechanics*, Vol. 11, pp. 303-308.

(접수일:2006.1.9/심사일:2006.3.4/심사완료일:2006.3.4)