대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.2, 123-138. Jun. 2006

분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구[1)]

정 은 실*

이 연구는 분수 개념의 여러 가지 의미를 분석해보고, 분수 개념의 생성 과정을 역사 발생적으로, 심리적으로 분석하고 이를 바탕으로 현재 지도되고 있는 7차 교육 과정에 의한 교과서의 분수 개념 도입과 관련한 내용을 비판적으로 분석해 보면서 그 교육적 시사점에 대해 논의한 것이다. 그 논의의 결과를 요약하면 다음과 같다.

분할분수는 분류된 다른 분수와 그 의미가 중첩되어 있으므로, 다른 분수와 함께 묶어 분류하는 것보다 분할분수는 독립시키고 나머지 분수들을 분류하도록 한다. 그리고 분수 개념은 분배와 측정 과정에서 발생하였으므로 분수를 도입할 때 분배, 측정과 관련하여 등분할 활동과 양분수를 강조하는 것이 바람직하다. 또한 분수는 단위분수를 단위로 하여 구성되었으므로, 학교에서도 단위분수를 바탕으로 분수를 구성해 나가는 것이 바람직하다.

I. 서 론

분수 개념은 초등학교 수학에서 다양한 수학적 사고의 기초가 되는 중요 개념 중 하나이지만, 아동들이 다루기가 어려운 복잡한 개념이기도 하다. 분수 개념 자체가 여러 의미를 가지고 있어서 이해하기 어려울 뿐 아니라 아동들이 이 어려운 개념을 진정으로 이해할 수 있는 방식으로 학습할 기회를 갖지 못하고 있는 것이다. Clements와 Del Campo(1990:188)는 "대다수의 학생들에게 있어 분수는 학교 수학 수업 시간에 억지로 다루는 것으로서, 교실 밖과는 거의 관련이 없다. 분수 지식은 자연스러운 것이 아니다. 단지 좀더 많은 수학을 공부하기 위한 목적으로만 필요한 것이다."라고 하며 분수 학습의 어려움을 말하고 있다.

분수 개념의 의미를 분류하는 여러 연구자들의 글들을 보면 분수가 무얼 뜻하는지에 대해 일치하지 않고 있다(유현주, 1995;Kieren, 1981; Behr, Lesh & Post, 1983). 이에 대한 기본적인 생각과 문제점에 대해 점검해볼 필요가 있다. 또한 수학적 개념의 발생에는 역사가 개입되어 있기 마련이다. 이 과정을 이해하는 것이 수학교육에 유익하다는 것은 한 사람이 어떤 수학적 개념을 이해하는 과정과 그 개념이 수학사적으로 발전해 온 과정이 유사하거나 같을 수 있기 때문이다. 뿐만 아니라 개념의 발생 과정 중에는 그 개념을 이해하는 인식 주체의 심리적 요인을 무시할 수 없기 때문에 분수 개념의 심리적 근원이 무엇인지도 찾아보기로 한다.

분수 개념의 여러 가지 의미를 역사 발생적으로, 심리적으로 분석하고 이를 바탕으로 현재 지도되고 있는 교과서의 내용을 분석해 보

---

* 진주교육대학교(esjeong@cue.ac.kr)
1) 이 논문은 2005년도 진주교육대학교 가정학술연구재단 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

면서 교육적 시사점을 찾아보는 것이 본 연구의 목적이다.

II. 분수 개념의 의미 분석

분수 개념은 여러 가지 개념이 복합된 종합적인 '거대개념(mega-concept)'(Wagner, 1975:8)으로 그 수준이 다르며 그 하위 개념이 여러 가지이다. 이 절에서는 분수 개념의 다양한 의미에 대해 고찰해보고 역사적으로 분수 개념이 어떻게 형성되어 왔는지를 살펴보기로 한다.

1. 분수 개념의 다양한 의미

유리수 개념은 수학사에서 분수보다 나중에 형성된 개념이지만 정의가 비교적 분명하게 되어 있다. 수학에서 유리수는 정수로부터 동치관계가 정의된 정수의 순서쌍으로 정의한다. 그러나 '분수'에 대해서는 정의가 잘 되어 있지 않고, 사용될 때마다 그 의미가 조금씩 다르다.

먼저 '분수'라는 용어에 대해 생각해보자. 분수는 한자 分數를 음역한 것으로, 그대로 직역하면, '나누어진 수'이다. 영어인 fraction은 라틴어 *fractio*에 유래하는데, 이것은 '부수다(to break)'의 의미를 갖는 라틴어 동사 *frangere*에서 유래한다.[2](Bassarear, 2001 : 240)

여기서 주목할 것은 fraction이라는 영어와 달리 우리 말 분수(分數)라는 용어 자체가 분수는 수(數)임을 암시하고 있다. 미국의 초기 산술 교과서에서도 fraction대신에 broken number란 용어가 사용되기도 했다. 그러나 역사적으로 초기에는 분수를 수로 취급하지 않았다. Wagner(1975:35)는 기원 전 500년경의 피타고라스학파 사람들은 '분수를 익숙하게 사용했음에도 불구하고, 분수를 수로 생각하지 않았다'고 말하고 있다.

지금도 분수를 말할 때에 유리수와 동일한 수로 보는가 하면, 단순한 기호로 보기도 한다. 만일 분수가 수이고, 4/2는 분수라고 하면, 그리고 2와 4/2가 같은 수라고 하면, 2도 마땅히 '분수'여야 한다. 분수를 기호로 본다는 것은 그 형식에 준거를 맞추는 것이다. 즉 분수는 수평선을 긋고 숫자를 그 위와 아래에 쓴 형태 즉 a/b형태로 이루어진 기호이다. 그러면 4/2는 분수이지만 2는 분수가 아니다.

우리나라에서 현재 사용되고 있는 교과서의 분수 도입 부분의 설명도 분수를 수라고 하면서도 애매한 부분이 있다.

> '색칠한 부분은 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3입니다. 이것을 3/4[3]이라 쓰고 '사분의 삼'이라고 읽습니다.
> 1/2, 1/3, 3/4과 같은 수[4]를 분수라고 합니다.'(교육인적자원부, 2001: 94)

이 정의는 분수 개념의 여러 가지 의미 중 부분과 전체 사이의 관계를 나타내는 '등분할의 분수'의 의미이다. '...과 같은 수'를 '분수'라고 하고 있으니 분수를 수로 취급하고 있다. 그러나 그 앞의 설명에서 말하는 '이것'이 '색칠한 부분' 즉, '전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3'이라고 할 때, '이것'을 '수'라고 하기에는 애매한 면이 있다. '전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3'은 수라기 보다는 어떤 상태 또는 관계

---

2) 영어 fraction을 처음 사용한 사람은 1321년 쵸서(Chaucer)이다.
3) 실제 교과서에서의 분수 표기는 $\frac{3}{4}$ 이지만 편집의 편의를 위해 이하에 나오는 모든 분수는 '3/4'과 같은 방법으로 표기한다.
4) 이하 인용문 중의 이탤릭체는 연구자가 강조하기 위한 것이다.

를 말하는 것으로 보인다. 반면에 일본 교과서의 분수 설명에서는 수의 '크기' 특히 '상대적인 크기'라는 관점이 분명하게 드러나고 있다.

'2등분한 것 중의 한 부분의 *크기를*, *처음 크기*의 '이분의 일'이라 말하고, 1/2이라 씁니다.'(赤攝也 外, 1996: 12)

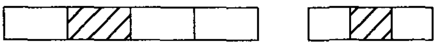
'4로 나눈 것 중의 3'에서는 '2등분한 것 중의 한 부분의 크기'와 같은 '크기'의 의미가 드러나지 않는다. 크기를 갖는 수로서의 분수를 드러내기 위해서는 분수의 정의를 좀 더 다듬어 나타내야 할 것이다.

분수 개념의 여러 의미를 어떻게 분류하고 있는지에 대해 고찰해보자. Wagner (1975)는 분수에 대한 일치된 정의는 없지만, 분수 개념의 의미를 유리수와 동일한 수, 기호로서의 분수, 순서쌍, 몫, 비, 연산자, 단위분수의 배수인 곱[5] 등 7가지 형태로 나누고 있다. 이 7가지 형태 중 앞의 두 가지와 뒤의 5가지는 성격이 달라 보인다. Vergnaud(1983:160)도 '분수라는 말은 전체 중 일부분을 나타내는데 사용하는가 하면, 때로는 단위의 정수배로 나타낼 수 없는 부분적인 크기를 나타내기도 하고, 때로는 기호의 순서쌍 q/p, 때로는 같은 종류의 두 양을 관련짓는 관계를 나타내기도 한다'고 하면서 분수 개념의 다양한 의미를 언급하고 있다. 분수가 아닌 유리수 개념의 의미를 분석한 것이긴 하지만 여러 학자들이 유리수 개념의 하위 개념[6]에 대해 논의하고 있다(유현주, 1995, Kieren, 1981, Behr, Lesh & Post, 1983). 대체로 부분-전체 관계로서의 분수, 비(ratio)로서의 분수[7], 몫으로서의 분수, 연산자로서의 분수 등이 공통이고 학자에 따라 선형좌표[8], 비율(rate)[9] (Behr, Lesh & Post, 1983), 측정수(유현주, 1995, Kieren, 1981) 등을 덧붙이기도 한다. 일본에서는 부분-전체 관계를 의미하는 분수를 분할분수 또는 조작분수[10]라고 부르고 있으며, 그 외 비, 몫, 측정수, 연산자 등의 의미를 갖는 분수를 각각 비율분수, 몫분수, 양(量)분수, 연산분수(數學教育學研究會編, 1980)로 부르고 있다. 우리나라에서는 분수를 등분할의 분수(조작의 분수), 양의 분수, 비율의 분수, 몫의 분수의 네 가지로 분류하고 있다.(교육부, 1996a:136, 교육부, 1999:63) 이 연구에서는 위 네 가지 분수 외에 연산자로서의 분수까지 포함하여 고찰하기로 한다. 이 분수들을 각각 무엇이라고 지칭하는지에 대해서도 논의가 필요하지만, 여기서는 편의상 위의 분수를 순서대로 각각 분할분수, 양분수, 비율분수, 몫분수 그리고 연산자분수라고 부르기로 한다.

분수 개념의 여러 의미 또는 분수의 분류 중에서 부분-전체 관계를 뜻하는 분할분수는 학생들이 분수를 완전하게 이해하는 출발점이자 기초가 되기 때문에 중요하다(Post, Behr, Lesh, 1982). 분할분수는 분리량이나 연속량을 등분할 한 후 그 일부를 나타내는 분수인데, 전체 또

5) 예를 들면, 2/3를 1/3이 2개 즉 2 × 1/3로 해석하는 것이다.
6) 유리수의 '하위개념'에 해당하는 말도 학자마다 다양하다. Carraher(1993:281)에서 소개하는 용어를 보면, 모델, 해석, 하위개념(subcostructs), 의미, 측면(aspects) 및 특성(personalities) 등이다.
7) 우리말로는 비로서의 분수가 아니라 비의 값 또는 비율로서의 분수라고 표현해야 옳다. 우리는 a/b를 비라고 하지는 않는다. 영어권에서는 ratio에 a/b까지 포함하고 있다.
8) 수직선 위의 점으로서의 유리수를 말한다.(Behr, Lesh & Post, 1983:55)
9) 여기서 비율이라고 번역한 rate는 '두 개의 다른 양 사이의 관계로서의 양'(Behr, Lesh & Post, 1983:55)인 반면, ratio는 두 개의 같은 양 사이의 관계로서의 양을 말한다. 우리나라 초등학교 교과서에 나오는 비율의 의미는 '기준량에 대한 비교하는 양의 크기'로 특히 기준량이 1일 때의 비율을 '비의 값', 기준량이 100일 때의 비율을 '백분율'이라고 하여 앞의 의미와는 다르다.
10) 몇 개로 등분할 조작을 하고 그 중에 몇을 취하는 조작을 하기 때문에 조작분수라고 한다.

는 그 부분의 크기가 아니라, 전체에 대한 부분의 상대적인 크기를 가리키기 때문에, 그 의미를 이해하기가 쉽지 않다. 예를 들어 다음 그림을 보자.

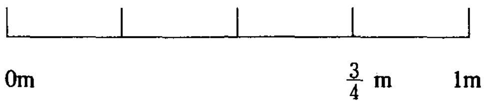


[그림 II-1] 분할분수 모델

위의 그림에서 전체 넓이로 본다면 1/4이 더 크지만, 상대적인 양의 크기로 보면 당연히 1/3이 더 크다. 분수를 막 배우고 있는 학생들에게 그때까지 크기의 기준이었던 절대적인 크기가 아니라 상대적인 크기를 찾고 있다는 것을 이해하도록 하는 것이 쉽지 않은 것이다. 분할분수의 의미를 이해하려면 여러 가지 크기의 물건을 가지고 여러 가지 다른 방식으로 전체를 분할해보는 다양한 활동이 유용하다.

그런데 이 분할분수는 앞서 분류된 다른 분수와 의미가 조금은 중첩되어 있음을 알 수 있다. 분할분수는 어떤 양을 등분할한 후 그 일부가 전체의 얼마인지를 나타내는 분수이고, 비율분수는 두 양을 비교할 때, 그 중 한 양을 기준으로 하여 다른 양을 나타내는 분수이다. 예를 들면 학생 5명 중 남학생이 2명일 때, 남학생은 전체 학생 수의 2/5이며, 이 경우의 2/5는 비율분수이다. 이 2/5는 부분(남학생 2명)과 전체(5명) 사이의 관계로 볼 수도 있으므로 분할분수로 해석할 수도 있는 것이다. 다만 비율분수는 부분-전체 관계 뿐 아니라 부분과 부분 사이의 관계 예를 들면 남학생은 여학생의 2/3

라고 말할 수 있는 점이 다르다. 양분수는 길이, 무게, 부피, 시간 등 양의 측정과 관련하여 측정 단위 이하의 양을 잴 필요가 있을 때, 그 나머지의 양을 재기 위한 목적으로 만들어진 분수로서, 이 경우는 분수가 절대적인 크기를 갖는 수임이 분명히 드러난다. 그런데, 예를 들어 3/4m는 1m를 4등분한 길이 중에 3개의 부분을 뜻하는 것으로 볼 수 있으므로 이것도 분할분수로 해석할 수 있다.

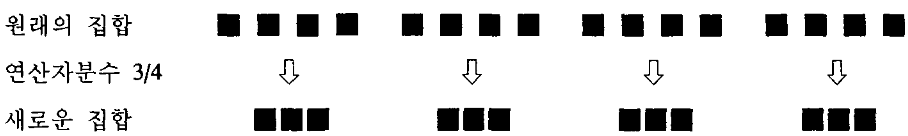


[그림 II-2] 양분수 모델

또한 연산자분수는 도형을 축소 또는 확대하거나 원소의 개수를 주어진 분수만큼 늘이거나 줄이는 함수의 역할을 하는 것으로써, 예를 들어, 16개의 3/4은 12이다라고 할 때의 3/4이 연산자분수이다([그림 II-3]).

그런데 여기서 새로이 만들어진 집합은 원래의 집합을 4등분한 것 중의 3개에 해당하므로 분할분수로 해석할 수도 있다. 몫분수의 경우도 마찬가지이다. 그러므로 분수의 의미를 분류할 때, 분할분수를 다른 분수와 함께 묶어 분류하는 것보다 분할분수는 따로 독립시켜 생각하고 나머지의 분수들을 분류하는 것이 타당해 보인다.

학교에서는 아동들에게 분수 개념의 여러 의미를 한꺼번에 파악하도록 할 수 없기 때문에



[그림 II-3] 연산자분수 모델

오랜 기간의 계열적인 과정을 통해서 획득하도록 하고 있다. 현재 분수 개념은 초등학교 2학년에서부터 시작하여 거의 전 학년에 걸쳐서 지도하고 있다. 그런데 앞의 여러 분수 개념의 의미는 서로 비슷한 수학적 성질을 갖는 것으로 볼 수 있기 때문에, 교육과정에서 하나 또는 둘 정도만 집중해서 다루는 경향이 있다. 그러나 학습자 관점에서 분수에 대한 학습은 그리 간단하지 않다. 서로 다른 의미와 상황은 학생으로부터 질적으로 다른 반응을 이끌어낸다. 더구나 각 의미를 나타내는 모델은 적용하는 것이 다르고 다른 수학적 아이디어에 다르게 확장된다. 따라서 모든 의미에 대한 경험을 교육과정에 체계적으로 표현해야 한다.

2. 분수 개념의 역사적 분석

역사 발생적 원리에 따르면, 어떤 개념의 역사적 발달 과정과 학교 수업의 발달 과정 사이에는 밀접한 관계가 있다. 달리 말해서 발생적 접근은 학교 교육의 강력한 도구이다. 여기서 분수 개념의 역사적 발달 과정을 재구성해보고, 교수학적 시사점을 탐구해 보려고 한다.

분수 개념의 기원은 아주 오래전으로 거슬러 올라가기 때문에, 그 과정을 상세하게 설명하는 것은 거의 불가능하다. 하지만 자연수 개념은 물건을 세는 과정을 추상한 반면에, 분수 개념은 길이, 넓이, 무게, 시간과 같은 양을 측정하는 과정에 그 뿌리를 두고 있다는 것은 널리 받아들여지고 있다. Gibb, Jones, Junge(1959 : 29)는 '역사적으로 분수가 만들어진 것은 세기에서 측정으로의 변화 때문이다'라고 밝히고 있다. Courant과 Robbins(1943:52)도 분수를 '측정을 하기 위한 도구'로 여기고 있다. Filep (2001)은 세기의 단위는 더 이상 나눌 수 없는 *하나*이고, 측정의 단위는 나눌 수 있는 측정 *단위*로 보고, 이산량은 어떤 것이라도 자연수로 셀 수 있지만, 연속량을 좀 더 정확하게 측정하려는 요구는 측정 *단위*를 보다 작은 부분으로 나눔으로써 분수를 만들어내게 되었다고 말하고 있다. 처음에 사람들은 아마도 측정에서 나머지 부분을 무시했을 것이다. 그러다가 사람들은 이 나머지에 주목하게 되고, 이 주목한 부분이 첫 분수가 되었다고 할 수 있다. 반이라는 개념의 출현과 함께 *전체*와 *부분*은 물론 *하나*와 *단위*는 분리되었다.[11)]

Eugene(1958)은 물건을 나누고 그 나눠진 부분에 대해 말할 때, 처음엔 보다 작은 단위를 만들어 냄으로써 분수 사용의 어려움을 피해 나갔다고 말하고 있다. 현대적 표현으로 말하면 1/2m라는 분수를 사용하지 않고 보다 작은 단위 cm를 만들어서 50cm라고 표현했다는 것이다. 그러나 점진적으로 단위분수 개념이 개발되었다.

분수 발달의 초기 단계에 대해서 알려주는 가장 중요하고 오래된 원전은 기원 전 1650년경의 린드 파피루스이다. 이집트 수학에서는 곱셈도 나눗셈도 없고 오직 덧셈뿐이었다. 곱셈은 계속 두 배하기와 더하기에 의해 행해졌다. 이집트인들은 2/3를 포함한 단위분수만을 사용하였다. 그들은 기호 위에 '부분'을 의미하는 특별한 표시를 하여 구별된 자연수로 그 분수들을 나타내었다. 그래서 그들은 현대적 의미의 분수를 몰랐다고 할 수 있다.

린드 파피루스에 의하면 이집트인들은 빵 2개를 7명이 나누어 먹는 것과 같은 분배 문제

11) Struik(1967)은 Miller의 글을 인용하여, 반(이분의 일)을 뜻하는 방언이 '둘(2)'과는 직접적인 관련이 없었다고 하면서, 이것은 1/2이라는 개념이 2라는 정수 개념과는 독립적으로 생성됐음을 보여주는 것 같다고 말하고 있다. Boyer(1968:5)도 일반적으로 분수 개념은 인간이 만든 정수 체계와는 밀접하게 관련이 되어 있지 않다고 하고 있다.

를 풀었다. 2/7와 나눗셈 개념을 모르고 어떻게 이 문제를 풀 수 있었을까?

그들은 먼저 두 빵을 각각 반으로 나누었다. 그 반을 새로운 단위로 여기고 그걸 다시 반으로 나눈다. 이제 8개의 4등분된 빵을 얻었다. 각 사람에게 한 조각씩 나눠주면 하나의 4등분된 빵만 남는다. 남은 부분(1/4)은 7개 조각으로 똑같이 나누어 한 조각(원래 단위의 1/28)씩 각 사람에게 나눠주면 그 결과는 2/7 = 1/4 + 1/28 이다. 다시 말하면, 빵 2개를 7명이 나누어 먹었을 때, 한 사람이 먹는 빵의 크기를 좀 더 정확하게 측정하여 1/4 + 1/28과 같이 단위분수만을 사용하여 나타낸 것이다.

이와 같이 초기 이집트인의 분수 취급에서 본질적인 특징은 단위분수만을 사용하는데 있었다. Eugene(1958)에 따르면 산술가들은 오래 전부터 1/10을 인식할 수 있었지만 말로나 정신적으로 그 복수(複數)를 생각하지 못했다. 그러나 아메스 시대 이전에 비와 비슷하게 생각하기 시작했다. 예를 들면, 수 2를 43등분한 것 즉 2 : 43이나 또는 '1/43의 두 배'를 현대적 기호를 사용하여 나타내면 2 : 43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301 으로 표현하였다. 실제로는 덧셈 기호도 사용하지 않았다. 왜 그들이 분수를 단위분수로만 나타내었는지에 대해 Eugene (1958 : 212)은 '전통의 힘'을 보여주는 것이라고 말한다. 아메스의 선조들이 그랬기 때문에 아메스도 그랬다는 것이다. 그러면 아메스의 선조들은 왜 그랬는가에 대한 설명은 Karpinski (1925)의 설명이 타당해 보인다. 분모와 분자의 결합으로 되어있는 분수 형태가 복잡하여 어렵기 때문에, 이집트인들은 분자가 단일체인 단위분수에 집중함으로 그 어려움을 피하기 위해 그랬다는 것이다. Clements와 Del Campo(1990 : 182)도 m/n 형태의 분수는 '초보적인 것이 아니고 어딘가 불완전하기 때문에' 단위분수로만 나타냈다고 말하고 있다. 바빌로니아에서 60진법으로 단위분수를 나타낸 것도 현재 사용하고 있는 십진기수법의 소수 표현처럼 수를 쉽게 표현하는 것에 불과하다고 할 수 있다.

그런데 하나의 분수를 단위분수의 합으로 나타내는 방법은 여러 가지가 있다. 그런데 왜 어떤 것은 다른 것보다 더 좋아했는지는 분명하지 않다. Eugene(1958)은 이것을 통해 그 당시 계산가들이 각자의 비밀 규칙에 의해 계산했거나 반복적으로 시행착오를 하면서 힘들게 계산하였음을 말해주고 있다고 말하고 있다.

곱셈 개념의 도움을 받아 단위분수의 경계선을 점진적으로 넘어선 사람은 아라비아인이었다.(Filep, 2001) 처음에 그들도 이집트인처럼 단위분수 분해를 사용했지만, 단위분수의 곱도 허용하여 다음과 같이 표현했다.

2/5 = 1/3 + 2/3 × 1/10,

9/10 = 1/2 + 1/3 + 2/3 × 1/10

분수 k/n을 'n등분된 k개의 부분'이라고 읽었는데, 이것은 k/n = k × 1/n로 해석하는 것이다.

Filep(2001)에 따르면 분수 개념의 발달 단계는 측정수로서의 분수에서, 단위로서의 전체에 대한 상대적인 양 즉 비로서의 분수 그리고 마지막으로 몫으로서의 분수이다.

위의 분수 개념의 역사적 발달 과정으로부터 분수가 생성된 배경을 어떻게 학습 내용에 반영하는가에 대한 교육적 시사점을 얻을 수 있다. 분수는 분배와 측정 과정에서 발생하였으므로 분수를 도입할 때 분배와 측정과 관련하여 도입하는 것이 바람직하며, 분수를 다루는데 있어서 단위에 대한 생각을 강조해야 할 것이다.

분수 개념 형성은 단위 부분인 간단한 단위분수로부터 시작하여 점진적인 과정으로 이뤄져야 한다(Filep, 2001). 처음에 아이들에게는 반, 반의 반, 삼분의 일 등 어떤 단위의 부분이

어야 하지 결코 분수여서는 안 된다. 2가 두 개의 전체인 것처럼 1/2은 단위를 이등분한 부분 중의 하나이다. 이 부분을 셀 때 아이들은 그것을 새롭고, 보다 작은 단위로 여긴다. 분모와 분자를 조기에 도입하는 것은 아이들 생각에 혼란을 가져오며, 1/2을 두 개의 수로 쪼개어 생각하도록 만든다. 우리말의 '반'과 같이 모든 언어에서 1/2을 뜻하는 말은 1과 2의 이름과 관련을 맺고 있지 않다. 자연수에서 1을 바탕으로 수를 구성하듯이 분수에서 단위분수는 가장 기본적인 단위이므로, 이를 바탕으로 분수를 구성하도록 해야 한다. 따라서 3/4은 '전체를 4로 나눈 것 중의 3'이라고 하기보다는 '1/4이 3인 수' 즉 3 × 1/4로 설명하는 것이 분수에 대한 개념을 더 분명하게 하는 것이다.

3. 분수 개념의 심리적 근원에 대한 고찰

분수 개념을 이해한다는 것은 분수 개념이 어떻게 그 개념 또는 보다 큰 수의 구조 그리고 다른 관련 수학 구조와 조화를 이루는지를 이해하는 것을 의미한다(Wagner, 1975:65). 피아제의 균형 이론에 따르면 새로운 개념은 현존하는 구조를 조절하거나 스스로 동화함으로써 그 구조와 조화를 이루어야 한다. 전통적으로 초등학교에서는 자연수를 배우고 정수를 배우기 전에 분수를 배우는데, 학생들은 새로운 수인 분수가 이전까지 알고 있는 자연수의 구조와 어떻게 조화를 이루는지를 알 필요가 있다. 보통 분수를 자연수가 아닌 양의 수로 인식하는 것은 분수가 도입되는 시점에서의 수 체계에 대한 제한된 견해 때문이다. 분수는 또한 물체의 일부로 도입되기도 하는데, 이 경우 학생은 나누는 것이 가능한 물체에 대한 개념을 실물의 항존성 개념 구성과 조화를 이루어야 한다. 또한 학생은 가역적인 생각, 즉 전체가 부분 부분으로 나눠지고 다시 그것을 조합하면 전체가 된다는 식으로 분수 개념을 구성해야 한다.

역사적으로 가장 오래된 린드 파피루스의 분배 문제에서 보듯이 분수에 대한 기본적인 아이디어는 물건을 나누는 경험으로부터 나온다. 공평하게 나누기 위해서는 똑같은 크기로 나누어야 한다. Vergnaud(1983:161)는 '분수에 대한 첫 경험은 전체를 똑같은 부분으로 나누는 것'이라고 하고 있고, Smith III(2002)도 등분할(partitioning) 즉 어떤 양을 똑 같은 크기 또는 수로 나누는 활동은 분수에 대한 초기의 아이디어로서 분수 개념의 근원이라고 주장하고 있다.

피아제와 그 동료들도 분수 개념의 근원은 등분할에 있다고 보고, 아동들의 등분할 능력이 어떻게 발달해 나가는지에 대해 탐구했다(Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960). 그들은 분수 개념은 부분과 전체와 관계, 그리고 부분과 부분과의 관계에 의존한다고 하면서, 그 관계를 구성하는데 있어서의 주요 문제는 전체의 등분할과 보존으로 정의하고 있다. 피아제의 과제는 4세에서 7세까지의 아동에게 진흙으로 만든 케이크와 인형을 주고 인형으로 하여금 케이크를 남김없이 먹게 하려면 어떻게 해야 할지를 묻는다. 여기서 세 가지 조건을 동시에 만족시켜야 한다. ① 케이크의 일부가 각 인형에 배분되어야 한다. ② 똑 같은 크기로 나누어야 한다. ③ 케이크 전체를 남김없이 사용하여야 한다. 아동에게 처음에는 나무칼을 주어 케이크를 자르게 했지만, 나중에는 약간의 변화를 주어 케이크를 자르는 대신 성냥개비로 경계를 표시하도록 하기도 했다. 인형의 수에 변화를 주기도 하고, 때로는 진흙 케이크 대신에 종이로 된 원, 사각형을 사용하기도 했다. 아동이 전체를 나눌 때마다, 부분의 합이 원래

있던 전체와 같은지 다른지를 물었다.

단계 별로 기술하면 다음과 같다. 첫째 단계에서는 나눠진 연속적인 전체가 여전히 같은 양이 된다는 것을 이해하지 못했다. 불연속적인 전체도 마찬가지이다. 2세에서 4.5세까지의 아동은 부분과 전체와의 관계를 전혀 깨닫지 못했다. 둘째 단계에서 시행착오에 의해 그 문제를 해결하려고 노력한 증거가 있었다. 성냥개비로 표시가 되었을 때는 답을 더 쉽게 찾아냈는데, 이것은 옳게 보일 때까지 계속 조정할 수 있었기 때문이다. 마지막으로 7세의 세 번째 단계에서는 세부 분할이 구체적 수준에서 조작적이 되었다. 다시 말해 7세의 아동은 구체적 대상을 다루는 한 세부 분할을 하기 위해 논리적 합성과 가역성을 이용하였다. 이 과제를 어렵게 만드는 몇 가지 요인이 있었는데 첫째, 요구하는 세부 분할의 수에 비례하여 어려움이 증가하였다. 예외적으로 4등분하는 것은 두 번의 분할로 했는데, 삼등분하는 것보다 더 쉬워했다. 어떤 아동은 삼등분하는데도 이 방법을 사용하려고 했다. 둘째, 작고 규칙적인 전체를 크고 불규칙적인 전체보다 더 쉬워했다. 셋째, 어떤 모양은 다른 모양보다 더 쉬워했다. 피아제는 어려움의 순서로 직사각형, 정사각형, 원인 것을 알아냈다. 마지막으로 시행착오 방법을 사용할 수 있기 때문에 성냥개비로 선을 표시하는 것이 예상적 도식을 요구하는 자르기와 그리기보다 쉬웠다.

Smith III(2002)는 아이들의 등분할 활동에서 중요한 인지적 문제는 등분하는 것(물건 자체를 나누는 것 또는 종이위에 연필로 그리는 것)과 등분의 이미지를 머리 속에 그리는 것 사이의 상호작용에 대한 것으로 본다. 둘 다 정신적 구성 행위이지만 단지 하나만 눈에 보인다. 작은 수에 대해서 등분을 할 수 없는 아이들은 머리 속에서도 그것을 그릴 수 없을지 모른다. 그러나 큰 수에 대해서 올바른 등분의 이미지를 머리 속에 그릴 수는 있지만, 그것을 종이 위에 그릴 수 없는 학생들이 있을 수도 있다. 즉 그들은 등분된 것이 똑같게 되도록 만들 수 없다.

이 경우 교사가 학생을 도울 수 있는 방법은 분수 타일과 같은 조작물을 사용하는 것이다. 하지만 그런 미리 등분할되어 있는 자료를 사용하여 표현한 것을 보고 그 아동이 추론하고 구성하는 능력이 있다고 성급하게 단정해서는 아니 된다. 일반적으로 학생들이 조작물을 가지고 활동을 했다고 해서 수학적 지식이 자동적으로 생겨나는 것은 아니다. 교사가 능숙하게 분수 조작물을 사용하는 것을 통해 학생의 분수 지식을 개발하는 것을 도울 수는 있지만, 그것은 이런 조작물이 등분된 양의 많은 보기들 중의 대표로 보일 때 뿐이다.

피아제는 등분할된 양으로서의 분수 개념을 구성하고 있는 아동들이 갖고 있는 7개의 속성을 다음과 같이 나열하고 있다.(Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960:309 - 310)

첫째는 전체는 나눌 수 있는 것임을 아는 것이다. 2세 정도의 아동들에게 케이크나 종이를 주면 그것은 범할 수 없는 것으로 여겨, 나누거나 찢으려고 하지 않는다. 2.5세 또는 3세 정도가 되면 그것을 극복하고, 고르게 분배하려고 하게 된다. 그런데 이번에는 나누는 행동이 그 대상으로 하여금 전체성을 상실하게 한다.

둘째, 분수 그 자체에는 부분의 수가 정해져 있음을 함의하고 있다는 것이다. 아동들은 분배를 하려면 몇 사람에게 나눠지는가에 따라 부분의 수가 결정됨을 알아야 한다. 어린 아동들은 분배를 하기 위해 나누면서도 그것을 생각하지 않는다.

셋째, 분할은 남김없이 이뤄져야 한다. 다시 말해서 전체가 규정된 부분의 수로 나눠진 이

상 나머지가 없어야 한다. 위 두 가지 특성을 가지고 있으면서도 주어진 것을 다 나누지 않고 남겨두는 아동들이 있다.

넷째, 아동들은 부분의 수와 필요한 분할 횟수 사이의 관계에 대한 인식이 있어야 한다. 예를 들면, 반으로 나누는 데는 한번의 분할, 직사각형을 삼등분하는 데는 두 번의 분할이면 되지만 원을 삼등분하는 데는 세 번의 분할이 필요하다는 것을 알아야 한다.

다섯째, 아동들은 전체를 세분한 모든 부분은 크기가 같아야 함을 알아야 한다. 그러나 반드시 합동이어야 한다는 것은 아니다.

여섯째, 분수 그 자체는 부분이자 전체라는 이중성을 갖고 있음을 인식해야 한다. 분수는 원래 전체의 일부를 나타내지만, 그 자체가 더 세분되어서 다른 것의 전체일수도 있다는 것이다.

마지막으로 전체의 불변성을 인식해야 한다. 즉, 부분의 합은 전체와 같다는 보존 개념을 갖고 있어야 한다.

피아제는 임상 기술을 통해 6-7세의 아동들은 위의 모든 특성을 보여줄 수 있음을 알았다.

요약하면, 피아제는 분수 개념은 두 가지 기본적인 관계 즉 부분과 전체와의 관계(내포적이고 논리적)와 부분과 그 나머지 부분과의 관계(외연적이고 계량적)에 의존하고 있음을 주장하고 있다.

위의 고찰을 통하여 여러 가지 분수의 의미 중에 심리적으로 분할분수에 대한 생각이 가장 앞선 것임을 알 수 있었다. 이것을 통해서도 교육적 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

III. 교과서에서의 분수 개념의 의미 분석

지금까지 분수 개념의 여러 가지 의미, 분수 개념의 생성 배경, 분수 개념의 심리적 근원 등에 대해 고찰해보았다. 이를 바탕으로 분수 개념과 관련한 현재 우리나라에서 사용 중인 제7차 교육과정에 따른 교과서와 앞서 사용된 교과서를 비교, 분석하여 보고자 한다.

먼저 학생들이 분수 개념의 다양한 의미를 체험하도록 하고 있는지를 알아보자. 앞에서 살펴보았듯이 우리나라 교육과정 해설서에서는 분수를 분할분수, 양분수, 비율분수, 몫분수의 4가지로 분류하고 있다. 제7차 교육과정 해설서에 따르면, 3-가 단계에서 연속량에 대한 분할분수, 3-나 단계에서 이산량에 대한 분할분수와 양분수, 4-나 단계에서 몫분수, 4-나, 6-가 단계에서 비율분수를 다루고 하고 있다. 그런데 실제로 교과서를 살펴보면 부분과 전체 관계를 나타내는 분할분수만을 비중 있게 다루고 나머지 부분은 제대로 다루지 않고 있음을 알 수 있다. 양분수는 거의 다루지 않고 있으며 몫분수는 교과서 한 쪽 정도, 비율분수는 4-나 단계에서 두 쪽 정도를 다루고 6-가 단계에서는 비와 관련하여 비교적 자세하게 다루는 편이다. 물론 앞에서 살펴보았듯이 양분수나 몫분수, 비율분수 개념에는 분할분수 개념이 포함되어 있으므로 분할분수를 강조하는 것이 바람직할 수도 있으나, 학생들은 서로 다른 의미와 상황을 체험해보아야 한다는 점에서 골고루 다루도록 해야 할 것이다. 특히 분수 개념의 생성 과정과 관련이 깊은 양분수는 교육과정 해설서에는 3-나 단계에서 다루게 되어 있으나 실제로 교과서에서는 전혀 다루지 않고 있다. 분수를 다루는 6단원 바로 앞에서 '들이'를 다루면서도 양분수를 전혀 다루지 않고 있는 것이다. 양분수와 관련된 내용은 4-가 단계의 교과서에서 문제 중에 처음 나오지만, 개념에 대한 설명은 없다. 이는 4학년 2학기에 소수를 이용하여 양분수를 소개하는 1차 교육과정에

따른 교과서[12]나 3학년 2학기에 여러 쪽에 걸쳐 길이, 무게, 들이 등에 대한 양분수를 강조하는 2차 교과서와 대비된다. 그 이후 교과서도 적어도 1쪽 정도는 양분수에 할애했는데, 7차 교과서에만 없는 것은 집필자의 실수로 볼 수밖에 없다.

일본에서는 분할분수와 함께 양분수를 강조하고 있음을 알 수 있다. 赤攝也 外(1996)의 교과서에 의하면, 분할분수를 도입한 후에는 측정 상황에서 1m, 1dl 단위로 재고 난 나머지 부분을 양분수로 표시하는 방법에 대해 많은 쪽을 할애할 뿐 아니라, 그 이후 문제에도 계속 양분수를 분할분수와 함께 다루고 있다. 이는 분수 개념이 측정이라는 실생활과 관련이 있음을 드러내려한 것으로 보인다.

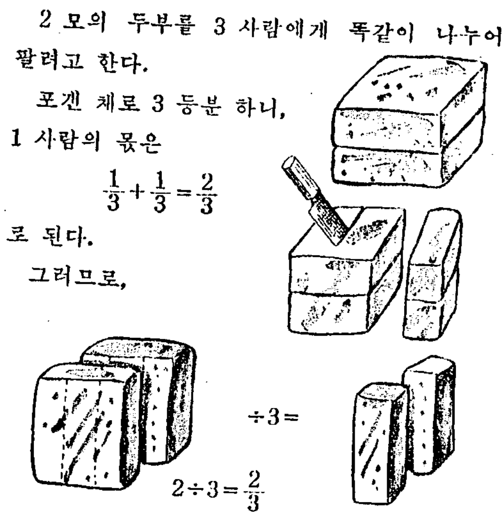
양분수의 도입은 실생활과의 관련성 뿐 아니라, 차후 가분수를 도입할 때에도 이해를 쉽게 해주며, 분수를 절대적인 크기를 갖는 수로 받아들이도록 하는데도 무리가 없다. 우리나라 교과서에서는 두 수 사이의 관계로 여겨지도록 분할분수를 도입하고는 이것의 크기를 비교하고 연산을 하도록 하는 것은 전개상 문제가 있어 보인다. 앞으로 우리나라 교과서에서도 양분수와 관련된 부분은 좀 더 깊이 있게 다루어야 할 것이다.

연산자분수는 이산량의 분할분수를 다루는 3-나 단계에서 '12의 1/4' 등을 알아보는 방식으로 다루고 있으며, 4-가 단계에서는 '부분은 전체의 얼마'인지와 '전체에 대한 분수만큼은 얼마'인지를 알아보면서 연산자분수를 두 번 다루고 있다.

몫분수는 4-나 단계에서 (자연수)÷(자연수)를 분수로 나타내어 보는 활동에서 도입하고 있으나 분량도 한 쪽밖에 안되거니와 도입하는 상황이 빈약해 보인다.

> '3m짜리 색 테이프를 네 사람이 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 사람이 가지는 색 테이프의 길이를 알아보시오'(교육인적자원부, 2001d : 4)

교과서 집필자의 의도가 양분수와 동시에 몫분수를 설명하려는 것이지 모르나, 테이프는 양분수에서 많이 활용되는 구체물이다. 더구나 이 문제를 풀기 위해 1m짜리 테이프 3개의 그림을 그려주고 그것을 각각 4등분하고 있는데, 이렇게 1/4m씩 테이프를 자르는 상황은 어색하게 보인다. 이렇게 되면 한 사람이 가지는 테이프는 3/4m짜 리 테이프 하나가 아니라 1/4m짜리 테이프 3개가 되는 것이다. 이보다는 2차 교과서 4-2(문교부, 1971b:104)에서의 상황이 자연스러워 보인다. 물론 여기서도 두부를 한 모의 1/3씩 둘을 갖게 되지만 두부 요리를 할 때는 더 잘게 잘라야 한다고 보면 그렇게 자르는 것이 어색하지 않다.


2 모의 두부를 3 사람에게 똑같이 나누어 팔려고 한다.
포갠 채로 3 등분 하니,
1 사람의 몫은
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
로 된다.
그러므로,
$\div 3 =$
$2 \div 3 = \frac{2}{3}$

[그림 III-1] 몫분수 상황
<출처> 문교부(1971b). 산수 4-2. 서울 : 국정교과서주식회사. p. 104

12) 이하 '1차 교과서', '2차 교과서', ...라고 한다.

비율분수에 대해서는 4-나 단계에서 몫분수를 다루기 직전에 '두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내어봅시다'라는 활동을 통해 도입하고 있다. 소재는 파란색 연필 6자루를 기준으로 하여 빨간색 연필 2자루는 분수로 어떻게 나타낼 수 있는지를 알아보는 것이다. '두 양'이라고 하고 있지만 이산량이거나 연속량이라도 단위를 표시하지 않고 '4는 20의 얼마라고 생각합니까?'와 같이 단순히 두 수의 크기를 비교하고 있는 것이 아쉽다. 6-가 단계의 '비와 비율' 단원에서는 '비'에 초점을 맞추고 '기준량에 대한 비교하는 양의 크기'를 '비율'이라고 하고, 특히 '기준량을 1로 볼 때의 비율'을 '비의 값'이라고 정의하고 있다. 여기서는 비의 값의 표현 방법 중의 하나가 분수임을 보여주고 있다. 이와 같이 비율분수에 대해서 두 학년에 걸쳐 다루는 것에 대해서는 좀 더 많은 연구가 필요하다. 현재는 비율분수의 의미를 먼저 다루고 비와 비율의 내용은 어렵다고 생각하여 6학년에서 다루고 있다. 정은실(2003 : 206)은 '개념으로서의 비는 꽤 높은 발달 수준을 요구하지만, 비에 대한 느낌을 가지는 것이나 비에 대한 시각을 갖게 되는 것은 발달 초기에 이뤄진다. 따라서 아무런 준비 과정 없이 비를 명시적으로 가르치는 것보다. 저학년에서부터 비를 직관적으로 이해하도록 프로그램을 개발할 필요가 있다'고 주장하고 있다. 이에 따른다면, 저학년에서 비를 직관적으로 이해하게 하면서 비율분수를 좀 더 강화하는 것도 한 가지 방법이 될 수 있을 것 같다.

이러한 여러 가지 분수를 지도하는 순서에 대해서는 Filep(2001)이 지적한바와 같이 분수 개념의 발달 단계가 양분수, 비율분수 그리고 마지막으로 몫분수이므로 학생들에게도 이 순서에 따라 지도하는 것이 바람직하다고 할 수 있다. 따라서 양분수에 대한 지도만 좀더 적극적으로 이루어진다면 현행 교과서의 순서는 무리가 없다고 판단된다.

다음에는 분수를 도입하는 부분에 대해 살펴보자. 현재 분수 도입은 3-가 단계 '7. 분수' 단원에서 이뤄진다. 첫 학습 활동은 구체물인 사과를 반으로, 반의 반으로 똑같이 나누어 보는 활동[13]을 한 후, 정사각형, 직사각형의 종이를 이등분, 사등분, 원 모양의 종이를 사등분, 삼등분해보는 활동이 이어진다. 다음에는 몇 개로 등분된 정사각형, 삼각형, 원의 부분과 전체의 크기를 비교해본다. 이러한 등분할 활동의 강조는 역사적으로나, 심리적으로 분수 개념의 근원이 되는 활동이라는 점에서 바람직하다. 또한 지도 순서도 등분할에 대한 피아제 학파의 연구 결과와 일치하고 있다. 이어서 좀더 형식적으로 분할분수인 1/2, 1/3, 3/4를 쓰고 읽는 법, 분수의 예시적 정의가 이어진다. 앞에서도 언급했듯이 3-가 단계에서는 연속량을 등분할하고, 부분 전체 관계로서의 분수인 분할분수만을 취급하고 있다. 이산량의 분할분수는 3-나 단계에서 다루어지는데, 이것은 연산자분수이기도 하다. 4-가 단계에서도 이산량 그리고 1보다 큰 연속량에 대하여 부분이 전체의 얼마인지를 나타내는 방식으로 분할분수를 다루고 있다.

여기서 눈여겨볼 것은 취급하는 분수가 단위분수만이 아니라는 것이다. 앞의 역사적 발달 과정에서 보았듯이 처음엔 사용된 분수는 2/3를 제외하고는 단위분수였다. 앞에서 교육적 시사점으로 생각했던, '분수에서 단위분수는 가장 기본적인 단위이므로, 이를 바탕으로 분수를 구성하도록 해야 한다'는 생각이 7차 교과

13) 박교식 외(2004)는 사과와 같은 구체물을 등분할하는 활동이 부적절함을 지적하고 있다.

서에서는 반영되고 있지 않다는 것이다. 이에 비해 3차 교과서는 현실과 밀접하게 관련된 내용은 배제하고 수학적으로 엄밀하게 집필된 교과서이긴 하나 단위분수에 대한 생각은 분명하다. 3차 교과서는 2학년 1학기에 '4. 집합과 분할'이라는 단원에서 분할분수를 도입하는데, 연속량과 이산량을 거의 동시에 도입한다. 먼저 원, 정사각형, 삼각형을 이등분한 그림을 보여주고, '그림에서 색칠한 부분은 반입니다. 반을 '1/2'이라 쓰고, '2분의 1'이라고 읽습니다. 둘로 똑같이 나눈 하나가 1/2입니다.'(문교부, 1975a: 66)라고 도입한 다음에 이어서 나무토막, 별, 풍선 등 이산량 그림을 보고 1/2씩 묶어보게 한다. 1/3, 1/4에 대해서도 같은 방법으로 소개한다. 그리고는 '1/2, 1/3, 1/4과 같은 수를 '분수'라고 합니다.'(문교부, 1975a:68)라고 예시적 정의에 의해 분수를 도입하는 것은 같으나, 단위분수만을 다룬다는 점이 다르다. 1학기에는 연습문제에서도 위의 단위분수만을 취급하고 있다. 2학기에는 '3. 길이의 단위' 단원에서 1/3을 복습한 후 다음과 같이 단위분수를 단위로 하여 진분수를 소개하고 있다.

'셋으로 똑같이 나눈 것의 둘에 색칠을 하였습니다. 이것을 '2/3'라고 쓰고, '3분의 2'라고 읽습니다.
2/3는 1/3의 2배와 같습니다.
3/4은 1/4의 3배와 같습니다.
이것을 그림으로 나타내시오.' (문교부, 1975b : 58)

이와 같이 단위분수를 바탕으로 분수를 구성해 나가려는 생각은 일본의 교과서에는 여전히 남아 있는데 비해, 우리나라 7차 교과서에서는 분할분수로 단위분수가 아닌 진분수까지 다루고 난 후, 3-나 단계에서 3/4은 1/4이 몇인지 알아보는 내용 등이 소개되고 있어 역사발생적 원리를 고려하고 있지 않음을 알 수 있다.

또한 양분수가 아닌 분할분수를 강조하다보니 어쩔 수 없는 것이긴 하지만, 분수의 크기를 비교하는 단계로 넘어가는 부분에 심리적, 논리적 비약이 있다. 3-가 단계의 연속량의 분할분수나 3-나 단계의 이산량에 대한 분할분수(연산자분수)는 부분과 전체 사이의 상대적인 크기를 나타내는 분수로써, 크기 비교를 하는 게 어색하다. 그런데, 3-나 단계에서 분수 3/4과 2/4의 크기 비교를 시도하고 있다. 어쩔 수 없이 같은 크기의 색종이를 3/4과 2/4만큼 자른 다음 그 넓이로 크기를 비교하고 있다. 부분과 전체 사이의 상대적 크기를 나타내는 분할분수의 크기 비교를 도형의 넓이라는 절대적 기준으로 크기 비교를 하고 있는 것이다. 그 다음 활동에서도 같은 크기의 띠 그림의 4/5와 2/5만큼 색칠을 한 다음 색칠한 부분의 길이로 크기 비교를 한다. 그런데 그 다음 활동은 갑자기 절대적 크기를 갖는 분수로서의 크기 비교를 하도록 하고 있다.

[활동 3] 7/8과 3/8은 어느 분수가 더 큰지 알아보시오.

- 1/8이 몇이면 7/8입니까?
- 1/8이 몇이면 3/8입니까?
- 7/8과 3/8은 어느 것이 더 크다고 생각합니까?
- 왜 그렇게 생각했습니까? (교육인적자원부, 2001b:77)

물론 바로 앞 시간에 분수의 크기를 비교하기 위한 전 단계로 k/n는 1/n이 몇인가를 다루었으므로, 7/8은 1/8이 7, 3/8은 1/8이 3, 따라서 7/8이 3/8보다 크다라고 추론할 수 있다. 그러나 활동 1, 2에서는 기준이 같은 크기의 색종이, 같은 크기의 띠그림과 같은 구체물 또는 반구체물의 넓이였던 것이 여기서는 그 기준이 추상적인 수 1로 바뀌는 심리적 비약이 있다. 그리고 전체와 부분의 상대적 크기를 나타내는

분할분수를 절대적 크기를 갖는 수로 생각하고 그 수의 크기를 비교해야하는 논리적 비약이 있다. 이어서 나오는 분모가 다른 두 단위분수의 크기 비교에서도 마찬가지이다. 사전에 분할분수와 함께 양분수로 강조점이 바뀌었다면 그 비약을 피할 수 있을 것이다.

Ⅳ. 결론 및 제언

이 연구는 분수 개념의 여러 가지 의미를 분석해보고, 분수 개념의 생성 과정을 역사 발생적으로, 심리적으로 분석하고 이를 바탕으로 현재 지도되고 있는 7차 교과서의 분수 개념 도입과 관련한 내용을 비판적으로 분석해 보면서 그 교육적 시사점에 대해 논의한 것이다. 그러한 논의의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 분수 개념은 여러 가지 의미로 나눌 수 있으나 이 연구에서는 분할분수, 연산자분수, 양분수, 비율분수, 몫분수로 나누었다. 그러나 여기서 분할분수는 분류된 다른 분수와 그 의미가 중첩되어 있어 분할분수를 다른 분수와 함께 묶어 분류하는 것보다 분할분수는 따로 독립시켜 생각하고 나머지 분수들을 분류하도록 했다. 이러한 여러 가지 의미에 대한 경험을 교육과정에 다양하면서도 체계적으로 표현할 것을 제안한다.

둘째, 분수 개념의 역사적 발생 과정을 추적하여 본 결과 분수 개념은 분배와 측정 과정에서 발생하였으므로 분수를 도입할 때 분배와 측정과 관련하여 도입하는 것이 바람직하다. 그런데 현재 사용되고 있는 7차 교과서에는 측정과 관련된 양분수에 대한 내용을 제대로 다루고 있지 않다. 실제로 양분수의 관점에서 분수를 다루면 논리적인 비약이 없이 지도할 수 있다. 다음 교과서 개정시에는 이에 대한 논의가 심도 있게 이뤄져야 할 것이다.

셋째, 역사적으로 분수는 측정의 결과를 나타내기 위해 고안되었으며, 측정을 하기 위해서는 단위가 필요하다. 자연수는 1을 단위로 하여 구성되었듯이 분수는 단위분수를 단위로 하여 구성되었다. 그러므로 학교에서도 단위분수를 바탕으로 분수를 구성해 나가는 것이 바람직하다. 2/3를 '전체를 똑같이 3으로 나눈 것 중의 2'로 보는 것보다 '1/3이 2인 수'로 해석하는 관점을 강조하는 것이 후속 학습을 하는데도 도움이 된다. 7차 교과서에서도 k/n는 1/n이 몇인가를 다루고 있지만, 단위분수를 단위로 본다는 관점이 약하며, 후속학습에서도 이를 제대로 활용하고 있지 못하다. 다음 교과서 개정시에는 일관성 있게 다룰 필요가 있다.

참고문헌

문교부(1963). **산수 4-2.** 서울: 국정교과서주식회사.

______(1971a). **산수 3-2.** 서울: 국정교과서주식회사.

______(1971b). **산수 4-2.** 서울: 국정교과서주식회사.

______(1975a). **산수 2-1.** 서울: 국정교과서주식회사.

______(1975b). **산수 2-2.** 서울: 국정교과서주식회사.

교육부(1996a). **교사용지도서 수학 2-1.** 국정교과서 주식회사.

______(1996b). **교사용지도서 수학 3-1.** 국정교과서 주식회사.

______(1999). **초등학교 교육과정 해설(IV)-수학, 과학, 실과-.** 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2001a). **수학 3-가.** 서울: 대한 교과서 주식회사.

____________(2001b). **수학 3-나.** 서울: 대한 교과서 주식회사.

____________(2001c). **수학 4-가.** 서울: 대한 교과서 주식회사.

____________(2001d). **수학 4-나.** 서울: 대한 교과서 주식회사.

박교식, 이경화, 임재훈(2004). 남북한 초등학교 교과서의 분수 도입 방식 비교. **수학교육학연구, 14**(4), 367-385.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석에 의한 학습지도 방향에 관한 연구.** 서울대학교대학원 박사학위논문.

정은실(2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

赤攝也 外(1996). **新版 たのしい算數 3下.** 東京：大日本圖書.

數學教育學硏究會編(1980). **算數教育の理論と實際.** 聖文社.

Bassarear, T. (2001). *Mathematics for elementary school teachers.* Houghton Mifflin Company.

Behr, M, Lesh, R., & Post, T. (1983). "Rational- number concepts". In R. Lesh (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes,* New York : Academic Press.

Boyer, C. B. (1968), *A history of mathematics.* New York : John Wiley & Sons, Inc.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought : a ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics, 25,* 1993, pp. 281-305.

Clements, M. A., & Del Campo, G. (1990). How natural is fractional knowledge?. In L. P. Steffe & T. Wood (Ed.), *Transforming children's mathematics education* (pp. 181-188). Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Courant, R., & Robbins, H. (1943). *What is mathematics?.* Oxford University Press.

Eugene, D. (1958). *History of mathematics.* New York : Dover Publications, Inc.

Filep, L. (2001). The development, and the developing of, the concept of fraction. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/lffract.pdf.

Gibb, E. G., Jones, P. S., & Junge, C. W. (1959). Number and Operation. In NCTM (Ed.), *The growth of mathematical ideas* (pp.7-64). NCTM.

Karpinski, L. C. (1925). The history of arithmatic. New York : Rand Mcnally & Company.

Kieren, T. E. (1981). Knowing rational numbers : Ideas and symbols. In Lindquist M. M. (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp. 69-81). Berkeley, CA : McCutchan Publishing Corporation.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert, M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.53-92). Lawrence Erlbaum Associates : NCTM

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry.* New York : W. W. Norton.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1982).

Interpretation of rational number concepts. In Silvery, L. & Smart, J. (Eds.), Mathematics for the middle grades(5-9) (pp.59-72). Reston, Virginia : NCTM.

Smith III, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fracion and ratios. In NCTM, *Making sense of fraction, ratios, and proportions* (pp.3-17). Reston, VA : NCTM.

Struik, D. J. (1967). *A concise history of mathematics*(3rd ed.). New York : Dover Publications, Inc.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes,* (pp.127-174). New York : Academic Press.

Wagner, H. A. (1975). *An analysis of the fraction concept.* UMI Dissertation Services.

An Educational Analysis on Fraction Concept

Jeong, Eun Sil (Chinju National University of Education)

The fraction concept consists of various meanings and is one of the more abstract and difficult in elementary school mathematics.

This study intends to analyze the fraction concept from historical and psychological viewpoints, to examine the current elementary mathematics textbooks by these viewpoints and to seek the direction for improvement of it.

Basic ideas about fraction are the partitioning - the dividing of a quantity into subparts of equal size - and about the part-whole relation. So these ideas are heavily emphasized in current textbooks. However, from the learner's point of view, situations related to different meanings of fraction concept draw qualitatively different response from students. So all the other meanings of fraction concept should be systematically represented in elementary mathematics textbooks.

Especially based on historico-genetic principle, the current textbooks need the emphasis on the fraction as a measure and on constructing fraction concept by unit fraction as a unit.

* key words : fraction concept(분수개념), partitioning(등분할), fraction as a measure(양분수), unit fraction(단위분수)

논문접수 : 2006. 5. 4
심사완료 : 2006. 6. 5