

응력 특이점을 갖는 필릿 용접구조물의 피로해석을 위한 가상절점법을 이용한 구조응력 계산 기법 고찰

하청인** · 강성원* · 김명현* · 김만수** · 손상용** · 허주호**

*부산대학교 조선해양공학과

**대우조선해양주식회사

A Study on the Fatigue Strength Evaluation for Fillet Weldment including Stress Singularity using Structural Stress with Virtual Node Method

Chung-In Ha**, Sung-Won Kang*, Myung-Hyun Kim*, Man-Soo, Kim**, Sang-Yong, Sohn** and Joo-Ho Heo**

*Dept. of Naval Architecture & Ocean Engineering, Pusan National University, Busan 609-735, Korea

**Daewoo Shipbuilding and Marine Engineering Co.,Ltd., Gyeongnam 656-714, Korea

Abstract

Structural stress approach is well known as a mesh-size insensitive fatigue assessment method by using finite element analyses. It is, however, difficult to estimate the structural stress (SS) at weld end points due to stress singularities when shell elements are used. In this study, fatigue evaluations with longitudinal load carrying box fillet weldment under out-of-plane bending load have been performed by using virtual node method (VNM) in order to avoid the problem, which is called the weld end effect. Various combinations of virtual node parameters, such as reference point and virtual node locations, are investigated for the estimation of proper structural stress values applying VNM in a systematic manner. The appropriate guidance of virtual node parameter has been offered for the fillet weldment considered in the study. The structural stress values obtained by VNM have also been validated by comparing the result with finite element model including weld bead. Moreover, the fatigue strength of the fillet weldment based on the equivalent structural stress is shown to be consistent with the master S-N curve.

*Corresponding author : kimm@pusan.ac.kr

(Received December 23, 2005)

Key Words : Fatigue strength, Structural stress, Virtual node method, Fillet weldment, Out-of-plane bending

1. 서 론

대형 용접 구조물의 용접 토우부 피로강도 산정법으로 많이 사용되고 있는 방법으로 크게 핫스팟응력에 의한 방식(hot spot stress approach)과 공칭응력에 의한 방식(nominal stress approach)등이 있다. 그러나 핫스팟응력의 경우, 유한 요소 해석 시 사용되는 요소의 종류 및 크기에 따라 그 계산 결과 값의 편차가 크게 나타나는데 이는 요소의 적분점에서 계산된 응력 값을 내삽/외삽하는 방법에 따른 영향으로 알려져 있

다. 또한 공칭응력에 의한 방법의 경우, 기준에 분류된 S-N선도를 복잡한 실제 구조물에 정확히 적용하기에는 어려운 것으로 알려져 있다¹⁾.

한편 Dong²⁾등은 용접 토우부에 대해 요소크기에 민감하지 않은 구조응력에 의한 방식(structural stress approach)을 제안하였는데 이는 유한 요소 해석 결과에 대한 역학적 평형조건을 바탕으로 용접 토우부의 절점 변위로부터 직접 계산되는 등가 절점력을 이용하여 피로강도를 산정하므로 요소내의 형상함수를 이용하여 계산된 응력값에 비해 요소크기 및 종류에 대한 민감도가 낮은 것으로 알려져 있다³⁻⁴⁾. 또한 판 표면에 동일

한 응력이 발생하는 경우에도 그 적용 하중의 종류 및 두께에 따라 계산된 피로강도 결과는 다를 수 밖에 없으며⁵⁻⁸⁾, 이 때문에 균열 진전률 등을 고려한 등가구조응력은 다양한 용접부 형상에 대해서도 하나의 통합 S-N선도를 구현할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 구조응력 역시 유한 요소 해석 결과를 바탕으로 산정하기 때문에 용접구조물의 용접토우부와 같이 실제 용접부 형상이 유한 요소해석 모델의 형상과 차이가 크게 되면 정확한 피로강도의 산정이 힘든 경우가 발생한다. 특히 shell 요소를 이용한 유한 요소 해석 모델 구현 시, 일반적으로 용접 비드 형상을 생략하도록 되어 있다. 이때 구조응력을 산정하는 경우, 용접부 끝단에서 발생하는 응력 특이점(stress singularity)에 의해 정확한 피로 강도 산정이 어려운 경우가 발생하는데⁹⁾ 이를 용접부 끝단 효과(weld end effect)라고 하며 이를 해결하기 위한 방법중의 하나로써 가상 절점법(Virtual node method, VNM)이 이용되고 있다¹⁰⁾.

본 연구에서는 면외 굽힘 하중을 받는 하중 전달형 종방향 필릿 용접부에 대한 유한 요소 해석을 수행하고 가상절점법을 이용하여 구조응력을 산정해 봄으로써 시험편에 대한 가상 절점법 적용 기준의 적합성 검증을 실시하였다. 또한 제안된 시험편 모델에 대해 공칭응력을 기준으로 구한 피로시험 결과와 구조응력을 이용하여 예측한 피로수명의 비교를 통하여 그 타당성을 검토해 보고자 한다.

2. 대상 모델 및 유한요소해석

본 연구에 사용된 필릿 용접구조물은 Fig. 1(a)에 나타난 바와 같이 주부재(main plate)와 거셋(gusset)으로 구성되어 있다. 유한 요소 해석은 요소 변화에 따른 사례연구를 위해 요소 크기를 1.0t×1.0t, 0.5t×0.5t 및 0.25t×0.25t (단, t는 주부재의 판두께)로 분류하고 종류는 4-node 및 8-node shell 요소를 사용하였다. 해석에 사용된 유한 요소 모델은 Fig. 1(b)와 같으

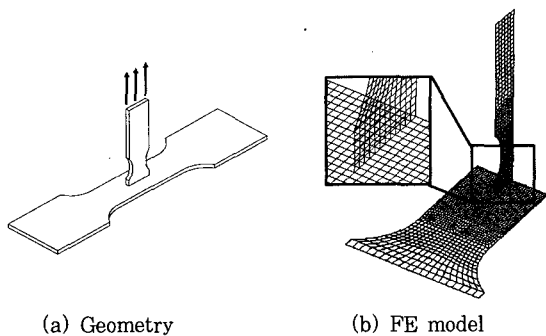


Fig. 1 Longitudinal load carrying box fillet weldment

며 용접 비드 형상은 고려하지 않았다.

3. Shell 요소를 이용한 구조응력

3.1 등가일 원리에 의한 구조응력²⁾

Fig. 2와 같은 shell 요소를 이용한 용접선 및 용접 토우부에 대한 구조응력(structural stress, σ_s) 계산을 위하여 먼저 각 절점 변위로부터 구한 절점력(nodal force, F)을 등가일의 원리에 의해 유도된 식 (1)을 이용하여 선분포력(line force, f)을 구하고 동일한 방법으로 절점모멘트(nodal moment, M)를 이용한 선분포모멘트(line moment, m)를 유도한다. 이때 선분포력 및 선분포모멘트는 용접선에 접하는 국부 좌표계 (x', y', z')를 기준으로 계산한다. 이렇게 구한 선분포력과 선분포모멘트를 이용하여 식 (2)로부터 막응력(membrane stress, σ_m)과 굽힘응력(bending stress, σ_b)의 합으로 정의되는 구조응력(structural stress, σ_s)을 구할 수 있다.

$$\{F\} = [L]\{f\} \tag{1}$$

$$\sigma_s = \sigma_m + \sigma_b = \frac{f_y}{t} + \frac{6m_x}{t^2} \tag{2}$$

이때 식 (1)의 $\{F\}$ 및 $\{f\}$ 는 절점력 및 선분포력을, $[L]$ 은 용접선에 대한 형상 함수를 의미한다. 식 (2)의 t 는 판 두께를 의미하고 f_y 및 m_x 는 국부 좌표계 (x', y', z')에 대한 선분포력 및 선분포모멘트를 의미한다.

한편 본 연구에서 검토한 하중 전달형 종방향 필릿 용접구조물의 피로강도를 산정하기 위해서는 먼저 용접부 끝단부에서 구조응력 값을 산정해야 한다. Fig. 3(a)와 같이 용접 비드가 생략된 모델이므로 하중 적용 및 균열방향을 고려하여 실제 용접선이 아닌 가상의 용접선을 따라 구조응력을 계산하였으며 Fig. 3(b)에 피로강도 산정을 위한 구조응력을 공칭응력에 대한 응력 집중계수 (SCF_{SS})로 계산한 결과를 나타내었다. 계산

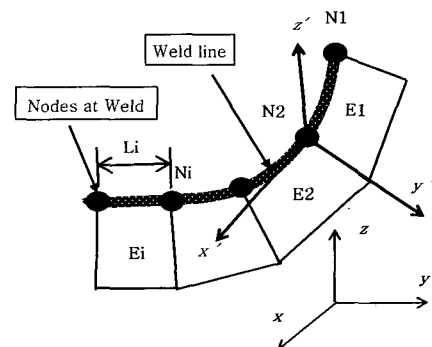


Fig. 2 FE model with weld line using shell element

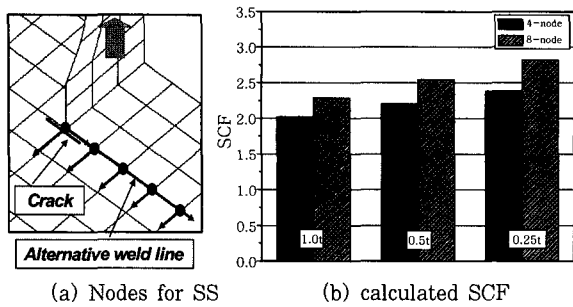


Fig. 3 Schematic for the required nodes for calculation & calculated SCF of structural stress w/o VNM

결과, 구조응력 결과값이 상당히 높은 결과를 보이고 있으며 요소크기에 따른 편차도 크다는 것을 알 수 있다. 이는 용접 비드가 생략된 shell 요소 모델에서 발생하는 용접부 끝단부에서의 응력 특이성에 의해 구조응력이 과도하게 평가되기 때문으로 판단된다.

3.2 가상 절점에 의한 구조응력 보정

앞서 기술한 바와 같이 유한 요소 해석 모델에 기인한 문제를 해결하기 위해 수치해석 기법인 가상 절점법을 적용하였다. 즉, Fig. 4와 같이 해당 요소 내에 가상 절점을 정의하고 이때 지정된 절점을 기준으로 양쪽 모두 각각 선분포력 및 선분포모멘트의 구배가 균일하다는 가정 하에 역학적 평형조건을 만족하는 새로운 선분포력 및 선분포모멘트를 구할 수 있는데 이때 용접부 끝단에서의 새로운 선분포력, f_1' 은 식 (3)의 형식으로 유도 가능하다. 선분포모멘트 m_1' 도 동일한 방식으로 얻을 수 있으며, f_1' , m_1' 을 이용하여 가상 절점을 적용한 구조응력 산정이 가능하다.

$$f_1' = \frac{1}{l \times l_1} [F_1(l_1 + l) + F_2(l_1 - l)] \quad (3)$$

가상 절점이 적용되는 용접 끝단부의 요소의 크기가 작은 경우 그 적용 범위가 매우 제한적이 되어 계산된

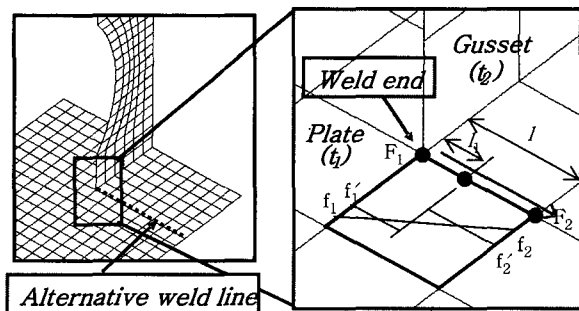


Fig. 4 Schematic for the Virtual node method

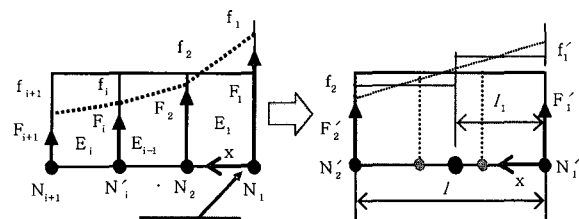
구조응력 결과값이 여전히 큰 것으로 나타났다. 따라서 충분한 가상 절점 적용 범위를 확보하기 위해 용접 끝단부의 요소 크기를 조절할 필요가 있는데, 이를 위해 요소 크기를 바꾸는 대신 Fig. 5와 같이 몇 개의 요소를 가상의 단일 요소로 정의할 수 있다. 이때 Fig. 5(a)의 경우, 절점 N_i 에서의 절점력 F_i 는 요소 E_i 및 E_{i+1} 에서 얻은 절점력들의 산술합이며 절점 N_1 및 N_{i+1} 에서의 절점력은 해당 요소가 하나이므로 요소 E_1 , E_i 에서 계산된 절점력이 된다. 이를 이용하여 Fig. 5(b)의 가상 단일 요소의 양 절점에서 식 (4) 및 (5)와 같은 평형 조건을 만족하는 새로운 절점력을 구할 수 있으며 같은 방식으로 절점 모멘트도 계산할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n F_{i+1} = \sum_{i=1}^2 F_i' \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i+1}x = \sum_{i=1}^2 F_i'x \quad (5)$$

이때 용접 토우부에서 가상절점까지 거리 l_1 에 대해 Dong은 피로 균열에 의한 파손 기준에 근거하여 $l \geq 2l_1$ 을 제시하고 있다.¹⁰⁻¹¹⁾ 그러나 아직 제시된 기준에 대한 연구 및 검증이 제대로 이루어지지 않고 있으며 또한 l 의 기준이 l_1 의 2배 이상이라는 다소 모호한 부분이 있으므로 본 연구에서는 제시된 형상의 용접 구조물을 이용하여 가상 절점법 적용 기준을 검증하기 위해 l 및 l_1 에 대한 사례 연구를 수행하였다.

제시된 시험편의 주요 치수는 길이 340mm, 폭 80mm이며 두께는 10mm이다. 이때 l 은 시험편의 반폭(half breadth) 즉, 40mm보다 클 수 없으므로 l 을 20mm, 30mm, 40mm로 분류한 후 각각의 경우에 대해 l_1 을 변화시켜가며 계산을 실시하였으며 이때 계산 결과는 Fig. 6과 같다. 계산된 결과, l 및 l_1 의 변화에 대한 결과값은 유한 요소 크기 및 종류에 따른 민감도는 없는 것으로 확인 되었다. 다음으로 l 및 l_1 의 변화에 따른 계산된 응력 집중계수의 변화를 살펴보면 앞서 Dong이 제시한 $l \geq 2l_1$ 영역에서는 l_1 에 따른 결과값의 편차가



(a) original element row (b) virtual single element

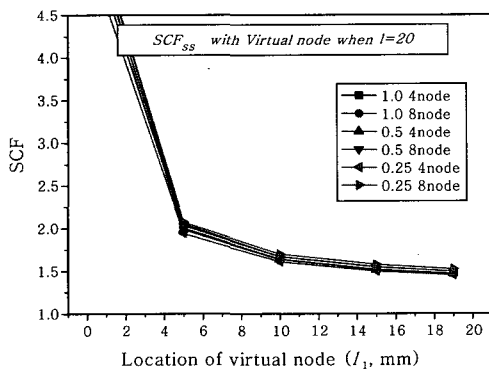
Fig. 5 Application of VNM with multiple elements

큰 반면 오히려 $l < 2l_1$ 의 영역에서 안정적인 결과값을 보이는 것으로 나타났다. 그러나 l_1 이 일정 이상 커진다는 것은 자칫 응력 집중 영향을 적절하게 고려하지 못할 가능성이 있으므로 $l \geq 2l_1$ 조건에서 적절한 l_1 의 값을 유도하기 위한 추가적인 사례연구를 수행하였다. 본 연구에서는 앞서 계산된 결과를 바탕으로 l_1 을 먼저 결정한 다음 가장 적절한 가상 요소의 크기 l 을 정하기로 한다. Dong은 l_1 의 크기는 허용 피로균열 길이로 가정할 수 있다고 하였는데 허용 피로균열 길이가 없는 경우에는 거셋의 두께(t_2)와 동일하게 가정할 수 있다고 하였다.¹⁰⁻¹¹⁾ 따라서 본 연구에서는 l_1 을 거셋 두께 즉, 10mm로 고정하고 l 의 변화에 따른 구조응력을 계산하

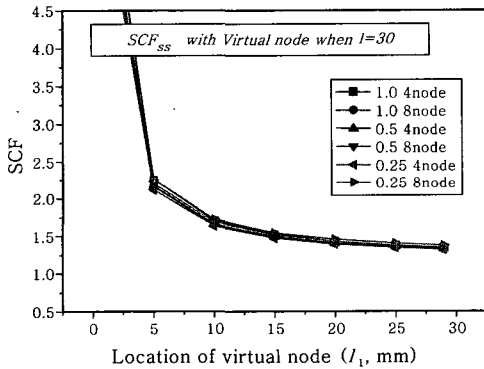
였다. 그 결과 Fig. 7에서 보는 바와 같이, 계산된 응력집중계수는 가상 단일 요소의 크기인 l 이 20mm, 30mm, 40mm인 경우에 대해 민감하지 않은 일정한 결과값이 도출됨이 확인 되었다. 따라서 본 연구에서 제시한 모델의 경우, 앞서 정의된 $l_1 = t_2$ 에 대해 $l \geq 2l_1$ 이 적절한 조건을 알 수 있다.

3.3 용접부 비드 모델을 이용한 검증

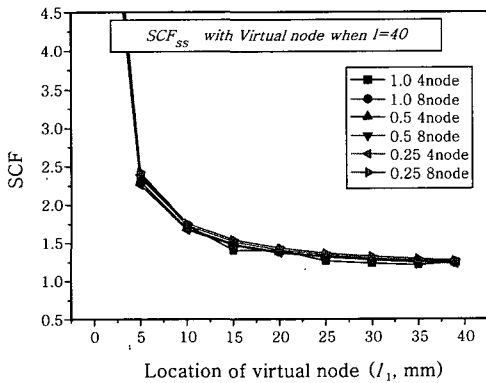
유한 요소 해석 모델의 요소 크기 및 종류에 민감하지 않은 파라미터 l , l_1 을 도입하여 계산된 구조응력 타당성을 검증하기 위해 용접비드를 포함한 유한요소모델에 대한 해석 결과를 가상 절점법에 의한 구조응력 결과값과 비교해 보았다. Fig. 8은 용접비드 형상이 고려된 유한 요소 해석 모델의 계산 방향 및 용접 비드 형상을 나타내고 있다. Fig. 9는 이를 이용한 구조응력 결과값과 앞서 구한 가상 절점법을 이용한 결과값을 비교한 것이다. 검토된 모델 모두 유한 요소 해석 모델의 요소 크기나 종류에 대한 영향을 받지 않을 뿐 아니라 그 결과값도 거의 일치함을 확인하였다. 따라서 본 연구에서 제시된 면외 굽힘 하중을 받는 종방향 필릿 용접구조물에 대한 구조응력 산정 시, 가상 절점 파라미터의 적용 조건은 앞 절에서 구한 $l_1 = t_2$, $l \geq 2l_1$ 이 적절함을 확인하였다. 그러나 본 연구에서 도출한 가상 절점 적용 기준을 다른 형상의 용접부 형상에 대해 범



(a) when $l=20$



(b) when $l=30$



(c) when $l=40$

Fig. 6 SS based SCF with respect to l , l_1

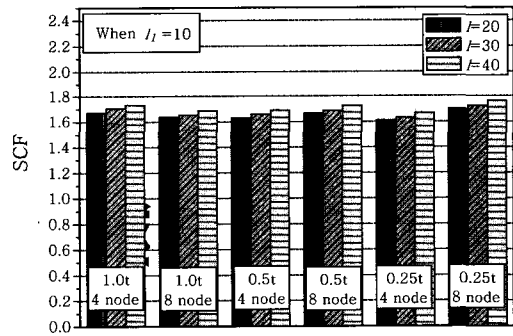
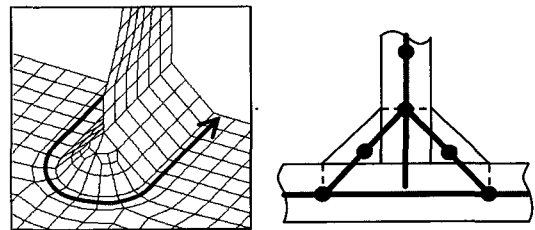


Fig. 7 SS based SCF when $l_1=10$



(a) FE model with weld bead (b) schematic for bead model

Fig. 8 Finite element model with weld bead & representation in an element model

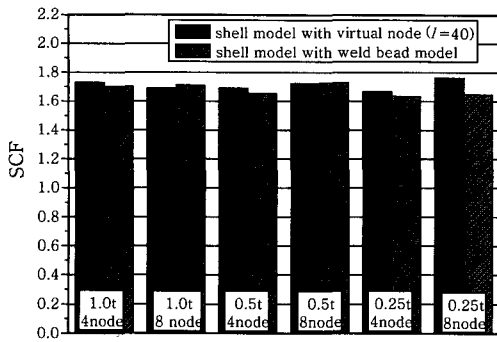


Fig. 9 SS based SCF by using FEM with weld bead

용으로 적용하기 위해서는 보다 다양한 용접부 형상에 대한 가상 절점법 적용 방법 및 이에 의한 결과 데이터 수집 등의 추가적인 연구가 요구된다.

4. 구조응력을 이용한 피로수명 평가

용접 구조물의 피로 수명은 균열 발생 수명(crack initiation life)보다는 균열 진전(crack propagation)에 의한 최종 파단(final rapid failure)의해 결정되므로⁷⁾ 그 구조물의 두께 및 하중모드에 따라 균열 성장에 큰 차이를 보이게 된다. 따라서 앞서 구한 구조응력 계산 결과는 판 표면의 응력값만을 산정한 결과이므로 정확한 용접부 피로거동을 예측하기에는 충분하지 않다. 따라서 용접부 균열 성장을 비교적 정확히 예측할 수 있는 응력확대계수(stress intensity factor)를 기반으로 한 균열 진전 모델 중 짧은 균열의 거동을 고려할 수 있는 2단계 균열 진전 모델(two-stage crack growth model)을 적용하여 판 두께 및 하중 모드에 의한 효과를 고려할 수 있으며¹²⁾ 이는 식 (6)과 같이 노치 효과를 고려한 Paris 식으로 표현 할 수 있다.¹³⁾

$$\frac{da}{dN} = C[f_1(\Delta K)_{a/t \le 0.1} \times f_2(\Delta K)_{a/t > 0.1}] \quad (6)$$

$$= C(M_{kn})^n (\Delta K)^m$$

여기서 a는 균열길이, C,m: 재료 상수, ΔK: 응력확대계수 진폭, n=2이며 M_{kn}은 notch induced stress intensity magnification factor이다. 이때 M_{kn}은 식 (7)과 같이 정의할 수 있다.¹⁰⁾

$$M_{kn} = \frac{K(\text{with local notch effects})}{K_n(\text{based on through thk. } \sigma_m \text{ and } \sigma_b)} \quad (7)$$

식 (6)을 적분함으로써 식 (8)과 같은 피로 수명의 식으로 표현이 가능하다.

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{td(a/t)}{C(M_{kn})^n (\Delta K)^m} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{C} t^{1-\frac{m}{2}} (\Delta \sigma_n)^{-m} I(r)$$

이를 정리하면 식 (9)와 같이 등가구조응력 (ΔS_{eq})을 기준으로 한 피로 수명의 관계를 얻을 수 있다.

$$\Delta S_{eq} = \frac{SCF_{ss} \Delta \sigma_n}{t^{\frac{2-m}{2m}} I(r)^{\frac{1}{m}}} = CN^{-\frac{1}{m}} \quad (9)$$

여기서 m=3.6, I(r)=f(Δσ_b/Δσ_s) (구조응력 진폭에 대한 굽힘응력 진폭의 비의 함수), Δσ_n은 공칭응력진폭, SCF_{ss}는 구조응력에 근거한 응력집중계수이다. 이렇게 구한 등가구조응력은 앞서 구한 구조응력에 하중 모드 및 크기 효과를 고려한 값으로써, 다양한 용접부 형상 및 하중 모드에 대한 피로 시험 결과를 하나의 통합 S-N선도로 나타낼 수 있다.

Fig. 10은 본 연구에 제시된 시험편에 대한 피로 시험 결과 및 시험 결과에 의해 구현된 S-N 선도를 공칭응력 기준으로 나타내고 있다. 본 실험은 일축 인장·압축 유압 서보 피로시험기(SAGINOMIYA, Japan)를 사용하여 완전 양진 하중 진폭으로 수행하였다. 하중 반복 속도는 2-5 Hz의 범위 내에서 조절하였고 피로 시험에 사용된 시험편은 총 15개이며 시험편이 완전 파단 될 때까지 실시하였으며 10⁷ 사이클을 피로한도로 고려하였다.

앞서 수행된 피로 시험은 하중 제어 방식의 피로 시험이므로 I(r) 함수 적용 시 하중 제어에 대한 I(r) 함수를 이용하여 등가구조응력을 산정하였다. 계산된 등가구조응력 및 피로 수명을 통합 S-N선도와 비교해 보면 Fig. 11과 같다.

등가구조응력을 기준으로 산정된 피로강도 결과값을 통합 S-N선도와 비교 했을 때 상대적으로 높은 피로강

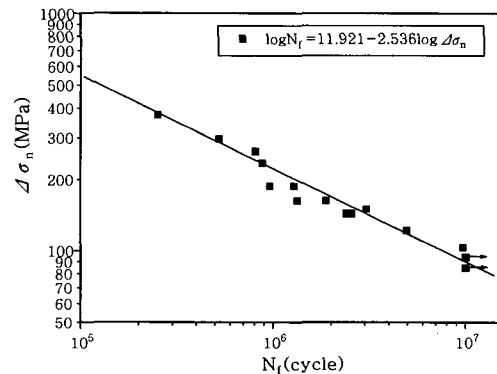


Fig. 10 Nominal stress based S-N curve

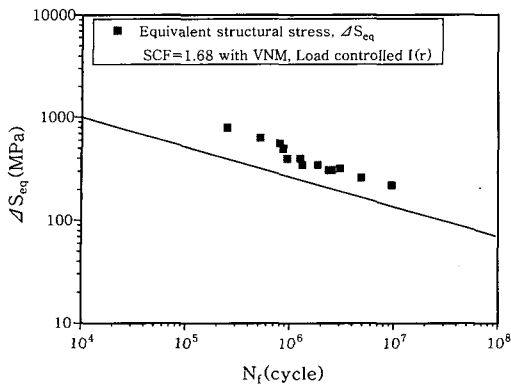


Fig. 11 Master S-N curve with Equivalent SS (load controlled)

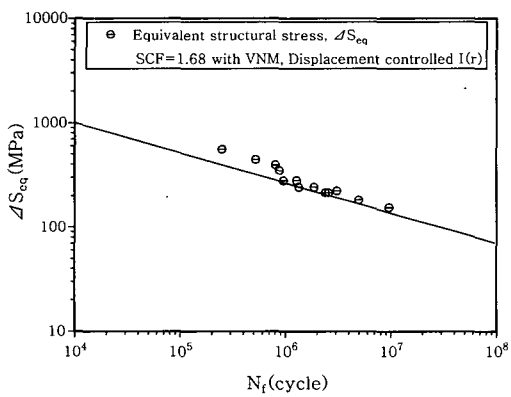


Fig. 12 Master S-N curve with Equivalent SS (displacement controlled)

도가 계산되는 것으로 나타났다. 이는 하중 제어 피로 시험을 기준으로 계산된 것이기 때문으로 추정되며 이를 변위 제어 상태에서 시험이 실시되었다는 가정 하에 $I(r)$ 을 수정하여 등가구조응력을 산정 후 통합 S-N선도와 비교해 보면 Fig. 12와 같이 되어 통합 S-N선도에 근접하는 것으로 나타났다. 그러나 실시된 피로시험은 하중제어로 실시된 시험이므로 그 원인을 살펴보면 크게 두 가지 가능성을 고려 할 수 있다. 첫째, 산정된 구조응력 결과 값이 너무 높거나 들쭉, 실시된 피로 시험이 균열이 진전함에 따라 변위가 커져 완전한 하중 제어가 되지 않았을 가능성이 그것이다. 따라서 계산된 피로 수명과 통합 S-N선도의 차이에 대한 추가적인 연구가 필요하다고 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 하중 전달형 필릿 용접구조물이 면외 굽힘 하중을 받을 때 구조응력을 이용하여 피로강도를 평가하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) Shell 요소를 이용한 유한 요소 해석 모델에 의

해 계산된 구조응력 산정 값은 용접 끝단부에서 발생하는 응력 특이점 때문에 과도하게 산정됨이 확인되었다. 따라서 용접 끝단부 효과를 해결하기 위해 가상 절점법을 적용하였으며 계산된 구조응력 결과값은 가상 절점 파라미터의 변화에 민감한 것으로 확인 되었다.

2) 가상 절점 파라미터에 대한 일련의 사례연구를 실시한 결과, 본 연구에 제시된 시험편의 경우 Dong이 제시한 가상절점 파라미터의 조건인 $l_1=t_2$, $l \geq 2l_1$ 과 일치하는 것으로 나타났으며 이는 요소의 크기 l 이 $l \geq 2l_1$ 를 만족하는 경우, 계산 결과에 영향을 주지 않는 것을 의미 한다. 또한 계산된 구조응력 결과값은 유한 요소 해석 요소 크기 및 종류에 따른 영향도 거의 받지 않고 일관성 있게 구해짐을 확인 하였다.

3) 가상 절점법에 의해 계산된 구조응력 결과 값을 검증하기 위해 shell 요소에 의한 용접부 비드 형상이 구현된 유한 요소 해석을 이용하여 용접부 비드를 따라 구조응력을 계산하였다. 그 결과, 앞서 구한 가상절점 파라미터에 의한 구조응력 결과값과 거의 일치함을 확인하였다.

4) 하중 모드 및 크기 효과를 고려한 등가구조응력 및 피로시험 결과를 이용하여 통합 S-N선도와 비교해 본 결과 다소 높은 피로수명이 산정됨이 확인되었다. 이에 대한 원인으로 구조응력 산정 오차 혹은 피로시험 오차 등을 고려할 수 있다. 따라서 이에 대한 추가적인 연구가 필요하다고 판단된다.

후 기

이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

1. Y. I. Kim, J. K. Kang and J. H. Heo : A study on the Performance of Mesh Insensitive Structural Stress for Fatigue Strength Evaluation, Proceedings of SNAK (2005), 965-970, (in Korean)
2. P. Dong, J. K. Hong and Z. Cao : A Mesh Insensitive Stress Procedure for Fatigue Evaluation of Welded Structures, IIW Doc. No. XIII-1902-01/XV-1089-01, International Institute of Welding (2001)
3. C. I. Ha, et al. : A study on the fatigue strength evaluation for fillet weldment using structural stress with virtual node method, Proceedings of KWS (2005), 85-87, (in Korean)
4. C. I. Ha, et al. : A comparative study for the fatigue assessment of fillet weldments using structural stress and hot spot stress, Proceedings of SNAK (2005), 669-674, (in Korean)

5. S. W. Kang, et al. : Fatigue Strength of Fillet Weldment under Out-of Plane Bending Load, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 40-1 (2003), 28-35 (in Korean)
6. S. J. Maddox : The effect of Plate Thickness on the Fatigue Strenght of Fillet Welded Joints, Abington publishing (1987), 10-12
7. T. R. Gurney : Fatigue of Welded Structure, Cambridge University Press (1979), pp. 37, 70-71
8. A. Almaer : Fatigue Handbook, Tapir (1985), 220- 222
9. D. Radaj : Design and analysis of fatigue resistant welded structures, Abington publishing (1990), 244-245
10. P. Dong : Battelle Structural stress JIP Final Report, No. N004431-01 (2004)
11. P. Dong : Battelle Structural stress JIP Topical Report, No. N004431-03 (2003)
12. Y. C. Jeon et al. : A study on fatigue life prediction of welded joints through fatigue test and crack propagation analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 38-3 (2001), 93-106 (in Korean)
13. P. Dong, J. K. Hong and Z. Cao : Stress and stress intensities at notches: 'anomalous crack growth revisited, International journal of fatigue (2003)