

# 변단면 압출추진코와 ILM 교량 상부단면의 상호작용 해석

## Interaction Analysis between Tapered Sectional Launching Nose and Superstructure Section of ILM Concrete Bridge

이 환 우† 정 두 회\* 안 태 욱\*\*

Lee, Hwan-Woo Jung, Du-Hwoe Ahn, Tae-Wook

(논문접수일 : 2005년 3월 25일 ; 심사종료일 : 2006년 5월 26일)

### 요 지

ILM(incremental launching method) 교량공법은 품질확보에 효과적인 프리스트레스트 콘크리트 교량공법으로 인정받고 있다. 이 공법에 의해 시공되는 교량의 상부단면은 시공 중에 지간의 중앙부와 지점부에 일시적이거나 모두 위치하게 된다. 따라서 단면들은 자중에 의해 발생하는 최대 정 모멘트와 최대 부 모멘트, 그리고 최대 전단력을 모두 경험하게 되는 구조적 특성을 가지고 있다. 한편, 압출하는 동안 발생하는 높은 일시적 응력을 최소화하기 위해 일반적으로 압출추진코가 이용되고 있다. 그리고 상부단면에 발생하는 이 일시적인 응력의 크기는 압출추진코의 특성에 따라 달라진다. 본 연구에서는 압출 중 상부단면에 발생하는 단면력의 크기를 쉽고, 빠르게 검토할 수 있는 해석식을 유도하였다. 개발된 해석식에서 고려할 수 있는 매개변수로는 압출추진코와 상부단면과의 지간 길이비와 중량비 그리고 강성비를 택하였다. 특히, 개발된 해석식에서는 변단면인 압출추진코의 단면형상과 다이어램을 고려할 수 있다. 또한, 설계변수들에 대한 민감도 해석을 통하여 압출추진코와 상부단면의 상호작용에 미치는 매개변수들의 영향을 분석하였다.

**핵심용어** : ILM공법, 압출추진코-상부단면 상호작용, 간편 해석식, 매개변수, 민감도 해석

### Abstract

ILM(incremental launching method) bridge is one of the prestressed concrete bridge construction methods widely adopted owing to its effectiveness for the quality control. The sections of the launched superstructure pass every position of the bridge spans. This launching process causes the bridge sections to be experienced in the quite different stress states with the stress state occurred after construction completely. Due to the self weight of sections, particularly, the superstructure sections(deck) experience maximum positive and negative moment as well as maximum shear force during launching process. To minimize the temporarily caused sectional forces, launching nose is generally used in the construction method. Therefore, the magnitude of this sectional forces should be checked for the safety of super structure in construction and it is dependent on the structural characteristics of launching nose. In this study, the simplified formulas to analyze the sectional force occurred by the nose-deck interaction in ILM construction are developed. The considering parameters are the span length ratio, stiffness ratio and weight ratio between the launching nose and the super structure. In particular, the developed formulas can consider the tapered sectional shape of launching nose and the diaphragm wall in the superstructure. Additionally, the sensitivity analysis is performed to analyze the effects of nose-deck interaction according to the design parameters.

**Keywords** : incremental launching method, nose-deck interaction, simplified formula, sensitivity analysis of design parameters

### 1. 서 론

높은 품질을 확보하는데 있어 효과적인 공법으로 인정받

아 널리 채택되고 있는 ILM 교량공법(김용훈 등, 1999 ; Rosignoli, 1997 ; Sasmal, 2004)은 압출되는 동안 상부의 단면이 지간의 중앙부와 지점부를 모두 통과한다. 따라

† 정회원 · 부경대학교 건설공학부 교수  
전화: 051-620-1452 ; Fax: 051-628-2231  
E-mail: hwanwoo@pknu.ac.kr

\* 부경대학교 건설공학부 부교수

\*\* 하경엔지니어링, 구조부

\* 이 논문에 대한 토론을 2006년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2006년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

서 단면들은 자중에 의한 최대 정 모멘트 및 최대 부 모멘트 그리고 최대 전단력을 모두 경험하는 구조적 특성을 가지고 있다. 결국, ILM 교량의 상부단면들은 교량 공용상태 때와는 다른 응력들을 압출 중에 경험하게 된다.

ILM 교량의 상부단면들이 압출 중에 경험하게 되는 응력들은 시공 중에만 발생하는 일시적인 응력들이지만, 그 크기는 단면의 안전성에 영향을 줄 수 있다. 이 일시적인 응력을 흡수하고, 효과적으로 제어하기 위해서, 임시교각을 설치하는 방법과 압출추진코(launching nose)를 이용하여 캔틸레버 부분의 중량을 감소시키는 방법 등이 적용될 수 있다. 일반적으로 압출추진코가 이용되고 있다(Rosignoli, 1997 ; Rosignoli, 1999).

압출추진코의 최적설계는, 압출이 진행되는 동안 상부단면에 발생하는 응력들의 크기와 변화 폭이 최소화되게 하는 데에 있다. 이것은 상부단면의 최적화를 가능하게 중요한 요인이 된다. 압출 중에 발생하는 응력들의 크기와 변화 폭에 영향을 주는 주요 설계변수들은 압출추진코의 길이(length), 강성(stiffness), 및 중량(weight) 등이 있다(Rosignoli, 1998).

압출추진코의 단면형상을 전체 길이 내에서 동일한 단면으로 가정한 상태에서 압출추진코와 상부단면과의 상호작용에 따른 부재력 변화를 연구한 결과들이 있다(안태욱 등, 2003 ; Rosignoli, 1998). Rosignoli(1998)의 연구는 상호작용을 고려한 압출 중에 변화하는 상부단면의 휨모멘트를 계산하는 해석식과 압출추진코의 길이와 중량변화에 따른 영향을 분석하였다. 안태욱(2003)의 연구는 상호작용을 고려할 수 있는 압출추진코의 설계식을 개발하였다. 한편, 실제의 압출추진코는 전체 길이 내에서 단면의 높이가 선형으로 변화하는 단면으로 설계되는 것이 일반적이다. 따라서 압출추진코의 단면이 전체 길이 내에서 동일하다고 가정된 조건에서 개발된 해석식이나 설계식을 적용하는 것은 부적절 하다.

본 논문에서는 압출 중인 ILM 교량의 상부단면에 발생하는 단면력의 변화를 간편하게 예측할 수 있는 해석식을 제안한다. 그리고 제안된 해석식을 이용하여 매개변수들의 변화에 따른 상호작용의 영향을 논의한다.

## 2. 상호작용의 해석모형

### 2.1 매개변수 및 기본가정

압출 중 상부단면의 부재력 변화에 영향을 줄 수 있는 압출추진코와 교량 상부단면의 기하학적, 역학적인 특성을 고

려할 수 있도록 아래의 4가지 변수들을 본 연구의 매개변수로 선정한다.

- 1) 교량구조( $l$ )의 지간길이에 대한 압출추진코( $l_n$ )의 길이비 :  $l_n/l$
- 2) 교량구조( $q$ )와 압출추진코( $q_1, q_2$ )의 단위 길이당 중량비 :  $q_1/q, q_2/q$
- 3) 교량구조( $I$ )와 압출추진코( $I_1, I_2$ )의 강성비 :  $I_1/I, I_2/I$
- 4) 교량구조( $E$ )와 압출추진코( $E_n$ )의 탄성계수비 :  $E_n/E$

여기서,  $q_1, I_1$ 은 압출추진코 끝단에서의 단위 중량과 단면 2차모멘트를 의미하고,  $q_2, I_2$ 는 각각 압출추진코와 콘크리트 상부단면 연결부에서의 압출추진코의 단위 중량과 단면 2차모멘트를 의미한다(그림 1 참조).

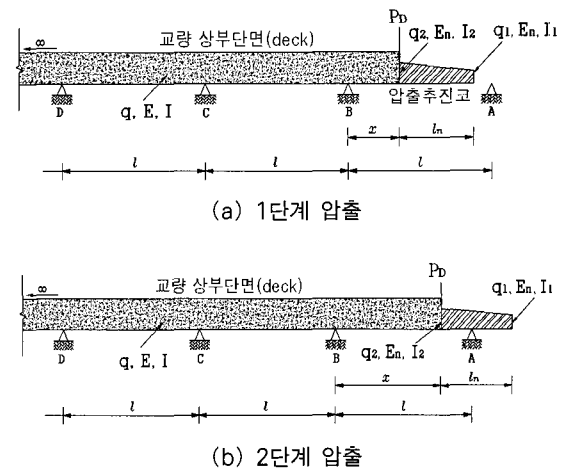


그림 1 압출시의 Nose-Deck 구조계

상부단면과 압출추진코로 이루어진 구조체가 압출이 진행되는 동안 가질 수 있는 대표적인 구조계는 그림 1과 같을 것이다. 따라서 상호작용의 해석모형도 2단계로 정의한다. 압출추진코가 지점 A에 도달하기 직전까지의 캔틸레버 상태(그림 1(a) 참조)를 1단계 압출이라 명칭하고, 압출추진코가 지점 A에 도달한 후부터 콘크리트 상부가 지점 A에 도달할 때까지(그림 1(b) 참조)를 2단계 압출이라 명칭한다. 그림 1(a)와 그림 1(b)에서 보여주고 있는  $P_b$ 는 집중하중으로 표현된 교량 상부단면과 압출추진코와의 연결부 다이아램을 의미한다.

본 연구에서의 기본가정은 아래와 같다.

- 1) 콘크리트 상부단면은 일정한 강성 및 중량을 가진다.

- 2) 압출추진코의 높이는 단면의 길이방향으로 선형적으로 변화하고, 단면의 폭 방향으로는 일정하다.
- 3) 그림 1의 D점 이후의 지점은 지간길이가  $l$ 인 무한개의 연속보로 되어 있다.
- 4) 미지수를 추가적으로 도입하지 않기 위해서 압출 긴장력은 교량 상부단면의 도심축을 지난다.

2.2 해석식

2.2.1 1단계 압출( $M_B^1/ql^2$ )

압출중인 ILM 교량 상부단면의 설계단면력은 그림 1의 지점 B와 지점 C에서의 부(-)모멘트, 그리고 A-B경간과 B-C경간에서 발생하는 정(+ )모멘트 중에서 결정 될 수 있다. 선행연구 결과들(안태욱 등, 2003 ; Rosignoli, 1998)로부터 일반적으로 지점 B에서의 부모멘트가 압출 중의 설계단면력으로 결정되는 것을 알았다.

그림 1의 지점 B에서부터 압출추진코와 상부의 교점부분이 거리  $x$  만큼 압출되었을 때, 압출 추진코의 끝은 지점 A에 도달하기 직전으로 가정하면 그림 1로부터 경간 길이에 대한 압출된 상부길이의 비를  $\alpha = x/l$ 로 나타내면,  $\alpha$ 의 범위는  $0 \leq \alpha \leq 1 - l_n/l$  이다. 그리고 1단계 압출과정 중에, 즉, 지점 A에 도달하기 직전까지에서 설계단면력으로 결정되는 지점 B의 휨모멘트  $M_B^1$ 는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\frac{M_B^1}{ql^2} = -\frac{1}{2} \cdot \alpha^2 - \frac{q_1}{q} \cdot \alpha \cdot \frac{l_n}{l} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_1}{q} \cdot \frac{l_n^2}{l^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( \alpha \frac{l_n}{l} + \frac{1}{3} \frac{l_n^2}{l^2} \right) - \frac{P_D}{ql} \cdot \alpha \quad (1)$$

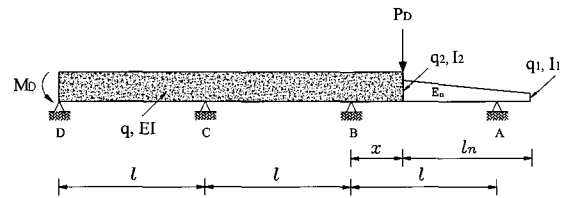
식 (1)에서 보는 바와 같이 1단계 압출에서, 지점 B의 휨모멘트  $M_B^1$ 은 압출추진코와 교량 상부단면과의 길이비 ( $l_n/l$ )와 중량비( $q_1/q$ ,  $q_2/q$ )만의 함수이고, 강성비( $I_1/I$ ,  $I_2/I$ )와 탄성계수비( $E_n/E$ )와는 무관함을 알 수 있다.

2.2.2 2단계 압출( $M_B^2/ql^2$ )

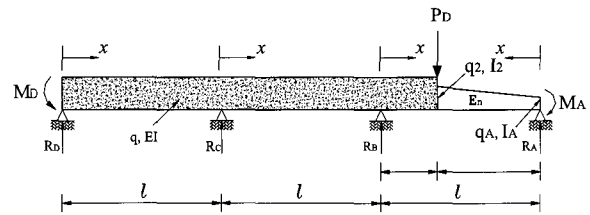
2단계 압출(그림 1(b) 참조)은 압출추진코가 지점 A에 도달한 때부터 시작된다. 압출추진코가 지점 A에 도달하게 되면 압출추진코의 끝은 교각의 지점반력에 의해 처짐이 회복된다. 이러한 탄성처짐의 회복으로 발생하는 정 모멘트는

부 모멘트인 지점 B의 휨모멘트를 감소시킨다.

2단계 압출은 지점 A에 콘크리트 상부가 도달할 때까지이다. 따라서 2단계 압출에서  $\alpha$ 의 범위는  $1 - l_n/l \leq \alpha \leq 1$  이다.



(a) 해석 영역



(b) 해석 구조계

그림 2 3경간 연속보

2단계 압출이 진행되는 동안에 지점 B에 발생하는 상부 단면의 휨모멘트를  $M_B^2$ 라 정의한다. 휨모멘트  $M_B^2$ 는 그림 1의 D지점 이후를 무한연속보로 가정한 것에 근거하여 교량 전체 구조계에서 그림 2(a)와 같은 3경간 연속보를 해석영역으로 생각할 수 있다.

먼저, 그림 2(b)에서  $M_D = ql^2/12$ 임을 감안할 때, 휨모멘트  $M_B^2$ 는 식 (2)와 같다.

$$M_B^2 = 2R_B l + R_C l - \frac{25}{12} ql^2 \quad (2)$$

식 (2)의 완전한 해석식을 얻기 위해서는  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  그리고  $R_D$  4개의 지점 수직반력을 알아야 한다.  $R_A$ 와  $R_D$ 는 평형조건식으로부터,  $R_B$ 와  $R_C$ 는 식 (3)과 식 (4)와 같이 최소일의 원리를 적용하여 구한다.

$$\sum \int \frac{1}{EI} M \left( \frac{\partial M}{\partial R_B} \right) dx = 0 \quad (3)$$

$$\sum \int \frac{1}{EI} M \left( \frac{\partial M}{\partial R_C} \right) dx = 0 \quad (4)$$

표 1은 각 적분구간 별 휨모멘트( $M$ )식과 지점반력  $R_B$ 와  $R_C$ 의 편도함수  $\partial M/\partial R_B$ 와  $\partial M/\partial R_C$ 의 해를 정리한 것이다. 표 1에서 I구간은 그림 2(b)의 DC경간을, II구간은 CB경

표 1 최소일의 방법

| 구간  | $x$ 원점 | 적분구간                 | $M$   | $\partial M/\partial R_B$        | $\partial M/\partial R_C$        |
|-----|--------|----------------------|---|----------------------------------|----------------------------------|
| I   | D      | $0 \sim l$           | $R_D x - M_D - \frac{1}{2} q x^2$                             | $-\frac{1}{3} x$                 | $-\frac{2}{3} x$                 |
| II  | C      | $0 \sim l$           | $R_D(l+x) + R_C x - M_D - \frac{q(l+x)^2}{2}$                 | $-\frac{1}{3} l - \frac{1}{3} x$ | $-\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} x$ |
| III | B      | $0 \sim \alpha l$    | $R_D(2l+x) + R_C(l+x) + R_B x - M_D - \frac{q(2l+x)^2}{2}$    | $-\frac{2}{3} l + \frac{2}{3} x$ | $-\frac{1}{3} l + \frac{1}{3} x$ |
| IV  | A      | $0 \sim l(1-\alpha)$ | $R_A x - M_A - \frac{q_A x^2}{2} - \frac{x^2}{6} (q_x - q_A)$ | $-\frac{2}{3} x$                 | $-\frac{1}{3} x$                 |

간을, III구간은 지점 B에서 콘크리트와 압출추진코 연결부 까지를, IV구간은 지점 A에서 콘크리트 상부와 압출추진코 연결부까지를 말한다.

2개의 평형조건식과 합계 식 (3)과 식 (4)를 이용하여 얻어진 지점반력  $R_C$ 와  $R_D$ 를 식 (2)에 대입하면 식 (5)와 같이 2단계 압출 과정 중 설계단면력  $M_B^E/q^2$ 을 얻을 수 있다.

$$\frac{M_B^E}{q^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{\text{a}}{\text{f}} + \frac{E}{E_n} \frac{\text{b} + \text{c} + \text{d} + \text{e}}{\text{f}} \right) - \frac{3}{4} \quad (5)$$

여기서 a~f는 해석식의 유도과정에서 얻어진 상수 값으로써 2.1절에서 정의한 매개변수들의 크기에 따라 결정된다. 특히, 압출추진코의 단면형상에 따라 달라지는 단면 2차 모멘트 값에 영향을 받는다.

본 연구의 기본가정에 따라 길이방향으로 선형적으로 변화하는 압출추진코의 높이를  $h_x$ 라 하면, 길이방향으로 임의의 위치  $x$ 에서의 압출추진코의 단면 2차 모멘트는 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$I_x = C \cdot h_x^\gamma \quad (6)$$

식 (6)에서  $C$ 와  $\gamma$ 는 압출추진코 단면형상에 따라 결정되는 상수값이다. 본 연구에서는, 압출추진코의 단면이 직사각형일 경우에는,  $C=B/12$ 와  $\gamma=3.0$ 으로, I형일 경우에는 근사적으로  $C=1/2B_f \cdot t_f$ 와  $\gamma=2.0$ 으로 하였다.

$$\text{직사각형 단면} : I_x = \frac{B}{12} \cdot h_x^3 \quad (7)$$

$$\text{I형 단면} : I_x = \frac{1}{2} B_f \cdot t_f \cdot h_x^2 \quad (8)$$

여기서, B는 직사각형 단면의 폭을  $B_f$ 와  $t_f$ 는 I형 단면의 플랜지 폭과 두께를 의미한다. 실무에서 널리 이용되는 I형

단면의 압출추진코에 대한 식 (5)의 a~f를 부록에 수록하였다.

한편, 식 (5)를 분석하여 보면 2단계 압출이 진행되는 동안 상부단면에 발생하는 휨모멘트 크기는 상부단면과 압출추진코의 휨강성비에 종속되는 것을 알 수 있다. 그러나 압출이 종료( $\alpha=1$ )될 때는 강성비에 관계없이 식 (9)의  $M_B^E$ 에 수렴한다.

$$M_B^E = (0.045q_2 + 0.089q_1)l_n^2 - 0.107ql^2 \quad (9)$$

### 2.3 해석식의 사용성

#### 2.3.1 수치해석의 정확성과 효율성

그림 3과 그림 4는 본 연구에서 유도된 해석식 (1)과 식 (5)의 정확성을 검증할 목적으로 범용 구조해석 프로그램 MIDAS((주)마이다스아이티, 2003)의 해석결과와 비교한 그림이다.

해석모형은 지간장이 50m이고, 압출추진코의 길이가 35m인 교량을 가정하였다. 이때 중량비는  $q_2/q=0.42$ ,  $q_1/q=0.16$ 으로, 강성비는  $I_2/I=0.0215$ ,  $I_1/I=0.0012$ 으로 그리고 탄성계수비는  $E_n/E=7.78$ 으로 하였다. 그리고 MIDAS의 해석을 위해 압출은 50cm씩 진행되는 것으로 가정하였다.

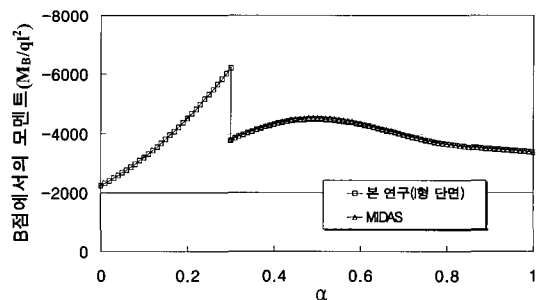


그림 3 해석식(I형단면)과 MIDAS 결과 비교

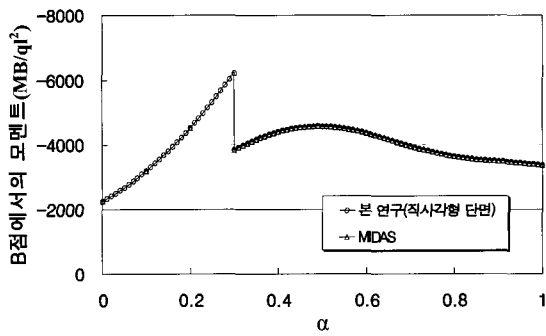


그림 4 해석식(직사각형단면)과 MIDAS 결과 비교

그림 3과 그림 4에서 알 수 있듯이 유도된 해석식은 매우 정확한 결과를 줄 수 있음을 알 수 있다. 한편, MIDAS 등을 포함한 범용구조해석 프로그램을 이용하여, 압출 중인 ILM 교량의 설계단면력을 해석하기 위해서는 일일이 압출 단계를 가정해야 한다. 그리고 압출단계도 세밀히 나누어야만 설계단면력과 그 발생시기를 정확히 알 수가 있다. 그러나 제안된 해석식을 이용하는 경우는 설계자가 해석식에 설계변수 값의 대입만으로 쉽게 설계단면력의 크기와 그때의 압출단계를 알 수 있다. 따라서 제안된 해석식은 최적값을 얻기 위해서는 일반적으로 반복 해석과정을 거쳐야 하는 설계과정에서, 설계자가 필요한 결과를 정확하고 효율적으로 예측할 수 있어 매우 실용적인 것으로 기대한다.

### 2.3.2 압출추진코 단면형상의 영향

일반적으로 실무에서 사용되는 압출추진코는 길이방향으로 단면의 높이가 변화하는 변단면이다. 이와 같은 변단면의 압출추진코를 등단면으로 환산하여 해석(Rosignoli, 1998)하였을 경우와 변단면으로 해석한 결과를 비교하여 본다.

해석 예제는 시간장이 50m이고, 압출추진코는 I형 단면으로서 길이를 35m로 가정한다. 그리고 상부단면과 압출추진코 사이의 다이어플램의 영향은 고려하지 않는다. 표 2는 예제 교량에 적용된 각 계수값들을 보여주고 있다.

표 2에서  $q_n$ ,  $I_n$  값은 변단면에 관한 계수값들을 등단면

으로 환산한 것이다. 여기서, 등단면(도심위치값)이란 압출추진코의 전 단면을 길이방향의 강성 도심위치에서 얻어지는 값을 갖는 등단면으로 환산하여 적용하였음을 의미한다. 예를 들어, I형 플레이트 거더의 강성변화는 2차 포물선이므로 도심 위치인 압출추진코 끝단에서  $3I_n/4$  위치에서 산정된 계수값을 적용하였다는 것을 의미한다. 한편, 산술평균값은 변단면 압출추진코의 시작과 끝 단면에 해당하는 계수값들을 산술평균한 값을 말한다.

그림 5는 변단면을 고려할 수 있는 본 연구에서 도출한 해석식인 식 (1)과 식 (5)와 변단면을 등단면으로 환산하여 Rosignoli(Rosignoli, 1998)의 해석식을 적용한 식의 결과를 비교한 것이다.

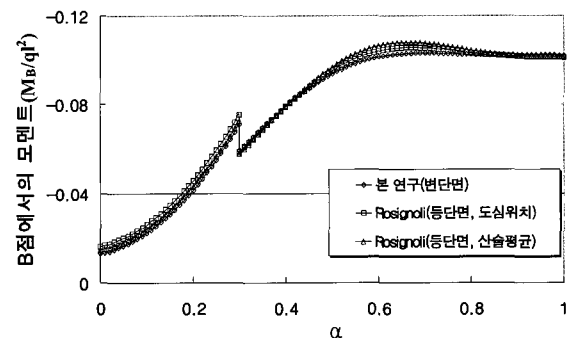


그림 5 단면형상에 따른 단면력 변화

그림 5의 결과에서 알 수 있듯이, 최대 휨모멘트 값은 두 경우 모두 2 단계 압출과정( $\alpha \geq 0.3$ )에서 발생되었다. 그러나 도심위치값과 산술평균 값을 등단면으로 환산한 Rosignoli (1998)의 해석식 결과가 변단면 형상을 고려한 본 연구의 해석 값보다 각각 3%, 5%정도 크게 나타났다. 이것은 해석 예제의 경우, 변단면의 압출추진코를 등단면으로 환산하여 해석한다면 교량 상부단면이 비경제적으로 설계되는 것을 의미한다.

한편, 변단면 압출추진코의 강성비 경사 등이 해석 예제와 다를 경우에는 등단면으로 환산하여 산정된 단면력이 실제 변단면 압출추진코를 고려한 단면력보다 작게 나타나는

표 2 단면특성

| 적 용 해석식   | 압출추진코 단면       | 길이비 | 중량비                                | 강성비                                 | 탄성 계수비 | 다이어플램 $P_D$ (kN) |
|-----------|----------------|-----|------------------------------------|-------------------------------------|--------|------------------|
| 본 연구      | 변단면            | 0.7 | $q_2/q = 0.08$ ,<br>$q_1/q = 0.04$ | $I_2/I = 0.03$ ,<br>$I_1/I = 0.004$ | 6.8359 | 적용안함             |
| Rosignoli | 등단면<br>(도심위치값) | 0.7 | $q_n/q = 0.067$                    | $I_n/I = 0.0195$                    | 6.8359 | 적용못함             |
| Rosignoli | 등단면<br>(산술평균값) | 0.7 | $q_n/q = 0.06$                     | $I_n/I = 0.017$                     | 6.8359 | 적용못함             |

경우도 있다. 이러한 경우는 교량 상부단면의 안전성에 유해한 영향을 줄 것이다. 그러므로 실제 변단면 압출추진코의 형상을 등단면으로 환산하여 해석하는 것은 부적절한 것으로 판단된다.

### 2.3.3 다이아플래트의 영향

일반적으로 ILM 교량의 압출추진코와 상부단면 연결부에는 다이아플래트가 배치된다. 따라서 다이아플래트가 압출 중 상부단면력에 미치는 영향을 알아볼 필요가 있다.

해석 예제는 지간장이 50m이고, 압출추진코의 길이가 35m인 실제 ILM 교량( $q=190.525\text{ kN/m}$ )을 참조하여 표 3과 같은 해석 자료를 적용하였다.

그림 6은 식 (1)과 식 (5)를 사용하여 압출추진코의 변단면 형상은 반영하되, 다이아플래트를 고려했을 경우와 고려하지 않았을 경우를 비교한 결과이다.

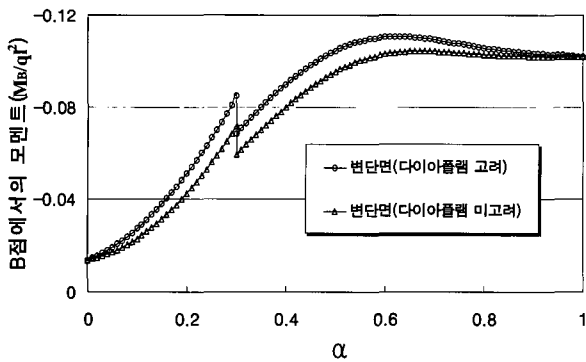


그림 6 A교량의 다이아플래트 영향

그림 6에서 알 수 있듯이 2 경우 모두 압출 완료 후의 모멘트  $M_B^E$ 를 초과하는 단면력이 2단계 압출과정에서 발생하였다. 다이아플래트를 고려했을 경우는 2단계 압출 중 최대 단면력이  $M_B^E$ 보다 7.9%정도 크게 나타났고, 다이아플래트를 고려하지 않았을 경우의 최대 단면력은  $M_B^E$ 보다 2.4%정도 크게 나타났다. 결국 다이아플래트의 영향은 반드시 고려해야 할 것이고, 본 연구의 해석식은 다이아플래트의 영향을 고려할 수 없는 Rosignoli(1998)의 해석식에 비하여 개선된 결과를 줄 수 있을 것으로 본다.

### 3. 매개변수 해석

압출 중인 ILM 교량의 상부단면 설계력으로 결정되는 지점 B 위치(그림 1 참조)에서의 휨 모멘트 해석식인, 식 (1), 식 (5)에 포함된 매개변수들의 영향을 분석하고자 한다.

상부단면의 콘크리트 설계강도는  $f_{ck}=40\text{ MPa}$ 로 압출추진코의 단면 형상은 I형으로 적용하였다. 압출추진코의 탄성계수는  $E_n=2.1 \times 10^5\text{ MPa}$ 을 적용하였다. 그리고 도로교설계기준(건설교통부, 2005)에 따라 콘크리트 탄성계수를 산정한 후, 교량 상부단면과 압출추진코의 탄성계수비  $E_n/E=6.8359$ 를 적용하였다.

#### 3.1 압출추진코의 길이가 긴 경우

먼저, 압출추진코의 길이가 상대적으로 긴 경우의 해석 예제로서 압출추진코와 콘크리트 상부의 길이비는  $l_n/l=0.8$ 이고, 중량비는  $q_2/q=0.15$ ,  $q_1/q=0.05$ 인 것으로 가정하였다. 이때, 압출추진코 길이만의 영향을 알아보기 위하여 다이아플래트는 고려하지 않았다.

그림 7은 압출추진코의 강성비 경사가  $I_2/I_1=2.25$ 인 경우에 대하여 상부단면과의 강성비 변화에 따른 휨모멘트 ( $M_B$ ) 궤적을 보여주고 있다. 그림 7에서 보는 바와 같이 교량이 최초로 캔틸레버 상태로 압출되어 가는 동안에 지점 B에서는 부 모멘트가 점점 증가하다가, 압출추진코가 지점 A(그림 1 참조)에 도달하게 되면( $\alpha=0.2$ ), 지점반력에 의한 탄성처짐의 회복으로 정 모멘트가 발생한다. 따라서 지점 B의 휨 모멘트(부 모멘트)  $M_B$ 는 지점 A의 반력에 의한 정 모멘트의 영향으로 일시적으로 감소한다. 그러나 상부단면이 압출됨에 따라 상부단면의 자중 증가에 의해  $M_B$ 는 다시 증가하기 시작한다. 캔틸레버 상태인  $\alpha < 0.2$  일때는 강성비에 의존하지 않고 압출추진코가 지점 A에 도달한 이후인 2단계 압출과정에서  $M_B$ 는 상부단면과 압출추진코의 휨강성비에 종속되는 것을 알 수 있다. 그러나  $\alpha > 0.9$ 일때는 강성비의 영향이 지극히 미소하다는 것도 알 수 있다. 그리고 압출이 종료( $\alpha=1$ )될 때는 강성비에 관계없이 식 (9)의  $M_B^E$ 에 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

표 3 A교량의 단면특성(I형 압출추진코)

| 압출추진코 단면 | 길이비 | 중량비                            | 강성비                              | 탄성 계수비 | 다이아플래트 $P_D(kN)$ |
|----------|-----|--------------------------------|----------------------------------|--------|------------------|
| 변단면      | 0.7 | $q_2/q=0.082$<br>$q_1/q=0.043$ | $I_2/I=0.0266$<br>$I_1/I=0.0040$ | 6.8359 | 406.15           |

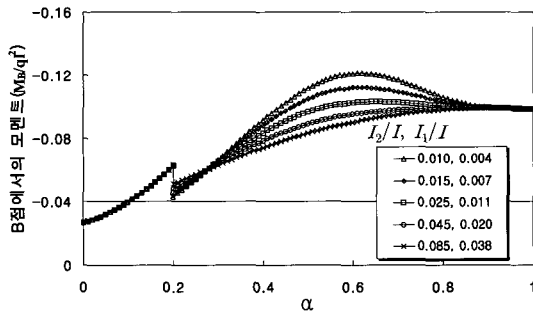


그림 7  $l_n/l=0.8, q_2/q=0.15, q_1/q=0.05$ 인 경우 압출하는 동안 강성비에 따른 B점의 모멘트

0.2 <math>\alpha < 0.9</math>에서는 강성비가 적을수록 콘크리트 상부단면으로서 상대적으로 강성이 큰 B지점에 위치한  $M_B$ 가 더 크게 나타난다. 따라서 2단계 압출과정에서의 상부단면력  $M_B^E$ 가  $M_B^E$ 를 초과하지 않도록 하는 압출추진코의 강성비를 결정한다면, 그 강성비는 최소 강성비라 정의할 수 있을 것이다. 이 예제의 경우는 시산의 방법으로 최소 강성비를 산정한 결과,  $I_2/I=0.045, I_1/I=0.020$ 으로 나타났다.

한편, 그림 7에서 알 수 있듯이  $l_n/l=0.8$ 인 경우와 같이 압출추진코의 길이가 지간 길이에 비해 상대적으로 긴 경우는, 캔틸레버 상태일 때의 모멘트가 압출이 끝난 후의 모멘트 즉,  $M_B^E$ 보다 매우 낫다. 이는 상부단면을 압출추진코 없이도 안전하게 캔틸레버 상태로 압출할 수 있는 단면저항력을 충분히 활용하지 못하게 되므로 압출추진코의 길이가 긴 경우는 상부단면이 비경제적으로 설계된다는 것을 의미한다.

3.2 압출추진코의 길이가 짧은 경우

압출추진코의 길이가 상대적으로 짧은 경우의 해석 예제로서 압출추진코와 콘크리트 상부의 길이비가  $l_n/l=0.5$ 이라고 가정하였다. 다른 해석조건은 앞 절의 경우와 같다.

그림 8은 압출추진코의 길이가 짧은 경우의 예제에 대한 강성비의 변화에 따른 상부단면의 휨모멘트( $M_B$ ) 궤적을 나타내고 있다. 그림 8에서 보는바와 같이 압출추진코가 짧은 경우는 압출이 시작되는 초기에는 짧은 압출추진코의 작은 중량에 의해 작은 크기의 캔틸레버 휨 모멘트가 발생된다. 그러나 점점 중량이 큰 콘크리트의 길이가 늘어남에 따라 캔틸레버 상태의 휨 모멘트는 급속히 증가하게 된다. 특히, 캔틸레버 상태( $\alpha \le 0.5$ )에서 발생하는 최대 휨모멘트가 2단계 압출이 진행되는 동안 ( $0.5 < \alpha \le 1.0$ )과 압출이 끝난 상태( $\alpha = 1.0$ )의 휨 모멘트( $M_B^E$ )보다 매우 크다. 따라서 캔틸레버 상태에서 발생하는 최대 휨모멘트를 저항하기 위해서는 교량의 상부단면이 과다하게 크게 설계되어야 하고 압출추진코를 활용하는 의미가 없어진다.

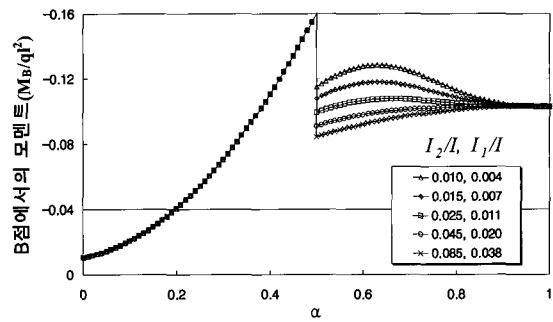


그림 8  $l_n/l=0.5, q_2/q=0.15, q_1/q=0.05$ 인 경우 압출하는 동안 강성비에 따른 B점의 모멘트

한편, 이 해석 예제에서도 2단계 압출과정에서의 상부단면력  $M_B^E$ 가  $M_B^E$ 를 초과하지 않도록 하는 압출추진코의 최소 강성비는  $I_2/I=0.045, I_1/I=0.020$ 로 얻어졌다.

압출추진코의 길이가 긴 경우와 짧은 경우의 해석 예제를 통하여 다음과 같은 결과를 추가로 얻을 수 있었다. 첫째로, 최적의 압출추진코 길이라 함은 중량비와 강성비가 주어졌을 때, 1단계 압출과정(캔틸레버 상태)에서 발생하는 최대 휨모멘트( $M_{B_{max}}^I$ )와 압출이 종료될 때( $\alpha = 1.0$ )의 휨모멘트( $M_B^E$ )의 크기의 오차를 가장 적게 하는 것이라 할 수 있다. 이는 상부단면이 가지는 저항력의 활용을 극대화하면서 압출추진코의 길이를 최대한 줄일 수 있기 때문이다. 둘째로, 압출추진코의 강성을 최소 강성비보다 크게만 하면, 2단계 압출과정에서의 교량 상부단면에 발생하는 휨 모멘트는  $M_B^E$ 를 넘지 않았다.

3.3 중량비에 따른 영향

그림 9는 강성비가  $I_2/I=0.045, I_1/I=0.020$ 이고 길이비가  $l_n/l=0.65$ 일 때 중량비의 변화에 따른 지점 B의 휨모멘트 궤적들을 보여주고 있다.

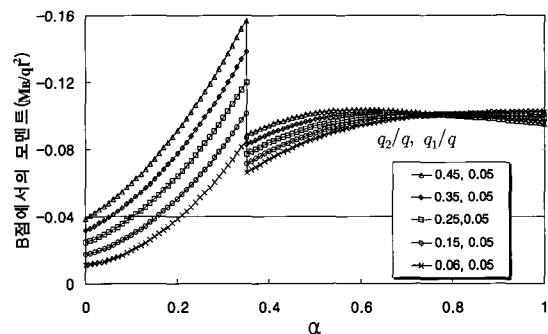


그림 9  $I_2/I=0.045, I_1/I=0.02, l_n/l=0.65$ 인 경우의 중량비 변화에 따른 모멘트 변화

1단계 압출시, 즉 지점 A에 도달할 때까지인 캔틸레버 상태에서의  $M_B$ 는 압출추진코와 콘크리트 상부의 중량비에 크게 의존하고, 2단계 압출시, 즉 지점 A에 도달한 후부터는 압출추진코와 콘크리트 상부의 중량비에 따른 모멘트의 변화는 압출 종료시( $\alpha=1$ )에서의 모멘트 값의 15%~20% 내외 폭에서 변화함을 알 수 있다. 그리고 중량비가 증가할수록, 그림 8의 압출추진코가 짧은 경우와 같은 형상이 되고, 중량비가 감소할수록, 그림 7의 압출추진코의 길이가 긴 경우와 같은 형상으로 나타남도 알 수 있다.

### 3.4 최적길이비 및 최소강성비

그림 7과 그림 8에서 알 수 있듯이, 압출과정에서 발생하는 단면력을 가장 경제적으로 저항하는 상부단면을 설계하기 위해서는 캔틸레버 상태의 휨모멘트인 식 (1)의  $M_B^E$ 의 최대 값과 압출이 완료된 후의 휨 모멘트인 식 (9)의  $M_B^E$  값과의 차이를 가능한 줄일 수 있는 적절한 길이의 압출추진코가 필요하다. 본 연구에서는 이 길이를 압출추진코의 최적 길이라 한다.

식 (1)과 식 (9)가 강성비와 관계가 없는 식들이므로 중량비만을 변화시키면서 시행착오의 방법에 의해 최적의 압출추진코 길이를 결정할 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 중량비의 변화 폭은 실제 설계사례들을 조사한 결과를 바탕으로  $q_2/q$ 를 0.17에서 0.03까지 0.01씩 변화시켰고, 이때  $q_1/q$ 는 주어진  $q_2/q$ 의 값에서 0.001까지 0.001씩 감소시키면서 최적 길이를 결정하였다.

압출추진코의 최적 길이를 산정한 후에는 산정된 중량비와 최적 길이에 대한 압출추진코와 교량 상부단면과의 최소강성비를 산정하였다. 강성비의 변화 폭은  $I_2/I$ 를 0.085에서 0.010까지 0.005씩 변화시키고,  $I_1/I$ 의 값은 주어진  $I_2/I$ 의 값에서 0.001까지 0.001씩 감소시키면서 분석하였다.

그림 10과 그림 11에서는 본 연구에서 산정한 중량별 최적 길이들의 일부 예를 보여주고 있다. 그림 10에서 보는 바와 같이  $q_2/q=0.08$ ,  $q_1/q=0.05$ 의 경우에는  $l_n/l=0.61$ 이, 그림 11과 같이  $q_2/q=0.15$ ,  $q_1/q=0.05$ 의 경우에는  $l_n/l=0.65$ 가 얻어졌다. 그리고 본 연구에서 적용한 분석범위에서는 모든 경우에서 2단계 압출시  $M_B^E$ 를 초과하지 않게 하는 최소강성비는 중량비 변화에 관계없이  $I_2/I=0.045$ ,  $I_1/I=0.020$ 로 나타났다. 즉, 강성비가  $I_2/I=0.045$ ,  $I_1/I=0.020$ 이상으로만 설계

된다면 중량비와 길이비의 조절만으로 캔틸레버 상태와 압출 완료시 최대 부 모멘트의 차이가 최소가 되도록 하는 최적의 압출추진코를 설계할 수 있는 것을 의미한다.

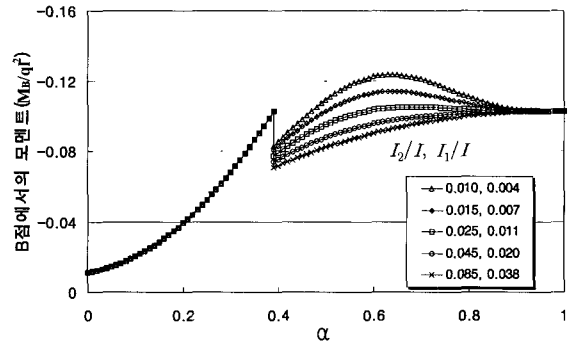


그림 10  $q_2/q=0.08$ ,  $q_1/q=0.05$ ,  $l_n/l=0.61$ 인 경우 압출하는 동안 강성비에 따른 B점의 모멘트

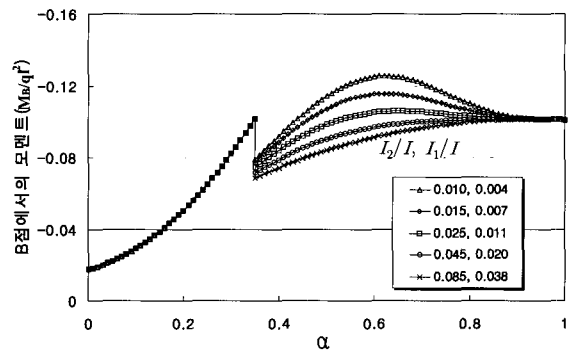


그림 11  $q_2/q=0.15$ ,  $q_1/q=0.05$ ,  $l_n/l=0.65$ 인 경우 압출하는 동안 강성비 따른 B점의 모멘트

그림 10과 그림 11의 과정을 거쳐 각 중량비에 대한 최적 길이비를 산정하였으며, 본 연구에서는 대표적으로 중량비 경사  $q_2/q_1=0.5$ 인 경우의 예를 표 4와 그림 12에 나타내었다. 그림 12에서의 강성비는 모두 최소강성비인  $I_2/I=0.045$ ,  $I_1/I=0.020$ 을 적용한 것이다.

표 4 중량비 변화에 따른 최적 길이비 변화

| $q_2/q$ | $q_1/q$ | $l_n/l$ |
|---------|---------|---------|
| 0.16    | 0.08    | 0.691   |
| 0.14    | 0.07    | 0.665   |
| 0.12    | 0.06    | 0.642   |
| 0.10    | 0.05    | 0.622   |
| 0.08    | 0.04    | 0.603   |
| 0.06    | 0.03    | 0.585   |
| 0.04    | 0.02    | 0.569   |



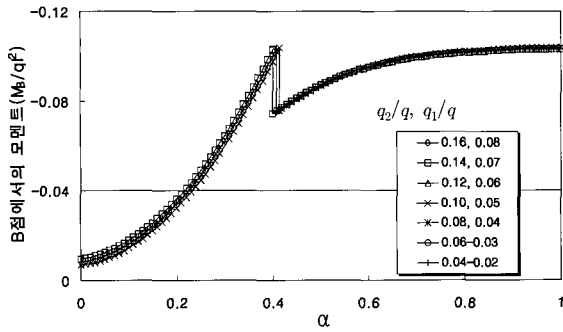


그림 12 최적중량비와 최적길이비에 대한 B점의 모멘트

### 3.5 탄성계수비의 변화에 따른 영향

그림 13은 길이비  $l_n/l = 0.65$ , 중량비  $q_2/q = 0.15$ ,  $q_1/q = 0.05$ , 강성비  $I_2/I = 0.045$ ,  $I_1/I = 0.020$ 인 경우에 대하여 탄성계수비 ( $E_n/E$ )의 변화에 따른 지점 B의 휨모멘트 변화를 나타내고 있다.

그림 13에서 알 수 있듯이 탄성계수비는 강성비의 효과와 마찬가지로 2단계 압출시 단면력 궤적에만 영향을 준다. 즉, 탄성계수비가 다르더라도 압출 완료후의 휨모멘트는 일정한 값에 수렴하였다.

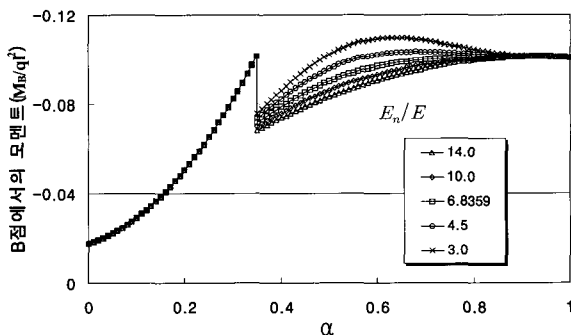


그림 13 탄성계수비에 따른 B점의 모멘트

## 4. 결 론

- 1) 실무에서 이용되는 대부분의 압출추진코의 단면형상은 변단면이다. 본 연구에서는 변단면 압출추진코와 교량 상부단면의 상호작용 해석을 위해 설계자가 쉽게 이용할 수 있는 해석식을 유도하였다. 제안된 해석은 기존의 등단면 압출추진코에 대한 해석식(Rosignoli, 1998)보다 정확도가 개선되었다. 특히, 압출추진코와 교량 상부단면 연결부 다이나믹플래시의 영향을 고려할 수 있어 해석의 정확도가 더욱 높아졌다.
- 2) 압출추진코와 상부단면과의 길이비, 휨 강성비, 중량

비, 탄성계수비 등을 매개변수로 한 상부단면의 단면력 변화에 대한 민감도 분석을 수행하였다. 그 결과, 압출추진코의 길이가 상대적으로 긴 경우는 2단계 압출(연속보 상태) 과정 중에 최대 단면력이 발생된다. 이때의 단면력의 크기는 휨강성비에 좌우된다. 짧은 경우는 1단계 압출(캔틸레버 상태) 종료시에 최대 단면력이 발생한다. 이때의 단면력의 크기는 중량비에 좌우된다. 그리고 2단계 압출과정 중 발생하는 단면력이 압출 종료 후의 단면력( $M_B^E$ )을 초과하지 않게 하는 최소강성비는  $I_2/I = 0.045$ ,  $I_1/I = 0.020$ 로 분석되었다.

- 3) 1단계 압출 완료시와 2단계 압출 종료 후의 단면력 ( $M_B^E$ ) 차이를 가능한 가장 적게 하는 길이비가 되도록 압출추진코 길이가 결정되는 경우를 압출추진코의 최적길이라 할 수 있다. 이 경우, 최대 단면력의 크기와 압출 과정에서의 단면력 변화폭을 동시에 최소화할 수 있기 때문이다.

## 감사의 글

본 연구는 2004학년도 부경대학교 기성희 학술연구비 지원으로 수행되었으며 연구지원에 감사드립니다.

## 참고 문헌

- 건설교통부 (2005) 도로교설계기준, 한국도로교통협회.
- 김용훈, 김씨동, 정승훈 (1999) ILM 공법을 적용한 장폭(B=19.5m) 1Cell PSC Box Girder의 낙단대교 상부공 설계사례, 한국전산구조공학회학회지, 12(3) pp.95~101.
- 안태욱, 양성운, 이환우 (2003) ILM 교량의 압출추진코와 교량 상부구조와의 상호작용, 가을 학술발표회 논문집, 대한토목학회, pp.709~714.
- (주)마아다스아이티 (2003) MIDAS/CIVIL, (주)마아다스아이티.
- Göhler, B., Pearson, B. (2000) *Incrementally Launched Bridge*, Ernst & Sohn.
- Rosignoli, M. (1997) Incremental Bridge Launching, *Concrete Int*, 19(2) pp.36~40.
- Rosignoli, M. (1997) Influences of the Incremental Launching Construction Method on the Sizing of Prestressed Concrete Bridge Decks, *Proc. Instn Civ. Engrs. Structs & Bldges.*, 122(3) pp.316~325.
- Rosignoli, M. (1998) Nose-Deck Interaction in

Launched Prestressed Concrete Bridge, *Bridge Engineering*, pp.21~27.

**Rosignoli, M.** (1999) Presizing of Prestressed Concrete Launched Bridge. *ACI Structural Journal*, 96(5) pp.705~710.

**Sasmal, S., Ramanjaneyulu, K., Srinivas, V., Gopalakrishnan, S.** (2004) Simplified Computational Methodology for Analysis and Studies on Behaviour of Incrementally Launched Continuous Bridges, *Structural Engineering and Mechanics*, 17(2).

## 부 록. 2단계 압출의 해석식

$$\frac{M_B^2}{ql^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{\text{㉑}}{\text{㉒}} + \frac{E}{E_n} \frac{\text{㉓} + \text{㉔} + \text{㉕}}{\text{㉖}} \right) - \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{㉑} = & \left[ \left\{ \frac{7}{108} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{45}{324}\alpha^3 - \frac{1}{6}\alpha^3(1-\alpha) - \frac{1}{8}\alpha^4 + \frac{1}{9}\alpha^4(1-\alpha) + \frac{1}{18}\alpha^5 \right\} \right. \\ & + \left\{ \frac{q_1}{q} + \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) \right\} (1-\alpha)^2 \left( -\frac{1}{12}\alpha^2 + \frac{1}{18}\alpha^3 \right) + \left\{ \frac{1}{2} \frac{q_1}{q} \left( \frac{l_n^2}{l^2} - 2 \frac{l_n}{l} (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 \right) \right. \\ & + \left. \frac{1}{6} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( \frac{l_n^2}{l^2} - 2 \frac{l_n}{l} (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \alpha \frac{l_n}{l} - 2\alpha(1-\alpha) + \alpha \frac{l}{l_n} (1-\alpha)^2 - \frac{l_n}{l} + 2(1-\alpha) - \frac{l}{l_n} (1-\alpha)^2 \right) \right\} \left( \frac{1}{6}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 \right) \\ & \left. + \frac{P_D(1-\alpha)}{ql} \left( -\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^3 \right) + \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( -\alpha \frac{l}{l_n} + \frac{l}{l_n} \right) (1-\alpha)^2 \left( -\frac{1}{18}\alpha^2 + \frac{1}{27}\alpha^3 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉒} = & -\frac{1}{3} \left\{ \frac{3}{4} \frac{l_n^3}{l^3} + \frac{l_n^3}{l^3} \left( \frac{1}{2} \frac{q_1}{q} \left( \frac{l_n^2}{l^2} - 2 \frac{l_n}{l} (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 \right) \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{6} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( \frac{l_n^2}{l^2} - 2 \frac{l_n}{l} (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \alpha \frac{l_n}{l} - 2\alpha(1-\alpha) + \alpha \frac{l}{l_n} (1-\alpha)^2 - \frac{l_n}{l} \right. \right. \\ & + \left. \left. 2(1-\alpha) - \frac{l}{l_n} (1-\alpha)^2 \right) \right\} + \alpha \frac{l_n^3}{l^3} \left( -\frac{2}{3}(1-\alpha) + \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{6} \alpha^2 \frac{l_n^3}{l^3} + \frac{l_n^3}{l^3} \left( \frac{q_1}{q} + \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) \right) (1-\alpha) \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\alpha \right) \\ & - \frac{1}{6} \frac{l_n^3}{l^3} \left( \frac{q_1}{q} + \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) \right) (1-\alpha)^2 + \frac{l_n^3}{l^3} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( -\alpha \frac{l}{l_n} + \frac{l}{l_n} \right) (1-\alpha) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\alpha \right) \\ & - \frac{1}{6} \frac{l_n^3}{l^3} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( -\alpha \frac{l}{l_n} + \frac{l}{l_n} \right) (1-\alpha)^2 - \frac{2}{3} P_D(1-\alpha) \frac{l_n^3}{ql^4} + \frac{P_D}{3} (2+\alpha) \frac{l_n^3}{ql^4} \left. \right\} \\ & \times \frac{1}{\left( \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right)^3} \left[ \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - 2 \left\{ \left( \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right\} \times \ln \left\{ \left( 1 - \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉓} = & + \frac{1}{3} \frac{l_n^2}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{q_1}{q} \left( \frac{l_n^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{l_n}{l} (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 \right) \right. \\ & + \frac{1}{6} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( \frac{l_n^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{l_n}{l} (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \alpha \cdot \frac{l_n}{l} - 2\alpha(1-\alpha) + \alpha \frac{l}{l_n} (1-\alpha)^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{l_n}{l} + 2(1-\alpha) - \frac{l}{l_n} (1-\alpha)^2 \right) \right\} \times \frac{1}{\left( \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right)^2} \left[ \ln \left\{ \frac{1}{\left( 1 - \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}}} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \left( 1 - \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right\} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉔} = & + \frac{1}{6} \frac{l_n^4}{l^4} \left\{ \frac{q_1}{q} + \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) \right\} \times \frac{1}{\left( \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right)^4} \left[ 0.5 \frac{l_2}{l} - 3 \left\{ \left( 1 - \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right\} \frac{l_2}{l} \right. \\ & + 3 \left\{ \left( \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right\}^2 \left. \right\} \times \ln \left\{ \frac{1}{\left( 1 - \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}}} \right\} + \left\{ \left( 1 - \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l_2^{0.5}} \right\}^3 \frac{l_2}{l} \\ & + \frac{3}{2} \left\{ \left( \frac{l_2^{0.5}}{l^{0.5}} - \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{l_1^{0.5}}{l^{0.5}} \right\}^2 \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{e} &= + \frac{1}{18} \frac{l_n^4}{l^4} \left( \frac{q_2}{q} - \frac{q_1}{q} \right) \times \frac{1}{\left( \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} - \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right)^5} \left[ 4 \left\{ \left( \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} - \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right\}^3 \right. \\
 &\quad \times \ln \left\{ \left( 1 - \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right\} + \frac{1}{3} \frac{I_2^{1.5}}{I^{1.5}} - 2 \frac{I_2^{1.5}}{I^{1.5}} \left\{ \left( 1 - \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right\} \\
 &\quad + 6 \left\{ \left( 1 - \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right\}^2 \frac{I_2^{1.5}}{I^{1.5}} - \left\{ \left( 1 - \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right\}^4 \frac{I_2^{1.5}}{I^{1.5}} \\
 &\quad \left. - \frac{10}{3} \left\{ \left( \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} - \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right\}^3 \right] \\
 \\
 \textcircled{f} &= \left( -\frac{7}{108} - \frac{2}{9} \alpha + \frac{2}{9} \alpha^2 - \frac{2}{27} \alpha^3 \right) - \frac{l_n^3}{l^3} \frac{2}{9} \frac{E}{E_n} \frac{1}{\left( \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} - \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right)^3} \left[ \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} - 2 \left\{ \left( \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} - \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I^{0.5}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \ln \left\{ \left( 1 - \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right\} - \left\{ \left( 1 - \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right) \left( 1 + \alpha \frac{l}{l_n} - \frac{l}{l_n} \right) + \frac{I_1^{0.5}}{I_2^{0.5}} \right\}^2 \frac{I_2^{0.5}}{I^{0.5}} \right]
 \end{aligned}$$