대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.2, 161-176. Jun. 2006

일정한 차를 갖는 수 분할 모델의 탐구를 위한 예비중등교사용 수학화 교수단원의 설계

김 진 환* · 박 교 식** · 이 광 호***

예비중등수학교사들이 장차 중등학교에서 학생들의 수학화 교수-학습을 안내하기 위해서는, 그들이 먼저 수학화에 익숙해야 하는 바, 이를 위해서는 그것을 목표로 하는 적절한 프로그램이 필요하다. 이 연구에서는 그러한 목적에서, 인접한 두 분할 원소의 차가 일정한 경우의 '수 분할 모델'을 탐구하는 수학화 교수단원을 설계한다. 그것은 분할 모델로 조직된 현상을 다시 새롭게 조직하는 본질을 고안하게 하는 일련의 과정을 안내한다. 특히, 이 연구에서는 새로운 본질과 그것이 얻어지는 과정에 관해 논의한다. 그러나 이때 분할될 수가 자연수인 경우로 한정한다. 또, 원소와 원소의 차가 정수인 경우로 한정한다. 이 연구에서 설계하는 교수단원을 통해 예비중등교사들은 수학자들이 정리를 만들어 내는 것과 유사한 과정을 밟으면서 2차적인 수학화를 경험하고 훈련할 수 있다.

Ⅰ. 서 론

이 연구에서는 인접한 두 분할 원소(이하, 간단히 원소)의 차가 일정한 경우의 '수 분할 모델'(김진환, 박교식, 2006; 이하 간단히 '분할 모델')을 탐구하는 수학화 교수단원 <분할 모델의 탐구 - 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우>를 설계한다. 이때 분할은 한 수를 일정한 조건을 만족하는 몇 개의 수 (즉, 원소)로 나누는 것을 의미한다. 분할 모델은 이러한 분할을 수식을 사용하여 한꺼번에 모델화하여 나타낸 것이다. 이 연구에서 '수학화 교수단원'은 수학화 교수-학습을 위한 '교수단원'(Wittmann 1984, 1995, 1999, 2001)을 의미한다. 수학화는 수학자들이 현실을 수학으로 조직해 간 과정인 바, '현실'은 수학자들이 일종의 상식으로 받아들이는 수학 지식이다. 그들은 수학으로 조직할 필요가 있는 현실을 선택하고, 그것을 조직하는 수학적 수단을 고안한다. 그들이 선택한 현실이 '현상'이고, 그들이 현상을 조직하기 위해 고안한 수학적 수단이 '본질'이다. 수학자들이 본질을 고안하여 어떤 현상을 조직하고 나면, 그들은 그 조직된 현상을 새로운 현상으로 보고, 다시 그것을 조직하는 새로운 본질을 고안하는 새로운 수학화를 시도한다(Freudenthal, 1978, 1983, 1985, 1991; 박교식, 1992; 정영옥, 1997, 우정호, 2000).

수학화를 흔히 수평적 수학화와 수직적 수학화의 두 성분으로 구별한다. 수평적 수학화는 현상을 수학적 처리가 가능하도록 바꾸는 것이고, 수직적 수학화는 그렇게 변환된 것을 수학적으로 처리하는 것이다(Treffers, 1987; De Lange, Verhage, 1987, 정영옥, 1997, 재인용). 이

* 영남대학교(kimjh@ynu.ac.kr)
** 경인교육대학교(pkspark@gin.ac.kr)
*** 오레곤주립대학교(leekw@onid.orst.edu)

수학적 처리의 결과로 현상을 조직하는 본질이 고안된다. 수평적 수학화는 삶의 세계에서, 수직적 수학화는 상징의 세계에서 일어나지만, 이 두 세계의 경계는 명확하지 않으며, 상대적이다. 각 세계는 자신 또는 다른 쪽을 희생시켜서 축소되거나 확장될 수 있고, 게다가 어떤 것은 한 경우에는 삶의 세계에, 다른 한 경우에는 상징의 세계에 속할 수도 있다. 사실상, 수평적 수학화와 수직적 수학화 사이의 구별은 학습자들 자신과 그들의 환경에 좌우된다(Freudenthal, 1991).

수학화 교수-학습은 수학 발명의 인식론적 메커니즘인 수학화가 학습자들의 수학 학습의 인식론적 메커니즘으로 작동하게 하는 것을 목표로 한다. 수학자들과는 달리, 학습자들이 스스로 조직할 필요가 있는 현상을 선택할 수 있는 것은 아니다. 그들은 제공된 현상을 조직하는 본질을 고안해야 하는 바, 이를 위해서는 그러한 고안의 경험이 필요하다. 수학화 교수-학습은 이 고안의 경험을 도모하는 것으로, 그것은 그러한 목적을 가진 적절한 프로그램을 통해 이루어질 수 있다. 수학화 교수단원은 바로 이러한 프로그램에 해당한다. 교수단원은 그 목적에 따라 여러 가지로 구분될 수 있는 바, 이 연구에서 설계하고자 하는 예비중등교사용 수학화 교수단원은, 특히 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우의 분할 모델의 성질을 탐구하는 과정에서, 예비중등교사들이 수학화를 경험할 수 있게 하기 위한 것이다.

김진환과 박교식(2006)에서는 초보적인 수 분할 문제를 일반화한 분할 모델을 정의하고, 그것의 한 성질을 탐구하는 예비중등교사용 수학화 교수단원을 설계한 바 있다. 이 연구는 그 연구의 후속 연구라 할 수 있다. 이 연구는 수학화가 단 한 번의 수학화로 끝나지 않고, 계속해서 반복되는 모습을 보여줄 수 있다. 이 연구에서는 김진환과 박교식(2006)에서 사용한 용어와 기호를 그대로 사용한다. 특히 그 연구에서 사용한 "(1) 3개의 빈 상자에 15개의 사탕을 각각 순서대로 나누어 넣는다. 뒤의 상자에 넣은 사탕의 수는 바로 앞의 상자에 넣은 사탕의 수보다 두 개 많다. 상자에 각각 몇 개의 사탕을 넣어야 하는가? (2) 4개의 빈 상자에 같은 방법으로 사탕을 각각 순서대로 나누어 넣으려면, 상자에 각각 몇 개의 사탕을 넣어야 하는가?"를 실마리 문제로 사용한다. 이 실마리 문제를 다음과 같이 기호를 사용하여 수평적 수학화할 수 있다.

(1) $p_1+p_2+p_3=15,\ p_2-p_1=2,\ p_3-p_2=2$

(2) $p_1+p_2+p_3+p_4=15,\ p_2-p_1=2,\ p_3-p_2=2,\ p_4-p_3=2$

(1)의 경우, 15의 3-분할 (3, 5, 7)이 존재한다. 그러나 (2)의 경우, 15의 4-분할은 존재하지 않는다. 이렇게 수평적 수학화된 두 분할 문제를 수직적 수학화한 다음의 분할 모델을 고안할 수 있다(김진환, 박교식, 2006).

$$S=\sum_{i=1}^{k}p_i,\ p_{i+1}-p_i=d\ (\text{일정})\ (\text{단, } i=1, 2. \cdots, k-1)$$

이 연구에서 설계하는 교수단원 <분할 모델의 탐구 - 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우>에서는 이 분할 모델로 조직된 현상을 다시 새롭게 조직하는 본질을 고안하게 하는 일련의 과정을 안내한다. 이를 위해 먼저 분할 모델로 조직된 현상을 탐구 문제의 형태로 제공한다. 이 교수단원은 예비중등교사들이 이 탐구 문제를 탐색하여, 새로운 본질을 고안하게 하는 것을 목표로 하는 바, 이 연구에서는 그 새로운 본질과 그것이 얻어지는 과정에 관해 논의한다. 그러나 이때 분할될 수가 자연수 n인 경우로 한정한다. (이하, n은 특별한 언급이 없는

한 자연수를 의미한다.) 또, 원소 p_i는 p_i (i=1, 2. ⋯, k)를, p_{i+1}-p_i는 p_{i+1}-p_i (i=1, 2. ⋯, k-1)를 의미한다. 또, 원소 p_i와 d가 정수인 경우로 한정한다.

II. <분할 모델의 탐구 - 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우>에서의 탐구 문제

교수단원 <분할 모델의 탐구 - 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우>에서는 자연수 n의 k-분할의 존재 조건을 탐구한다. 그러한 조건은 예비중등교사들이 고안해 내야 하는 것인 바, 이를 위해 원소 p_i가 정수이고, p_{i+1}-p_i가 일정한 정수 d인 경우와 원소 p_i가 음이 아닌 정수이고, p_{i+1}-p_i가 음이 아닌 일정한 정수 d인 두 경우를 탐색한다. 먼저 다음과 같은 세 개의 탐구 문제를 설정한다. 즉, 이 탐구 문제는 예비중등교사들에게 제공되는 현상이다. [탐구 문제 1]은 다루기 쉬운 구체적인 상황을 제공한다. [탐구 문제 2]와 [탐구 문제 3]은 각각 [탐구 문제 1]을 일반적 형태로 바꾼 것이다. 예비중등교사들이 해야 하는 것은 이 세 탐구 문제가 제공하는 현상을 조직하는 본질 즉, 자연수 n의 k-분할의 존재 조건을 고안하는 것이다.

[탐구 문제 1] 분할될 수 n이 20이고, 원소 p_i는 정수이다.

(1) 인접한 두 원소의 차 p_{i+1}-p_i가 각각 1, 2, 3, 0, -1, -2 (i=1, 2, 3, 4) 일 때 20의 5-분할을 찾아라.

(2) p_{i+1}-p_i가 각각 0, 1, 2, 3, 4 (i=1, 2, 3, 4) 일 때 20의 4-분할을 찾아라. (3) p_{i+1}-p_i가 각각 1, 2 (i=1, 2) 일 때 20의 3-분할을 찾아라.

[탐구 문제 2] 원소 p_i가 정수이다. 인접한 두 원소의 차 p_{i+1}-p_i가 일정한 정수이다.

(1) 분할될 수 n이 어떤 자연수일 때, n의 2-분할이 존재하는가?

(2) 어떤 자연수 n에 대해, n의 3-분할이 존재하는가?

(3) 어떤 자연수 n에 대해, n의 4-분할이 존재하는가?

(4) 앞 문제를 토대로, 어떤 양의 정수 k(>1)에 대해, 인접한 두 원소의 차 p_{i+1}-p_i가 일정한 정수가 되는 자연수 n의 k-분할이 존재하는가? 이때 n의 k-분할을 구하여라.

[탐구 문제 3] 자연수 n의 k-분할에서 원소 p_i는 음이 아닌 정수이다. 어떤 양의 정수 k(>1)에 대해 인접한 두 원소의 차 p_{i+1}-p_i가 음이 아닌 일정한 정수가 되는 n의 k-분할이 존재하는가? 이때 k-분할의 수를 구하여라.

위의 탐구 문제를 탐색하기 위해 원소에 부여되는 조건 및 인접한 두 원소의 차의 조건에 따라 분할의 유형을 다음의 <표 II-1>처럼 정하기로 한다.

<표 II-1> 원소 및 원소의 차의 조건에 따른 2개의 분할 유형

분할의 유형	p_i	p_{i+1}-p_i=d
D-I형	정수	일정한 정수
D-II형	음이 아닌 정수	음이 아닌 일정한 정수

D-I형은 [탐구 문제 2]와 관련되며, D-II형은 [탐구 문제 3]과 관련된다. 특히 D-II형에서 p_i는 음이 아닌 정수, p_{i+1}-p_i는 음이 아닌 정수

이므로, 언제나 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_k$이다. 이때 분할될 수가 자연수 n이므로, p_1을 제외한 모든 원소는 사실상 0보다 크다. 즉, p_1만이 0이 될 수 있다.

III. [탐구 문제 1]의 탐색

자연수 n의 k-분할의 존재 조건이라는 본질을 고안하기 위해서는, 먼저 그것을 자연스럽게 추측할 수 있는 구체적인 예가 제시될 필요가 있다. 현상으로서의 [탐구 문제 1]은 그 해결을 통해 예비중등교사들이 자연수 n의 k-분할의 존재 조건을 나름대로 귀납적으로 추측할 수 있게 하는 것을 목표로 한다. 이러한 귀납적 추측은 본질을 고안하기 위한 첫 단계이다.

1. 시행착오적 탐색과 논리적 탐색

[탐구문제 1]의 (1)의 경우, 먼저 시행착오를 통해 그것을 해결하는 것을 생각해 볼 수 있다. p_{i+1}-p_i=1, 2, 3인 경우 각각 분할

(2, 3, 4, 5, 6), (0, 2, 4, 6, 8), (-2, 1, 4, 7, 10)

을 어렵지 않게 찾을 수 있을 것이다. 이 세 개의 예로부터 예비중등교사들은 분할의 셋째 원소가 모두 4라는 것과 분할의 첫째 원소와 다섯째 원소의 합, 둘째 원소와 셋째 원소의 합이 모두 8이라는 것을 관찰할 수 있다. 그리고 이 관찰로부터, 그것이 모든 p_{i+1}-p_i에 대해 성립할 지도 모른다는 귀납적 추측을 할 수 있다. 그리고 그 추측으로부터 p_{i+1}-p_i=0, -1, -2인 경우의 분할

(4, 4, 4, 4, 4), (6, 5, 4, 3, 2), (8, 6, 4, 2, 0)

을 각각 찾을 수 있을 것이다.

그러나 예비중등교사들이라면 이런 시행착오적 방법을 넘어 나름대로 논리적인 방법을 사용할 수 있을 것이다. 예를 들어 먼저 20을 5로 나누는 특수한 경우를 생각하면 그 분할은 (4, 4, 4, 4, 4)이다. 이것은 바로 p_{i+1}-p_i=0인 경우이다. 이것으로부터 p_{i+1}-p_i=1인 분할을 만들기 위해, 각 원소를 조정한다. 셋째 원소인 4를 고정하고, 둘째 원소에서 1을 빼고, 넷째 원소에 1을 더한다. 다음에 첫째 원소에서 2를 빼고, 다섯째 원소에 2를 더한다. 즉, 이 과정을 나타내면 다음과 같다.

(4, 4, 4, 4, 4,) → (4, 3, 4, 5, 4) → (2, 3, 4, 5, 6)

분할될 수 20을 고정한 다음, 각 원소를 p_{i+1}-p_i=1이 되도록 조정한 것이므로, 예비중등교사들은 자신의 답이 논리적으로 옳다는 것을 확신할 수 있다. 더 나아가 각 원소를 역으로 배열하면 그것은 p_{i+1}-p_i=-1인 경우를 나타낸다는 것도 알 수 있다. 같은 방법으로 p_{i+1}-p_i=2, -2인 경우의 분할은 각각 다음과 같음을 알 수 있다.

(0, 2, 4, 6, 8), (8, 6, 4, 2, 0)

또, p_{i+1}-p_i=3을 만족하는 분할은 (-2, 1, 4, 7, 10)임을 알 수 있다.

위에서 p_{i+1}-p_i=0인 특수한 경우 (4, 4, 4, 4, 4)로부터 어떠한 p_{i+1}-p_i에 대해서도 20의 5-분할을 구할 수 있는 방법을 찾을 수 있다. 셋째 원소가 4이므로, p_{i+1}-p_i=d라고 하면, 인접한 두 원소의 차가 d인 20의 5-분할은 항상

(4-2d, 4-d, 4, 4+d, 4+2d)

임을 알 수 있다.

그런데 [탐구 문제 1]의 (2)의 경우에는 위와 같은 방법을 사용해서 20의 4-분할을 모두 찾

는 것이 용이하지 않다. 다만 부분적으로는 성공할 수 있다. 즉, 20을 4로 나누는 특수한 경우를 생각하면 그 분할은 (5, 5, 5, 5)이다. 그러나 이것에 [탐구 문제 1]의 (1)을 해결할 때 사용한 방법을 적용할 수는 없으므로, 다른 방법을 강구하지 않으면 안 된다. 예비중등교사들은 시행착오 또는 논리적인 방법에 의해 p_{i+1}-p_i=2, 4인 경우의 분할

(2, 4, 6, 8), (-1, 3, 7, 11)

을 각각 찾을 수 있을 것이다. 그러나 p_{i+1}-p_i=1, 3인 경우의 20의 4-분할을 구할 수는 없다. 이 결과는 p_{i+1}-p_i가 일정한 짝수(정수 범위에서)인 경우는 20의 4-분할이 존재하지만, 그렇지 않은 경우는 20의 4-분할이 존재하지 않는다는 것을 추측할 수 있게 한다. 교수단원 <분할 모델의 탐구 - 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우>에서는 예비중등교사들은 이러한 추측을 정당화해야 한다.

먼저 p_{i+1}-p_i=d가 짝수(정수 범위에서)일 때 20의 4-분할이 존재한다는 것을 정당화하기 위해 d=0인 경우의 분할 (5, 5, 5, 5)에서 시작한다. 다음에 d=2인 경우의 분할을 얻기 위해 각 원소를 조정한다. 먼저 둘째 원소에서 1을 빼고, 셋째 원소에 1을 더한다. 다음에 첫째 원소에서 3을 빼고, 넷째 원소에 1을 더한다. 즉, 이 과정은 다음과 같다.

(5, 5, 5, 5) → (5, 4, 6, 5) → (2, 4, 6, 8)

분할될 수 20을 고정한 다음, 각 원소를 d=2가 되도록 조정한 것이므로, 예비중등교사들은 자신의 답을 확신할 수 있다. 같은 방법으로 d=4인 경우의 20의 4-분할을 구할 수 있다. 먼저 둘째 원소에서 2를 빼고, 셋째 원소에 2를 더한다. 다음에 첫째 원소에서 6을 빼고, 넷째 원소에 6을 더한다. 즉, 이 과정은 다음과 같다.

(5, 5, 5, 5) → (5, 3, 7, 5) → (-1, 3, 7, 11)

이 방법을 짝수(정수 범위에서) d에 대해 일반화할 수 있다. 이러한 일반화는 수직적 수학화의 시작으로 볼 수 있다. 첫째 원소와 둘째에서 각각 $\frac{3}{2}d$, $\frac{1}{2}d$를 빼고, 그것을 각각 셋째 원소와 넷째 원소에 더한다. 즉, 이 과정은 다음과 같다.

$(5, 5, 5, 5) \rightarrow (5, 5\text{-}\frac{1}{2}d, 5+\frac{1}{2}d, 5) \rightarrow$

$(5\text{-}\frac{3}{2}d, 5\text{-}\frac{1}{2}d, 5+\frac{1}{2}d, 5+\frac{3}{2}d)$

즉, 인접한 두 원소의 차가 짝수(정수 범위에서) d인 경우 20의 4-분할은 다음과 같다.

$(5\text{-}\frac{3}{2}d, 5\text{-}\frac{1}{2}d, 5+\frac{1}{2}d, 5+\frac{3}{2}d)$

한편, 인접한 두 원소의 차가 홀수(정수 범위에서) d인 경우 20의 4-분할은 존재하지 않는다. d= ⋯, 1, 3, ⋯ 일 때 각각

$\cdots, (\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}), \cdots$

와 같은 분할을 생각할 수 있으나, 분할의 원소가 정수라는 조건에 벗어난다.

[탐구 문제 1]의 (3)의 경우, [탐구 문제 1]의 (1)과 (2)에서 사용했던 방법을 사용하기 위해 먼저 20을 3으로 나누면 그 값은 정수가 아니다. 따라서 그 방법을 사용할 수는 없다. 다른 방법을 사용하기 위해 분할의 둘째 원소의 값으로

$[\frac{20}{3}]$=6 또는 $[\frac{20}{3}]$+1=7

을 택하는 것이 자연스러워 보인다. 그러나 어느 경우든 p_{i+1}-p_i=1, 2일 때 20의 3-분할을 구할 수는 없다. 6을 택하면 분할은 (5, 6, 7) 또는 (4, 6, 8)이 되어 그 원소의 합은 18이 되고, 7을 택하면 분할은 (6, 7, 8) 또는 (5, 7, 9)가 되어 그 원소의 합은 21이 된다. 즉, 어느 경우든 분할될 수가 20이라는 조건에 어긋난다.

2. 등차수열의 합을 활용한 논리적 탐색

[탐구 문제 1]을 등차수열의 합을 이용하여 좀더 탐색할 수 있다. 인접한 두 원소의 차 $p_{i+1}-p_i$를 d라고 할 때, [탐구 문제 1]의 (1)에서 d=1일 때 20의 5-분할이 존재한다고 하자. 그것의 첫째 원소를 a라고 하면, 그 분할을 (a, a+1, a+2, a+3, a+4)로 나타낼 수 있다. 따라서

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=20$$

이어야 한다. 이것을 풀면 a=2이다. 따라서 구하는 분할은 (2, 3, 4, 5, 6)이다. d=2이면, 그 분할은 (a, a+2, a+4, a+6, a+8)이다. 모든 원소들의 합이 20이어야 하므로 a=0이다. 따라서 구하는 분할은 (0, 2, 4, 6, 8)이다. d=-2이면 그 분할은 (a, a-2, a-4, a-6, a-8)이고, 모든 원소들의 합이 20이어야 하므로 a=8이다. 따라서 구하는 분할은 (8, 6, 4, 2, 0)이다. 이것은 d=2일 때의 분할의 원소를 역으로 배열한 것이다.

같은 방법으로 [탐구 문제 1]의 (2)를 해결하기 위해, 첫째 원소를 a, 인접한 두 원소의 차를 d로 하는 분할 (a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$)이 존재한다고 하자. 그러면

$$4a+6d=20, \quad a=5-\frac{3}{2}d$$

이다. 이때 a, d는 정수이어야 한다. 그러나 d가 홀수(정수 범위에서)이면 a는 정수가 될 수 없다. 따라서 이 경우에는 20의 D-I형 4-분할이 존재하지 않는다. 그러나 d가 짝수(정수 범위에서)이면 a는 정수가 되므로, 인접한 두 원소의 차가 짝수인 20의 D-I형 4-분할은 항상 존재한다. 예를 들어 인접한 두 원소의 차가 2이면, 20의 D-I형 4-분할은 (2, 4, 6, 8)이다.

[탐구 문제 1]의 (3)의 경우, [탐구 문제 1]의 (2)처럼 생각하면 첫째 원소 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{20}{3}-d$$

여기서 d를 어떠한 정수로 택하더라도 a는 정수가 될 수 없다. 따라서 20의 D-I형 3-분할은 존재하지 않는다.

Ⅳ. [탐구 문제 2]의 탐색

일반적으로 인접한 두 원소의 차가 d로 일정하고, 첫째 원소가 a인 n의 k-분할이 존재한다면, 그 분할은 다음과 같다.

(a, $a+d$, $a+2d$, $\cdots$, $a+(k-1)d$)

대체로 여기까지는 수평적 수학화의 결과라고 할 수 있다. 수직적 수학화가 계속되기 위해서는 이 결과를 수학적으로 처리해야 한다. 그 처리는 모든 원소의 합이 n이어야 하므로, a와 d는 다음을 만족하는 정수이어야 한다는 것을 생각하는 것으로부터 시작될 수 있다.

$$ka+\frac{k(k-1)}{2}d=n \quad \cdots \quad \text{(III.1)}$$

식 (III.1)에서 첫째 원소 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n}{k}-\frac{(k-1)}{2}d$$

[탐구문제 2]의 (1)에 대해, 다음의 예에서 볼 수 있듯이, n이 어떤 자연수라도 n의 D-I형 2-분할이 존재한다.

(-1, n+1), (0, n), (1, n-1), $\cdots$

일반적으로 인접한 두 원소의 차가 d인 자연수 n의 D-I형 2-분할 (a, $a+d$)이 존재할 때 두 원소의 합이 n이므로 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n}{2}-\frac{d}{2}$$

이때 a와 d가 정수이어야 한다. 따라서 n이 짝수이면 d도 짝수(정수 범위에서)이어야 하고,

n이 홀수이면 d도 홀수(정수 범위에서)이어야 한다. 이때 구하는 분할은 다음과 같다.

$$(\frac{n}{2}-\frac{d}{2},\ \frac{n}{2}+\frac{d}{2})$$

[탐구 문제 2]의 (2)에 대해 일반적으로 인접한 두 원소의 차가 d인 자연수 n의 D-I형 3-분할 (a, a+d, a+2d)가 존재할 때 세 원소의 합이 n이므로 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n}{3}-d$$

이때 a와 d가 정수이어야 한다. 따라서 n은 3의 배수이어야 한다. 이때 구하는 분할은 다음과 같다.

$$(\frac{n}{3}-d,\ \frac{n}{3},\ \frac{n}{3}+d)$$

[탐구 문제 2]의 (3)에 대해 일반적으로 인접한 두 원소의 차가 d인 자연수 n의 D-I형 4-분할 (a, a+d, a+2d, a+3d)가 존재할 때, 그것의 네 원소의 합이 n이므로 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n}{4}-\frac{3d}{2}$$

이때 a와 d가 정수이어야 한다. n이 홀수이면 d가 홀수(정수 범위에서)라고 해도 또는 짝수(정수 범위에서)라고 해도 a는 정수가 되지 않는다. n이 짝수 즉, n=2m이라고 하자. 그러면 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{m}{2}-\frac{3d}{2}=\frac{m-3d}{2}$$

따라서 m-3d가 짝수(정수 범위에서)일 때 a는 정수가 된다. m이 홀수 즉, n이 2, 6, 10, … 일 때 a가 정수이기 위해서는 d가 홀수(정수 범위에서)이어야 한다. m이 짝수 즉, n이 4, 8, 12, … 일 때 a가 정수이기 위해서는 d가 짝수(정수 범위에서)이어야 한다. 이때 구하는 분할은 다음과 같다.

$$(\frac{n}{4}-\frac{3d}{2},\ \frac{n}{4}-\frac{d}{2},\ \frac{n}{4}+\frac{d}{2},\ \frac{n}{4}+\frac{3d}{2})$$

이제 이와 같은 예비적 탐색을 바탕으로 주어진 자연수 n에 대해 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 k-분할의 존재 조건을 묻는 [탐구 문제 2]의 (4)를 k가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 해결하기로 한다. 이 과정은 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 k-분할의 존재 조건을 고안하는 수직적 수학화의 중요한 부분이다.

1. k가 홀수일 때 n의 D-1형 k-분할

k가 홀수일 때, 첫째 원소가 a이고 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-1형 k-분할이 존재한다고 하자. 그러면 식 (III.1)에서 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n}{k}-\frac{(k-1)}{2}d$$

k가 n의 약수이면

$$\frac{n}{k},\ \frac{k-1}{2}$$

는 모두 정수이다. 따라서 d가 어떤 정수 값을 가지던 a는 정수이다. 이때 n의 D-1형 k-분할은 다음과 같다.

$$(\frac{n}{k}-\frac{k-1}{2}d,\ \frac{n}{k}-\frac{k-3}{2}d,\ \cdots,\ \frac{n}{k}-d,\ \frac{n}{k},\ \frac{n}{k}+d,\ \cdots,\ \frac{n}{k}+\frac{k-3}{2}d,\ \frac{n}{k}+\frac{k-1}{2}d)\ \cdots \quad \text{(III.2)}$$

예를 들어 n=20, k=5, d=1이면 위의 식에서 인접한 두 원소의 차가 1인 20의 D-1형 5-분할을 구하면 (2, 3, 4, 5, 6)이다. 이것은 앞에서 구한 결과와 일치한다.

한편, k가 n의 약수가 아니면 $\frac{k-1}{2}$는 정수이지만 $\frac{n}{k}$은 정수가 아니다. 따라서 a는 정수가 아니다. 즉, k가 n의 약수가 아니면, k가

홀수일 때 n의 D-1형 k-분할은 존재하지 않는다. 지금까지의 논의를 요약하면 다음과 같다.

> k가 홀수인 경우, 자연수 n의 D-1형 k-분할이 존재할 필요충분조건은 k가 n의 약수인 것이다. 이때 임의의 정수 d에 대해 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-1형 k-분할이 한 개 (즉, III.2) 존재한다.

이것은 차(정수)가 일정한 k(홀수)개의 정수의 합은 k의 배수이고, 홀수 k의 배수는 일정한 차 d(정수)를 갖는 k개의 수의 합으로 나타낼 수 있다는 것을 함의한다.

2. k가 짝수일 때 n의 D-1형 k-분할

다음으로 k가 짝수 즉, k=2p라 하자. n의 D-1형 k-분할의 첫째 원소를 a라고 하면 식 (III.1)에서 a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n}{k}-\frac{(k-1)}{2}d=\frac{n}{2p}-\frac{(2p-1)}{2}d$$
$$=\frac{n-(2p-1)dp}{2p}$$

n이 $p(=\frac{k}{2})$의 배수 즉, $n=n'p$이면(또는 n' =2n이 k의 배수), a는 다음과 같다.

$$a=\frac{n'-(2p-1)d}{2}$$

이때 a가 정수이기 위해서는 n'-(2p-1)d=n'-(k-1)d가 짝수(정수 범위에서)이어야 한다. 따라서 $n'(=\frac{2n}{k})$이 홀수이면 d도 홀수(정수 범위에서)이어야 하며, $n'(=\frac{2n}{k})$이 짝수이면 d도 짝수(정수 범위에서)이어야 한다. 이때 구하는 분할은 다음과 같다.

$$\left(\frac{n'-(2p-1)d}{2}, \frac{n'-(2p-3)d}{2}, \cdots, \frac{n'-d}{2}, \frac{n'+d}{2}, \cdots, \frac{n'+(2p-3)d}{2}, \frac{n'+(2p-1)d}{2}\right) \quad \cdots \text{(III.3)}$$

예를 들어 n=15, k=6이면 $n'(=\frac{2n}{k})$=5이므로, 두 인접한 원소의 차로 어떠한 홀수를 택하더라도 15의 D-I형 6-분할이 존재한다. 예를 들어 d=1인 15의 D-1형 6-분할을 구하면 (0, 1, 2, 3, 4, 5)이다.

한편, $p(=\frac{k}{2})$가 n의 약수가 아니면, $\frac{n}{k}$은 정수가 아니고, $\frac{k-1}{2}$도 정수가 아니다. 따라서 d가 짝수(정수 범위에서)이면 a는 정수가 아니다. 또, d가 홀수(정수 범위에서)일 때 a가 정수이기 위해서는 식 (III.1)에서

$$a=\frac{n}{k}-\frac{(k-1)}{2}d=\frac{2n-(k-1)dk}{2k}$$

이므로 n=p(k-1)d+2ap이다. 즉, p는 n의 약수이다. 이것은 가정에 어긋난다. 따라서 p가 n의 약수가 아니면, k가 짝수일 때 n의 D-1형 k-분할은 존재하지 않는다. 지금까지의 논의를 요약하면 다음과 같다.

> k가 짝수인 경우, 자연수 n의 D-1형 k-분할이 존재할 필요충분조건은 $\frac{k}{2}$가 n의 약수인 것이다. 더 나아가 $\frac{2n}{k}$이 홀수이면 임의의 홀수 d(정수 범위에서)에 대해, 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-1형 k-분할이 존재하고, $\frac{2n}{k}$이 짝수이면 임의의 짝수 d(정수 범위에서)에 대해, 차가 d인 n의 D-1형 k-분할이 존재한다.

이것은 차(정수)가 일정한 k(짝수)개의 정수의 합은 $\frac{k}{2}$의 배수이고, k가 짝수일 때 $\frac{k}{2}$의 배수는 일정한 차 d(정수)를 갖는 k개의 수의

합으로 나타낼 수 있다는 것을 함의한다.

3. k가 홀수인 경우와 짝수인 경우의 통합

위에서 k가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 논의했다. 이제 좀더 세련된 수직적 수학화를 위해 이 두 결과를 통합할 수 있는지 생각할 수 있다. 자연수 n과 k에 대해 식 (III.1)을 만족하는 정수 a와 d가 존재하면 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-1형 k-분할이 존재한다. 그 역도 성립한다. k 와 $\frac{k(k-1)}{2}$의 최대공약수를 g라 하자. k가 홀수이면 $g=k$이고, k가 짝수이면 $g=\frac{k}{2}$이다. 따라서 n의 D-I형 k-분할이 존재할 필요충분조건은 g가 n의 약수인 것이다. n이 g의 배수이면, 자연수 n의 D-I형 k-분할이 존재하고, 그것을 찾는 것은 바로

$$\frac{k}{g}a+\frac{k(k-1)}{2g}d=\frac{n}{g} \text{ (자연수)} \cdots \text{(III.4)}$$

를 만족하는 정수 a, d를 찾는 것이다. 이제 n의 D-1형 k-분할의 존재 조건을 k가 홀수인 경우, 짝수인 경우로 나누어서 논의하기로 하자.

가. k가 홀수일 때 n의 D-1형 k-분할

k가 홀수인 경우 $g=k$이므로 식 (III.4)에서

$$a+\frac{k-1}{2}d=\frac{n}{k}$$

를 만족하는 정수 a, d를 찾으면 된다. 임의의 정수 d에 대해, $a=\frac{n}{k}-\frac{k-1}{2}d$라고 하면 a, d는 식 (III.4)를 만족하는 정수이다. 따라서

$$\left(\frac{n}{k}-\frac{k-1}{2}d,\ \frac{n}{k}-\frac{k-3}{2}d,\ \cdots,\ \frac{n}{k}-d,\ \frac{n}{k},\ \frac{n}{k}+d,\ \cdots,\ \frac{n}{k}+\frac{k-3}{2}d,\ \frac{n}{k}+\frac{k-1}{2}d\ \right)$$

는 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-I형 k-분할이다. 따라서 홀수 k에 대해, n의 D-I형 k-분할이 존재할 필요충분조건은 k가 n의 약수이다. 이 경우 임의의 정수 d에 대해 차가 d인 n의 D-I형 k-분할이 존재한다.

나. k가 짝수일 때 n의 D-1형 k-분할

k가 짝수인 경우 $k=2g$, 즉 $g=\frac{k}{2}$이므로, 식 (III.4)에서

$$2a+(k-1)d=\frac{2n}{k}$$

를 만족하는 정수 a, d를 찾으면 된다. n이 g의 배수, 즉 k가 $2n$의 약수라고 하자. 위의 식을 만족하는 어떤 정수 a_0, d_0를 찾기 위해 먼저 위의 식의 양변을 $\frac{2n}{k}$으로 나누면 다음과 같다.

$$2\cdot\frac{k}{2n}a+(k-1)\frac{k}{2n}d=1$$

다시 $\frac{k}{2n}a=A$, $\frac{k}{2n}d=D$라고 하자. 그러면 위의 식에서 다음이 성립한다.

$$2A+(k-1)D=1,\ A=\frac{1+(1-k)D}{2}$$

이 식을 만족하는 정수로 $D=1$, $A=\frac{2-k}{2}$를 택할 수 있다. 이제

$$a_0=\frac{2n}{k}A=\frac{(2-k)n}{k},\ d_0=\frac{2n}{k}D=\frac{2n}{k}$$

라고 하면 a_0, d_0는 식 (III.4)를 만족하는 정수이므로, n의 D-1형 k-분할이 존재한다. 이때 구하는 n의 D-1형 k-분할은 다음과 같다.

$$\left(\frac{(2-k)n}{k},\ \frac{(4-k)n}{k},\ \cdots,\ \frac{(k-2)n}{k},\ n\right)$$

식 (III.4)를 만족하는 정수 a_0, d_0를 이용하여 예비중등교사들이 n이 g의 배수, 즉 k가 $2n$의 약수일 때 n의 D-1형 k-분할을 더 구할

수 있다. 물론 이러한 탐구가 모든 예비중등교사들에게 가능한 것은 아니다. 그러나 수학적인 역량을 갖춘 예비중등교사들에게는 그러한 과제를 제공할 수 있다. 예비중등교사들은 이 과제를 통해 수학 발명의 메커니즘인 수학화를 심도 있게 경험할 수 있을 것이다. 예를 들어 정수 j에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &2a_0+(k-1)d_0 \\ &=2a_0+2(k-1)j+(k-1)d_0-2(k-1)j \\ &=2\{a_0+(k-1)j\}+(k-1)(d_0-2j) \\ &=\frac{2n}{k} \end{aligned}$$

따라서 $a_j=a_0+(k-1)j$, $d_j=d_0-2j$ (j는 정수)는 식 (III.4)를 만족하는 정수이고, 각 정수 j에 대해

$$(a_j,\ a_j+d_j,\ a_j+2d_j,\ \cdots,\ a_j+(k-1)d_j)$$

는 인접한 두 원소의 차가 일정한 정수 d_j를 갖는 n의 D-1형 k-분할이다.

실제로 n의 모든 D-1형 k-분할은 적당한 정수 j에 대해, 첫째 원소가 $a_0+(k-1)j$이고 인접한 두 원소의 차가 d_0-2j이다. 이것을 보이기 위해 첫째 원소가 a', 차가 d'인 n의 D-1형 k-분할이 존재한다고 하면 다음이 성립한다.

$$2a'+(k-1)d'=\frac{2n}{k}=2a_0+(k-1)d_0$$

따라서 $2(a'-a_0)=-(k-1)(d'-d_0)$이다. 2와 k-1이 서로소이므로, 2는 $d'-d_0$의 약수이고, k-1는 $a'-a_0$의 약수이다. 따라서

$$\frac{a'-a_0}{k-1}=-\frac{d'-d_0}{2}$$

는 정수이다. 이것을 j라 두면 a', d'은 각각 다음과 같다.

$$a'=a_0+(k-1)j,\ d'=d_0-2j$$

즉, n의 모든 D-1형 k-분할은 적당한 정수 j에 대해, 첫째 원소가 $a_0+(k-1)j$이고 인접한 두 원소의 차가 d_0-2j이다.

인접한 두 원소의 차가 일정한 정수인 분할에서, 그 일정한 값의 부호만 바꾸면 원래 분할의 원소의 순서를 역으로 배열하여 만든 분할을 구할 수 있다. 즉, 첫째 원소가 a이고, 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-1형 k-분할이 존재한다면 식 (III.1) 즉, $ka+\frac{k(k-1)}{2}d=n$을 만족하므로 다음이 성립한다.

$$k\{a+(k-1)d\}+\frac{k(k-1)}{2}(-d)=n$$

따라서 두 원소의 차가 $-d$인 n의 D-1형 k-분할이 존재하며, 그것의 첫째 원소는 $a+(k-1)d$이다. 이때 구하는 분할은 다음과 같다.

$$(a+(k-1)d,\ a+(k-2)d,\ \cdots,\ a+d,\ a)$$

첫째 원소가 a이고, 인접한 두 원소의 차가 d인 n의 D-1형 k-분할의 각 원소의 순서를 역으로 배열한 것이다. 따라서 원소의 순서를 무시하는 경우, 인접한 두 원소의 차 d를 음이 아닌 정수로 한정하여 분할을 찾으면 된다.

4. 디오판토스 방정식과 n의 D-I형 k-분할

인접한 두 원소의 차가 d로 일정하고, 첫째 원소가 a인 n의 D-I형 k-분할이 존재한다면, a와 d는 식 (III.1) $ka+\frac{k(k-1)}{2}d=n$을 만족하는 정수이다. 이때 이 식을 만족하는 정수 a, d를 찾는 것은 바로 디오판토스 방정식(Diophantine equation) $ka+ld=n$의 정수해 a, d를 찾는 것과 같다. 따라서 n의 D-I형 k-분할을 구하는 것을 디오판토스 방정식의 정수해를 구하는 것

으로 바꿀 수 있다. 예를 들어 30의 D-I형 4-분할에서 첫째 원소를 x, 인접한 두 원소의 차를 y라고 하면 식 (III.1)에서 다음의 디오판토스 방정식을 얻을 수 있다.

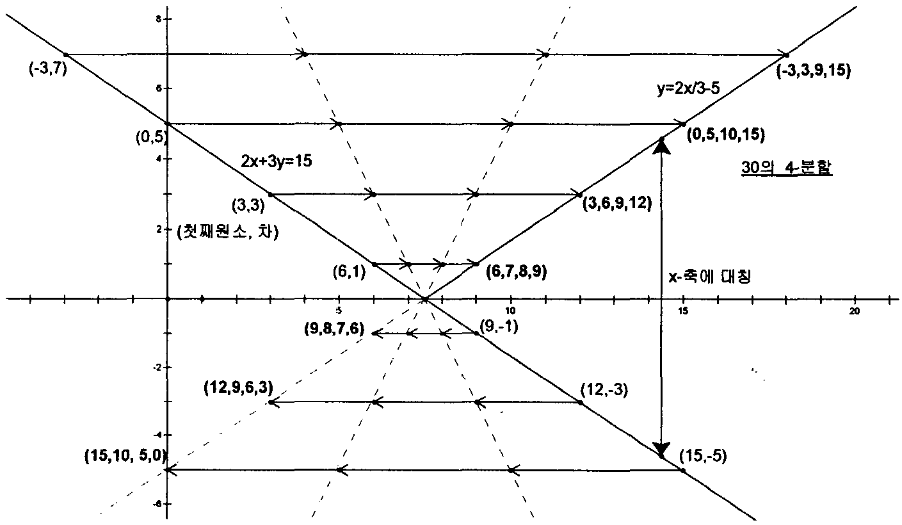
$$4x+\frac{4\cdot(4-1)}{2}y=30 \text{ 즉, } 2x+3y=15$$

이 방정식의 그래프와 정수해를 [그림 IV-1]로 나타낼 수 있다.

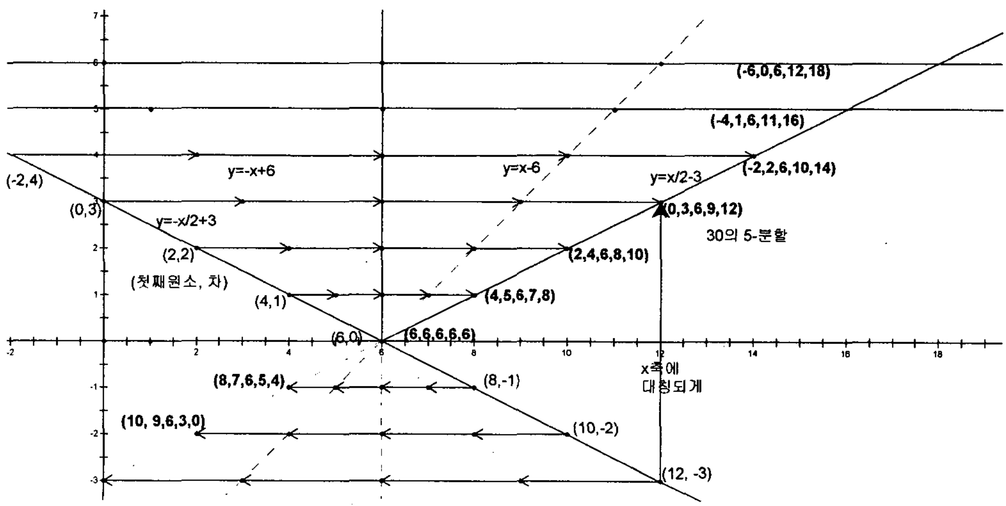
다른 예로 30의 D-I형 5-분할에서 첫째 원소를 x, 인접한 두 원소의 차를 y라고 하면 식 (III.1)에서 다음 디오판토스 방정식을 얻을 수 있다.

$$5x+\frac{5\cdot(5-1)}{2}y=30 \text{ 즉, } x+2y=6$$

이 방정식의 그래프와 정수해를 [그림 IV-2]로 나타낼 수 있다.



[그림 IV-1] 방정식 $2x+3y=15$의 정수해



[그림 IV-2] 방정식 $x+2y=6$의 정수해

이와 같이 n의 D-I형 k-분할을 구하는 것을 디오판토스 방정식의 정수해를 구하는 것으로 바꾸는 것은 또 다른 수평적 수학화의 결과이다. 이것의 수직적 수학화는 바로 디오판토스 방정식이 정수해를 가질 조건의 고안이다. 그러나 그것은 이 연구에서 논의하는 수직적 수학화와 다른 방향이다. 따라서 여기서는 n의 D-I형 k-분할과 디오판토스 방정식의 정수해와 관련이 있다는 것을 언급하는 정도로 그치기로 한다.

Ⅴ. [탐구 문제 3]의 탐색

[탐구 문제 3]은 [탐구 문제 2]보다 구체적이다. 따라서 [탐구 문제 3]의 탐색에서는 더 구체적인 자연수 n의 D-II형 k-분할의 존재 조건을 고안하는 것이 필요하다. n의 D-I형 k-분할이 존재하기 위해서는 k가 홀수이면 k가 n의 약수이어야 하고, k가 짝수이면 k가 $2n$의 약수이어야 했다. 따라서 n의 D-II형 k-분할이 존재하기 위해서는 기본적으로 이 조건을 만족해야 한다. 이제 k가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 n의 D-II형 k-분할의 존재 조건에 대해 논의해 보자.

1. k가 홀수일 때 n의 D-II형 k-분할

k가 홀수이면, 먼저 k는 n의 약수이어야 한다. 각 원소를 균등하게

$$\left(\frac{n}{k}, \cdots, \frac{n}{k}, \cdots, \frac{n}{k}\right)$$

로 택하면, 인접한 두 원소의 차가 0인 n의 D-II형 k-분할이 얻어진다. 따라서 n의 D-II형 k-분할이 존재할 필요충분조건은 k가 n의 약수이어야 하는 것이다. 그러나 k가 n의 약수이어도 임의의 양의 정수 d에 대해, 인접한 두 원소의 차가 d인 분할이 존재한다고 보장할 수 없다. 예를 들어 인접한 두 원소의 차가 5인 9의 D-II형 3-분할은 존재하지 않는다.

앞에서 인접한 두 원소의 차가 일정한 정수 d인 n의 D-I형 k-분할은 식 (III.2) 즉,

$$\left(\frac{n}{k}-\frac{k-1}{2}d,\ \frac{n}{k}-\frac{k-3}{2}d,\ \cdots,\ \frac{n}{k}-d,\ \frac{n}{k},\ \frac{n}{k}+d,\ \cdots,\ \frac{n}{k}+\frac{k-3}{2}d,\ \frac{n}{k}+\frac{k-1}{2}d\right)$$

로 주어졌다. 그런데 D-II형에서 각 원소 p_i는 음이 아닌 정수, 인접한 원소의 차 $p_{i+1}-p_i$는 음이 아닌 정수이므로 언제나 $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_k$이다. 따라서 인접한 두 원소의 차가 $d(\ge 0)$인 n의 D-II형 k-분할이 존재하기 위해서는 k가 n의 약수이고

$$\frac{n}{k}-\frac{k-1}{2}d \ge 0 \text{ 즉, } n \ge \frac{k(k-1)d}{2}$$

이어야 한다. 또, 그 역도 성립한다. 지금까지의 논의를 요약하면 다음과 같다.

인접한 두 원소의 차가 $d(\ge 0)$인 n의 D-II형 k-분할이 존재하기 위한 필요충분조건은 k가 n의 약수이고, $n \ge \frac{k(k-1)d}{2}$이다.

이것을 바탕으로 n의 D-II형 k-분할의 수를 구해보자. n의 D-II형 k-분할에서 인접한 두 원소의 차 d는 음이 아닌 정수이고, 첫째 원소는 음이 아닌 정수이므로 다음과 같다.

$$n \ge \frac{k(k-1)d}{2} \text{ 즉, } d \le \frac{2n}{k(k-1)}$$

따라서 n의 D-II형 k-분할의 수는 다음 집합 P

P={d는 정수| $0 \le d \le \frac{2n}{k(k-1)}$}

의 원소의 수 $\lfloor \frac{2n}{k(k-1)} \rfloor$+1이다. 여기서 $\lfloor \alpha \rfloor$는 α를 넘지 않는 최대의 정수이다. 예를 들어 20의 D-II형 5-분할은 $\frac{2 \cdot 20}{5(5-1)}$=2이므로 $0 \le d \le 2$에서 d=0, d=1, d=2일 때의 3개임을 알 수 있다.

2. k가 짝수일 때 n의 D-II형 k-분할

k가 짝수이면, 먼저 k는 $2n$의 약수이어야 한다. 앞에서 k가 짝수일 때 n의 D-I형 k-분할의 첫째 원소는 $a_0+(k-1)j$이고, 인접한 두 원소의 차는 d_0-$2j$이었다.(이때 j는 정수). 여기서

$a_0=\frac{(2-k)n}{k}$ 이고, $d_0=\frac{2n}{k}$

이다. n의 D-II형 k-분할은 n의 D-I형 k-분할에서 인접한 두 원소의 차가 음이 아닌 정수이고, 첫째 원소가 음이 아닌 정수인 경우이다. 즉,

$d_0-2j \ge 0$, $a_0+(k-1)j \ge 0$

이어야 한다. 따라서 n의 D-II형 k-분할의 수는 다음 집합 Q

Q={j는 정수| $a_0+(k-1)j \ge 0$, $d_0-2j \ge 0$}

={j는 정수 | $\frac{(k-2)n}{k(k-1)} \le j \le \frac{n}{k}$}

의 원소의 수 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ - $\lceil \frac{(k-2)n}{k(k-1)} \rceil$ 이다. 여기서 $\lfloor \alpha \rfloor$는 α를 넘지 않는 최대의 정수이고, $\lceil \beta \rceil$는 β보다 작지 않은 최소의 정수이다. 예를 들어 20의 D-II형 4-분할은 $\lceil \frac{(4-2) \cdot 20}{4 \cdot (4-1)} \rceil$=4, $\frac{20}{4}$=5이므로 $4 \le d \le 5$에서 d=4, d=5일 때의 2개임을 알 수 있다.

Ⅵ. 결 론

이 연구에서는, 김진환과 박교식(2006)에서와 마찬가지로, 예비중등교사들이 장차 중등학교에서 수학화 교수-학습을 안내하기 위해서는, 먼저 그들이 수학화에 익숙해야 한다고 보고, 그들이 수학화를 경험하고 훈련할 수 있게 하는 교수단원 <분할 모델의 탐구 - 인접한 두 원소의 차가 일정한 경우>를 설계하고 있다. 예비중등교사들은 현상을 조직하는 수단인 본질을 고안해야 하는 바, 그것은 적절한 프로그램을 통해 이루어질 수 있다. 예비중등교사들의 수학화는 사실상 수학자들의 수학화는 아니며, 단지 그것을 흉내 낸 것이다. 예비중등교사들이 수학자들의 수학화를 자연스럽게 흉내 낼 수 있게 하기 위해서는, 그것을 목표로 하는 적절한 프로그램이 필요하다. 이 연구에서 설계하는 교수단원이 바로 그러한 프로그램에 해당한다.

특히 이 연구는 김진환과 박교식(2006)의 후속 연구로서, 예비중등교사들이 분할 모델로 조직된 현상에서 다시 그것을 조직하는 자연수 n의 k-분할의 존재 조건이라는 본질을 고안하게 하는 것에 초점을 맞추고 있다. 특히 이 교수단원에서 다루는 분할 모델은 학교수학의 한 과목인 '이산수학'에서 취급하는 '자연수의 분할'과 연결되는 바, 예비수학교사들은, 이 교수단원을 통해 '자연수의 분할'을 학교수학보다 높은 관점에서 새롭게 조망할 수 있을 뿐만 아니라, 학교수학과 학문수학의 자연스런 연결을 볼 수 있다(김진환, 박교식, 2006).

예비중등교사들은 이 교수단원을 통해 2차적인 수학화 능력을 기를 수 있다. 본질에 의해 현상이 조직되면, 그 조직된 현상은 원래의 현상과 다른 것이다. 그것은 본질을 사용하여 기술된 새로운 현실이다. 그 중에는 수학으로 조

직할 필요가 있는 현실이 있다. 그래서 그것을 새로운 현상으로 보고, 새로운 관점에서 그것을 조직하는 새로운 본질을 고안하게 된다. 즉, 또 다른 수학화가 이루어진다. 이 수학화는 처음의 수학화보다 한 차원 높은 수학화이다. 이런 점에서 1차적 수학화 후에 2차적 수학화가 진행된다고 할 수 있다. 이 연구에서 설계하는 교수단원을 통해 예비중등교사들은 자연수 n의 k-분할의 존재 조건을 고안하기 위해, 2차적 수학화를 실제로 시도하게 된다. 예비중등교사들이 새로운 수학적 결과를 발명해 내는 것은 아니지만, 그들은 이 교수단원을 통해 마치 수학자들이 정리를 만들어 내는 것과 유사한 과정을 밟으면서 2차적인 수학화를 경험하고 훈련할 수 있다.

이 연구에서 설계한 교수단원은 사고실험과 이론적 평가를 통해 개발한 것으로, 그대로 예비중등교사들을 대상으로 실제로 적용가능하다. 그러나 비록 이 교수단원이 적용가능한 것이기는 하지만, 그것을 실제로 적용하였을 때, 그것이 원래의 목적에 완벽히 부합하는 기능을 발휘한다고 보장할 수는 없다. 그것의 설계는 그것이 기대하는 수학화를 수행할 능력이 있다고 기대되는 통상적인 예비중등교사들을 염두에 둔 것이기 때문이다. 따라서 이 교수단원을 실제로 적용하고, 그 임상적 결과를 바탕으로 교수단원을 지속적으로 수정하는 것이 필요하다.

참고문헌

김진환 · 박교식(2006). 예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계: 수 분할 모델의 탐구. **한국학교수학회논문집, 9**(1), 57-76.

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

De Lange, J., & Verhage, H. B. (1987). Math A and achievement testing, *Proceedings of the 11 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 243-248.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing : preface to a science of mathematical education,* D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1985). Mathematics starting and staying in reality. In I. Wirszup & Streit (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world: applications-oriented curricula and technology-supported learning for all students.* Chicago: The University of Chicago. 279-295.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* (China Lectures) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1987). *Tree dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics 15*(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4); 355-374.

Wittmann, E. (1999). Designing teaching: The pythagorean theorem. In T. J. Cooney, et. al., *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education.* 97-165. Portsmouth, NH: Heinemann.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 1-20.

A Study on Designing Mathematising Teaching Units for the Inquiry into Number Partition Models with Constant Differences

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)
Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)
Lee, Kwang Ho (Oregon State University)

Some adequate programs for mathematising are necessary to pre-service mathematics teachers, if they can guide their prospective students in secondary school to make a mathematising. They should be used to mathematising. In this paper, mathematising teaching units for the inquiry into number partition models with constant differences are designed for this purpose. They guide a series of process to make nooumenon for organizing phainomenon which is organized already through number partition model. Especially the new nooumenon and the process of obtaining it are discussed. But it is restricted when the numbers for partitioning are natural numbers, and elements and their differences are integers. Through these teaching units, pre-service mathematics teachers can experience and practice secondary mathematising, as they go through the procedures which are similar with those of mathematicians making theorems.

* key word : 교수단원(teaching units), 본질(本質, nooumenon), 수 분할 모델(number partition model), 수직적(vertical) 수학화, 수평적(horizontal) 수학화, 수학화(mathematising), 현상(現象, phainomenon)

논문접수 : 2006. 4. 30
심사완료 : 2006. 6. 5