대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.2, 215-237. Jun. 2006

중학생의 성취수준에 따른 기하 문제해결의 특징 탐색

김 기 연*·김 선 희**

본 연구는 국가수준 학업성취도에 따라 구분된 학생들의 성취수준별로 기하 문제해결에서 어떤 특징을 보이는지를 탐색하려 하였다. 기초학력, 보통학력, 우수학력 학생 3명씩을 동질그룹으로 구성하여 교사의 도움 없이 비정형적인 기하 문제를 해결하게 하였고, 관찰을 통해 성취수준별로 기하 개념 발달 수준이 어떠한지, 문제해결의 방법을 선택할 때 어떤 접근을 하는지를 분석하였다. 기초학력 학생들은 모양과 실용 기하의 개념 수준에서 문제해결에서 무엇을 할 수 있는가에 초점을 둔 물리적, 구체적 행동을 보였고, 보통학력 학생들은 실용 기하와 유클리드 기하의 수준에서 문제해결을 위해 무엇을 해야 하는가에 초점을 두어 문제해결의 여러 가지 방법을 탐색했으며, 우수학력 학생들은 실용 기하와 유클리드 기하의 수준에서 일반화와 정당화를 통해 문제해결의 본질에 접근하려 하였다. 본 연구는 이에 따라 학생들의 수준별 수학 학습을 지도하는 것에 대한 시사점을 제안하였다.

핵심어 : 성취수준, 기하, 문제해결

Ⅰ. 서 론

현재 시행중인 7차 수학과 교육과정의 가장 큰 특징은 동일 단계의 학습과정에서도 학생의 학습 능력에 따라 심화·보충 과정을 운영하고, 학생들이 자신의 능력과 수준에 맞는 학습을 할 수 있도록 하는 단계형 수준별 교육과정이라는 것이다. 최근에는 수준별 교육과정의 취지에 부합하는 학교 수업을 정착시킨다는 취지에서 학생들의 성취수준에 따라 학급 구성을 달리하여 학생들이 동질그룹 내에서 자신의 능력과 수준에 맞는 수업에 참여할 수 있도록 하는 수준별 이동 수업이 권장되고 있으며, 수준별 교육과정 및 수업의 필요성, 개발 방향, 평가 준거 개발 및 효과 등에 대한 연구도 많이 이루어지고 있다.

수준별 수업이 효과적으로 실시되기 위해서 교사는 효과적이고 유의미한 수업을 계획하고 올바르게 평가하기 위한 준비를 해야 한다. 지금까지 수준별 수업과 관련한 연구로, 허경철(1996)은 국가·사회의 발전에 기여하는 인재 양성과 개인의 행복 추구를 위한 교육의 목적 실현을 위해 교육 여건을 개선하고 학생들의 다양한 개인차를 고려한 수준별 교육과정의 필요성을 역설하였다. 수준별 평가와 관련하여 김대현, 김석우, 박소영(2000)은 수준별 교육과정의 평가영역 및 준거를 개발하고 수준별 교육과정 운영의 과정을 평가하는 데에 활용할 것을 제안하였고, 김석우, 김정섭, 정성아(2004)는 실제 학교 연장에서 이루어지고 있는 수준별 수업에서 그룹 편성을 위한 진단평가, 학생들의 학습 과

* 북악중학교(freenego@lycos.co.kr)
** 한국교육과정평가원(math1207@kice.re.kr)

정과 학업성취도 평가를 위한 형성, 총괄평가 등을 실시하는 데에 있어서 발생하는 현실적 문제를 지적하면서 수준별 수업 운영의 설계, 과정 및 결과를 평가함에 있어서 실질적인 어려움과 요구사항이 무엇인지를 보여주었다. 박소영(2001)은 수준별 수업 운영의 실태에 주목하여 심화 과정과 보충 과정을 배려한 수업 목표, 내용, 방법 및 평가의 운영이 이루어지고 있는지, 이에 대해 교사의 전문성, 규범, 환경요인 등의 인식은 어떤 차이가 있는지를 연구하였고, 김회영(2002)은 수준별 수업에 대한 중학교 과학 교사들의 의견을 조사한 연구를 진행하였다.

이와 같은 선행연구를 살펴보면 수준별 교육과정이 왜 필요하며 어떻게 나아가야 할 것인지, 수준별 교육과정의 적용에 따른 평가는 어떻게 이루어져야 하며 학교 현장에서의 문제점과 요구사항은 무엇인지, 현행 교육과정 하에서 수준별 수업에 대한 현실적, 제도적인 문제를 교사가 얼마나 어떻게 인식하고 있으며, 수준별 수업의 실시에 대한 인식이 어떤 경향을 나타내고 있는지가 나타나 있다. 그러나 실제로 수준별 수업을 어떻게 해야 하는지에 대하여 방향을 제시한 연구는 부족한 형편이다. 수준별 교육과정과 수업이 학습자 개개인의 능력과 수준에 맞는 교육을 제공하여 그들의 수학적 능력의 신장을 꾀하는 것이라면, 우선 학습자의 수준에 맞는 학습과 문제해결의 특성을 살피고, 이를 반영하여 학습 능력을 신장시켜 줄 수 있는 수업을 설계하도록 다양하고 의미 있는 정보가 교사들에게 제공되어야 할 것이다. 이에 본 연구는 학생들의 성취수준에 따라 기하 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 지식과 정보 활용, 문제해결의 접근 방법, 정당화가 어떠한지를 탐색하여 학생들의 성취수준별 특징을 살펴봄으로써 학생들의 수준에 따른 학습 지도의 기초 자료를 제공하고자 한다. 9명의 중학교 3학년 학생들을 대상으로 비정형적인 기하 문제를 제시하고, 학생들이 동질 그룹별로 문제를 해결하면서 보여준 기하 개념의 발달 수준과 문제해결 과정의 특징을 분석할 것이다.

II. 이론적 배경

1. 학생들의 성취수준

높은 수학적 성취를 나타내는 학습자와 낮은 수학적 성취를 나타내는 학습자는 어떤 차이가 있을까? Kruteskii(1976)는 능력 있는 학생, 보통 학생, 능력이 부족한 학생들의 특징을 연구하면서 능력이 있는 학생들은 일반적인 전략을 기억하고 필수적인 것에 초점을 두어 해를 생략하며 대안의 해를 제공할 수 있다고 하였다. 보통 학생들은 자세한 것을 기억하고 같은 유형을 여러 번 실행한 후에야 해를 간단하게 구하고 문제에 대하여 하나의 해를 구할 수 있고, 능력이 부족한 학생들은 종종 부적절한 자세한 내용을 기억해 내고 오류가 있는 해를 만들고 다른 대안을 시도하지 못한다고 하였다. 이러한 특징은 우리나라 학생들에게서도 나타날 수 있다.

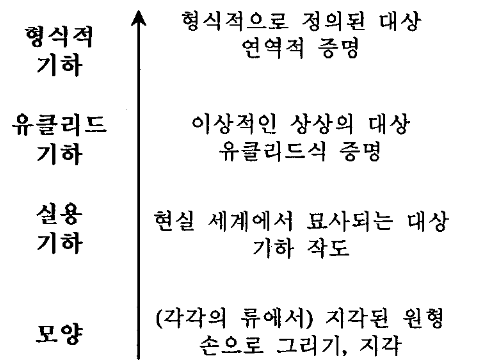
학생들의 성취수준을 파악하는데 일관된 기준은 존재하지 않지만 국가수준에서는 학생들의 성취수준을 학업성취도 평가에 의해 파악하고 있다. 이때 성취수준은 "평가대상 학년급 학생들이 성취할 것으로 기대하는 기본 내용의 이해 정도"를 양적으로 표현하는 것으로 정의된다(이양락, 김선희, 고정화, 조영미, 구자형, 2005). 우수학력 수준은 기본 내용을 대부분(80%이상) 이해하고, 보통학력에서는 상당 부분(50~80%), 기초학력에서는 부분적으로(20%~50%) 이해한 수준이라 할 수 있다. 하지만 이 정의는 학생들의 성취수준을 양적으로 표현한

것일 뿐 실제로 그 학생들이 어떤 특징을 갖고 있는지 질적인 측면에서 설명해주지 못한다. 따라서 각 성취수준별로 학생들이 어떤 특징을 갖고 있는지를 파악하기 위해서는 질적인 접근이 필요하다. 이 연구에서는 국가수준에서 결정된 성취수준에 해당하는 학생들의 특징을 기하 문제해결에 초점을 두어 알아볼 것이다.

2. 기하 개념의 발달

기하 문제해결에 대한 학생들의 수준별 특징을 살펴보기 전에 기하 학습에 있어서 학습자의 인지 발달 수준에 따른 학습 행동의 특징을 먼저 살펴본다. Tall, Gray, Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas, & Yuso(2001)의 기하 개념의 발달 단계에 대한 연구를 보면, 인지 수준이 높을수록 도형의 모양과 같은 시각적인 정보 보다는 이상적인 대상을 가지고 증명을 시도하게 된다고 한다. van Hieles의 기하학적 사고 발달 이론은 학습자의 발달 단계가 높아짐에 따라 이전 단계에서 대상을 인지하는 수단으로 사용되었던 것이 다시 하나의 대상이 되는 연속적 발달의 개념을 취하고 있는 데에 비해, Tall 등의 기하 개념의 인지적 발달 수준에서는 학습자의 수준에 따라 달라지는 학습 행동, 문제 해결의 양식을 살펴볼 수 있다.

Tall 등은 학생들이 기하에서 무엇을 인식하는지에 따라 기하 개념의 발달 수준을 [그림 II-1]처럼 4가지로 나누었는데, 사각형, 삼각형 등의 류를 직접 손으로 그리거나 지각된 원형으로부터 모양을 지각해 내는 수준, 현실 세계에서 묘사되는 대상을 작도할 수 있는 실용 기하의 수준, 실세계의 대상을 이상적으로 상상하고 그 성질을 증명할 수 있는 유클리드 기하, 상상하지 않고도 형식적으로 대상을 정의하고 그 대상에 대한 성질을 연역적으로 증명할 수 있는 형식적 기하의 수준이 있다. 이런 분류는 학습자의 인지 수준이 어디인가에 따라 시도하는 문제해결 방법의 차이를 살펴볼 수 있게 해 준다. 이때 기하 개념의 발달에서 언어는 점차 중요한 역할을 한다. 예를 들어, 기하 개념의 발달 4수준 중 유클리드 기하에서는 직선, 삼각형, 원은 모양을 이상적으로 상상할 수 있도록 '완벽한 정사각형, 완벽한 원, 방향이나 임의로 확대될 수 있는 너비가 없는 완벽한 직선'으로 묘사되어야 한다. 완벽한 기하적 실재는 그 의미를 갖기 위해 언어에 의존하게 되며, 유클리드 증명 또한 시각적 개념에 기초한 연역을 지원하기 위해 언어를 사용하게 된다. Tall 등의 기하 개념 발달 수준은 학생들의 사고와 언어가 함께 발달되어야 한다는 것을 가정하고 있다.



[그림 II-1] 기하 개념의 발달 수준
(Tall 등, 2001)

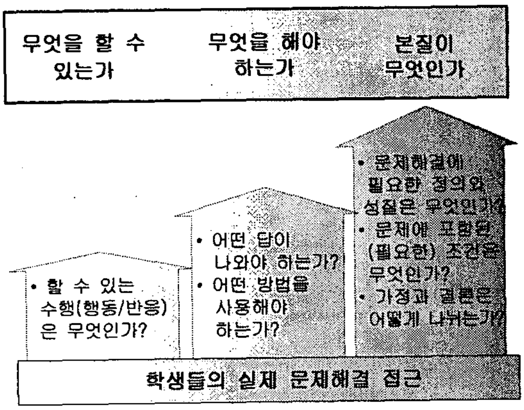
이 연구에서는 중학생의 수준에서 형식적 기하의 수준에 도달하는 것을 관찰하는 것이 어려우므로 모양, 실용 기하, 유클리드 기하의 수준에서 학생들의 기하 문제해결을 분석하기로 한다.

3. 문제해결 방법의 접근

학생들이 수학적 지식을 구성하거나 수학을 다루고 문제를 해결해 나가는 과정의 차이를 알게 된다면, 교사는 학생에게 문제해결 과정을

안내하고, 학생의 수준에 맞는 수업을 하는 것에 매우 중요한 정보를 얻을 수 있다. 더 나아가 수준별 수업을 운영하는 교사가 학생의 학습 수준과 더불어 그 수준에서 나타나는 문제해결의 특징과 경향을 파악한다면, 학생들에게 얼마나 어려운 문제를 얼마나 많이 제공하느냐의 수준별 수업이 아니라 학생들의 문제해결력 신장을 꾀하는 수준별 수업을 할 수 있을 것이다.

학습자의 성취수준에 따른 문제해결 과정의 차이와 특징을 연구한 Tall 등(2001)은 성취수준이 낮은 학생은 시각적인 대상과 정보에 집중하고 실질적인 조작 활동을 하는 데에 초점을 두지만 성취수준이 높은 학생은 시각적이거나 실질적인 대상과 정보 보다는 상징적인 체계에 초점을 둔다고 하였다. Pitta & Gray(1997; Gray, Pinto, Pitta, & Tall, 1999, 재인용)는 성취가 낮은 학생들은 수학적인 것과 그렇지 않은 것을 구분하지 못하고 물리적이고 구체적인 경험에 계속 초점을 두고 있지만, 성취가 높은 학생은 상황 내에서 수학적인 내용을 분리하고 그 의미에 초점을 두며 발생적 방법을 사용하여 문제해결을 조절한다고 하였다. 이러한 연구 결과는 학생들이 기하 문제를 해결할 때에도 나타날 수 있는 것이며, 본 연구에서는 이것을 학생들이 문제해결을 시도할 때 무엇에 초점을 두었는가에 따라 [그림 Ⅱ-2]의 스펙트럼을 제시한다.



[그림 Ⅱ-2] 문제해결 방법의 선택 스펙트럼

본 연구는 학생들이 문제를 해결할 때 어떤 방법을 시도하는지 분석하는 틀로 학생들이 무엇을 할 수 있는가, 무엇을 해야 하는가, 문제해결의 본질이 무엇인가를 구분하였다. Gray & Tall(2001)은 수학적 수행에 따른 학습 결과와 문제해결의 차이를 분석하였는데, 학생들의 수학 학습은 단순한 절차를 정확하게 수행하는 절차로부터, 수학을 유창하고 효율적으로 수행하는 과정을 거쳐, 상징적으로 사고하는 과정-대상(procept)으로 점차 세련화되어 간다고 하였다.

일반적인 문제해결에서도 구조적으로 대상을 파악하지 않고 할 수 있는 행동으로 접근하는 절차적 측면을 본 연구에서는 '무엇을 할 수 있는가'에 따른 문제해결 방법 선택이라 보았고, 여러 절차를 압축하여 일반화된 과정으로 수행하는 것을 문제해결에서 문제에서 요구되는 것에 따라 해를 찾고 여러 가지 방법을 탐색해 보는 '무엇을 해야 하는가'의 방법이라 보았다. 그리고 대상을 보면서 그 안에 내재된 과정을 함께 파악하고 상징적으로 사고할 수 있는 수준을 문제해결에서는 보다 일반화된 관점에서 문제를 해결하여 해를 찾으려는 시도로써, 학습자 나름대로 '본질이 무엇인가'를 찾으려는 접근이라 보았다.

그리고 학생들의 문제해결 과정은 문제해결을 준비하는 단계, 문제해결 단계, 정당화의 단계의 3가지로 구분하고 각 단계에서 학생들이 수학적 지식과 정보를 활용하는 방법, 문제해결의 접근 방법, 정당화의 특징이 어떤 것인지를 각각 탐색하려 하였다.

각 단계에서 관찰할 내용은 Polya(1986)의 문제해결 전략을 참조하여 <표 Ⅱ-1>과 같이 구성하였다.

<표 Ⅱ-1>학생들의 문제해결 과정 관찰 목록표

문제해결준비	◦ 문제 상황을 스스로 이해하려는 노력(시도)이 있는가? ◦ 문제에서 단서를 찾아내는가? ◦ 문제해결에 필요한 선수학습 지식을 체크하는가?
문제해결	◦ 문제해결을 위해 선수학습 지식을 활용하는가? ◦ 문제해결에 필요한 수학적 개념을 도출하는가? ◦ 어떤 수학적 경향을 나타내는가? ◦ 어떤 문제해결의 전략을 사용하는가? 직관, 기하적 개념 및 전략, 대수적 개념 및 전략 등 특색 있는 것을 기록) ◦ 그룹 구성원간의 상호작용이 나타나는가? ◦ 자신의 의견을 피력하는가? ◦ 시행착오의 과정이 나타나는가? ◦ 다양한 해결전략(방법)을 시도하는가?
정당화	◦ 올바른 결론을 이끌어 내는가? ◦ 자신이 이끌어낸 결론에 대해 설명(해설)하는가? ◦ 문제해결 결과에 대한 정당화를 할 수 있는가? ◦ 문제해결 과정 및 결과에 대해 반성하는가?

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 중학교 3학년 학생 9명을 대상에게 비정형적인 문제인 퀼트 문제를 제시하여 학생들의 문제해결 과정을 관찰하였다. 자세한 내용은 다음과 같다.

1. 연구 대상

연구 대상은 한국교육과정평가원에서 실시한 『2005년 국가수준 학업성취도 평가』에 표집된 중학교 3학년 학생들 중 서울 B중학교의 한 학급에 속해 있으며 본 연구에 참여하기를 희망하는 학생들 9명으로 선정하였다. 이들의 수학적 성취수준은 학업성취도 평가의 결과에 따라 '우수학력', '보통학력', '기초학력'으로 판단된 것을 기준으로 구분된다. 학생들은 성취수준별로 3명씩 동질 그룹에 배치되었다. 국가수준 학업성취도는 우리나라 학생 전체의 수준을 객관적으로 구분해 줄 수 있는 평가이므로 이 평가 결과를 사용하여 학생 수준을 구분하였다. 학생들은 중학교 『수학 9-나』의 단계를 거의 마쳤으며, 퀼트 문제와 관련된 내용인 '사각형의 성질'에 대해 『수학 8-나』 단계의 도형 단원에서 학습한 바 있다. 연구에 참여한 학생들 각각의 특징은 다음과 같다.

'기초학력' 그룹의 학생 A1은 학교 수학 성적은 평어 '수'에 해당하며 자신의 성적관리에 매우 성실하고 적극적이다. 그러나 학교 시험 성적에 비해 수학적 사고력이나 문제해결력 수준이 낮은 편으로 단기간에 제한된 범위를 다루는 중간, 기말고사에 비해 전 학년 과정의 내용을 폭넓게 포함하고 있는 국가수준 평가에서는 높은 점수를 얻지 못했다. 학생 A1은 본 연구에서 자신이 속한 그룹의 전반적인 문제해결을 주도하였다. 학생 A2와 A3은 학교 수학 성적 평어가 각각 '가'와 '양'으로 수학적 사고력이나 문제해결력 수준이 매우 낮았다. 그러나 본 연구에서 매우 성실하고 진지한 태도로 문제를 해결하려고 노력하였다.

'보통학력' 그룹의 학생 B1은 학교 수학 성적 평어는 '수'에 해당하며 자신의 성적관리에 매우 엄격하고 성실한 학생이다. 그러나 성격이 매우 조용하고 내성적인 학생으로 자신의 의견을 드러내고 토론에 참여하기보다는 혼자 문제해결을 시도하는 경향을 나타내었다. 학생 B2는 전체적인 학교 성적에 비해 수학의 성적이

낮은 편으로 평어는 '미'에 해당한다. 학생 B3의 학교 수학 성적 평어는 '우'에 해당하고, 학생 B2와 함께 비교적 적극적으로 문제해결 과정에 참여하였다. '보통학력' 그룹의 학생들은 지속적인 아이디어 교환이나 토론보다는, 아이디어가 공유되면 각자 문제를 해결하는 방식으로 답을 찾아 나갔기 때문에 다른 두 그룹에 비해 관찰되는 의사소통 장면이 매우 적었다.

'우수학력' 그룹의 학생 C1, C2, C3은 모두 학교 수학 성적 평어 '수'에 해당하며, 그 중 C2와 C3은 문제해결 과정에서 적극적으로 자신의 아이디어와 주장을 펼쳤으며 토론도 활발히 이끌어 나갔다. 이에 비해 학생 C1은 높은 성적에 비해 문제해결에 소극적으로 참여하였으며, 시간이 지날수록 과제 집착력이 약해지는 현상을 보였다.

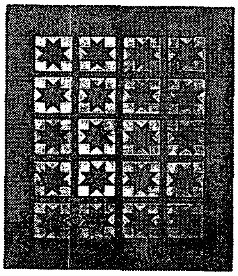
2. 학생에게 제시된 과제

학생들에게 제시된 과제는 Lesh & Carmona (2003)의 연구에서 모델-도출 활동을 위해 사용된 퀼트 문제를 각색한 것이다. 학생들에게는 활동지와 문제해결 과정에서 활용할 수 있는 사각형의 정의와 성질 및 포함관계가 있는 참고자료가 제공되었다. 학생들이 해결해야 할 과제는 주어진 그림을 보고 문제의 조건에 맞게 그 본을 그려나가는 과정을 설명하는 것이다.

학생들은 각자 자신이 속한 소그룹 안에서 문제해결을 위한 아이디어, 정보 등을 소리내어 말하여 문제해결의 과정을 드러내었다. 또한 최종적으로 제출하는 답지에 서로 의논하고 고민하여 내린 결론을 바탕으로, 주어진 기본 패턴을 조건에 맞게 그려내는 과정을 설명하게 하였다.

학생들에게 제시된 문제는 [그림 Ⅲ-1]과 같다.

다음의 사진은 벽걸이 퀼트의 완성본입니다.



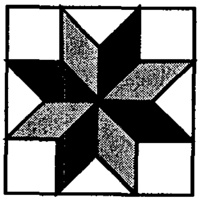
[그림 1] 완성본 퀼트의 사진

우리는 퀼트를 만들고 싶어 하는 초보자들에게 이 벽걸이 퀼트를 만드는 법에 대해 알려주는 기사를 써야 합니다. 가지고 있는 정보는 이 사진 하나가 전부입니다. 사진이 흑백이라 잘 보이진 않지만 가운데 부분에 들어가 있는 무늬는 서로 다른 세 가지 색깔의 천으로 되어 있습니다.

위의 사진과 같은 모양의 퀼트 벽걸이를 만들기 위해서 알아내거나 정해야 하는 것은 어떤 것들이 있을까요?

이 벽걸이의 전체 크기는 100×120 (가로×세로)가 되도록 해야 합니다.

과제를 해결하기 전에 무엇부터 준비해야 할지 생각해 봅시다. 사진과 같은 벽걸이를 만들기 위해서는 [그림 2]와 같은 기본 패턴을 그려야 합니다.



[그림2] 기본패턴의 색깔 배합

각 도형이 서로 맞닿게 되는 부분의 변의 길이는 같아야 하겠지요?

기본 패턴에 들어가는 각 도형을 어떻게 작도할 수 있는지, 크기는 어떻게 결정해야 할지 생각해 봅시다.

우리가 해결해야 하는 과제는 다음의 두 가지입니다.

과제 (1) <그림 2>의 기본 패턴에서 색칠된 부분의 사각형이 **서로 합동인 8개의 평행사변형**이 되도록 그리는 과정을 설명하시오.

과제 (2) <그림 2>의 기본 패턴에서 색칠된 부분이 **서로 합동인 8개의 마름모**가 되도록 그리는 과정을 설명하시오.

[그림 Ⅲ-1] 학생들에게 제시된 문제

주어진 문제가 학교 수업시간에 다루는 일반적인 형태의 계산이나 증명 문제가 아니기 때문에 학생들은 초반에 이 문제가 쉽지 않다고 여겼다. 그러나 곧 자유로운 분위기 속에서 문제해결을 시도해 나갔다.

3. 학생 관찰

본 연구는 세 그룹의 학생들에게 같은 문제를 주고 학생들이 문제를 해결하는 과정을 관찰하고 그 결과를 토대로 학생들의 성취수준에 따라 나타나는 문제해결 과정에서의 특징을 분석하였다.

각 그룹은 소그룹 협동 학습의 형식으로 방과 후 문제해결 활동 시간을 갖고, 연구자는 학생들의 문제해결 과정에 대한 관찰을 진행하였다. 관찰이 진행되는 동안 학생들은 자신의 아이디어나 질문 사항 등을 자유롭게 토의하였고, 문제해결의 과정과 결과를 활동지와 연습지 등에 기록하고, 최종 결과는 별도의 답지에 답과 설명을 함께 기록하였다. 그룹당 한 대의 카메라를 설치하여 촬영하였고, 분석은 학생들의 활동지, 연습지, 답지와 연구자가 작성한 <표 Ⅱ-1>의 목록을 기초로 하였다.

Ⅳ. 성취수준별 문제해결 관찰 결과

이 장에서는 학생들이 문제를 해결하는 과정을 관찰한 결과를 보고한다.

1. ‘기초학력’ 그룹의 문제해결 과정

가. 문제해결 준비

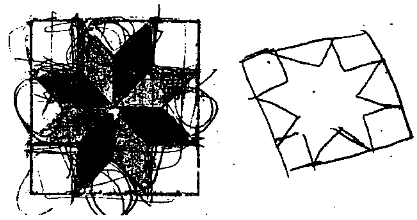
기초학력 그룹의 학생들은 처음에는 의견 교환이나 아이디어 수렴의 모습이 거의 보이지 않았다.

학생들은 주어진 활동지를 읽으면서 문제가 쉽지 않다고 여겼고, 제시된 문제를 한참 읽어 보고, 제시된 참고 자료를 살펴 본 후에 문제 상황을 어느 정도 파악한 학생 A1의 주도로 해결과정이 진행되었다. 활동지에 제시된 도입 단계의 문제에 대해서도 명확한 수학적 용어를 사용하기 보다는 ‘중심점을 지나는 선의 길이’ 등으로 서술하는 형식의 답을 기록하였다.

A1 : 뭘 먼저 구해야 하지?
활동지 기록 예 : “중심점을 지나는 선의 길이”

나. 문제해결

학생들은 선수학습 지식이나 정보를 활용하기 보다는 주어진 문제를 계속 되뇌면서 기본 패턴 그림의 테두리에만 주목하는 모습을 보였다.

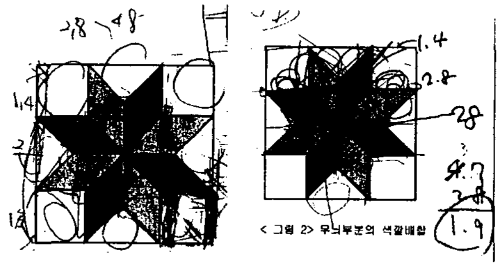


[그림 Ⅳ-1] ‘기초학력’ 그룹의 문제해결 시도 1: 정사각형에서 색칠된 도형의 특징을 살피려 함

이는 학생들이 기본패턴이 가지고 있는 기하학적 성질보다는 시각적인 정보에 주목하는 것으로 해석된다.

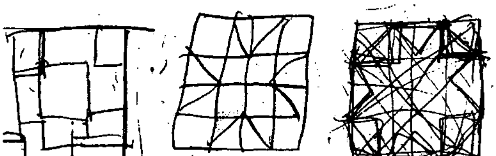
A1 : 일단 이 테두리 모양을 보면... 별모양으로...여덟 개 있는 별모양....
A1 : 선생님, 이거 크기는 저희 맘대로 해도 돼요?
A2 : 이거 자로 재 보자. 선생님이 합동이라고 했으니까..
A1 : 여기 큰 정사각형 귀퉁이에서 작은 정사각형을 빼내면...또 정사각형이 남으니까.. 그 안에 대각선을 그리고...

주어진 기본패턴에서 어떤 도형의 정의, 성질, 길이 등을 구해야 하는지에 신경을 쓰지 않다가 변의 길이를 알아야 기본패턴을 그릴 수 있다고 판단한 후에 학생들은 활동지에 인쇄되어 있는 기본패턴의 실제 길이를 자로 재려고 시도하였다.



[그림 Ⅳ-2] '기초학력' 그룹 문제해결 시도2:
인쇄된 그림의 길이를 자로 측정하려 함

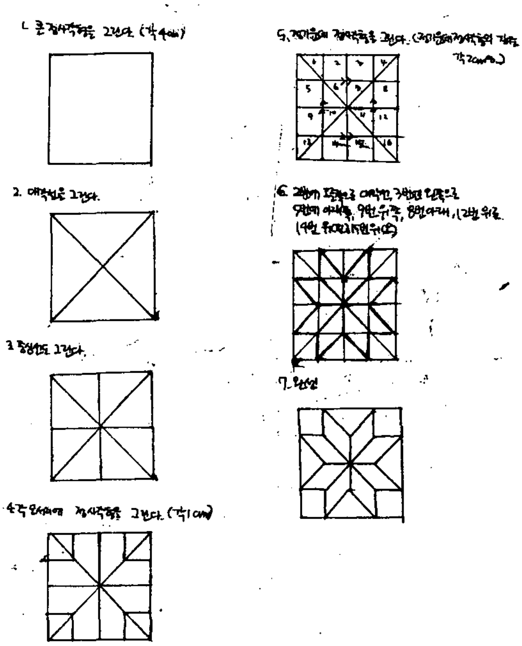
인쇄된 그림의 실제 길이를 자로 재어 기본패턴을 그리려고 하는 과정에서 학생들은 하나의 큰 정사각형의 네 꼭지점에서 작은 정사각형을 그려서 제거하면 기본패턴의 외부 모양(학생들은 이 도형을 '별모양' 이라고 표현하였다)에 가까워진다고 생각하고 외부 선분의 모양을 만들어가는 방식으로 기본패턴을 완성하려고 하였다.



[그림Ⅳ-3] '기초학력' 그룹 문제해결시도 3:
기본패턴의 외부모양부터 완성하려 함

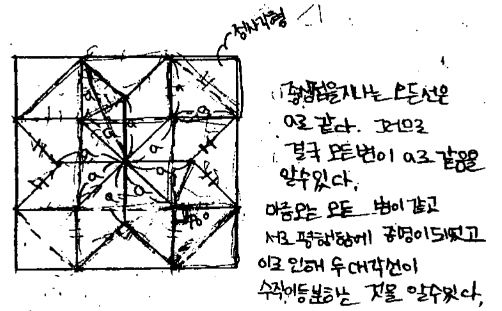
다. 결론 도출 단계

학생들은 한 동안 기본패턴의 외부 모양에만 집중을 하다가 교사가 해결해야 할 과제 (1)은 서로 합동인 8개의 평행사변형이 되도록 그리는 것임을 주지시켜 주자, 지금까지 진행된 결과를 바탕으로 외부 모양의 틀에 평행선을 그려 과제를 완성하였다. 또한 서로 합동인 8개의 마름모를 그리는 과제 2)의 해결은 제시된 참고자료에서 마름모의 정의를 찾아, 자신들이 그린 그림이 마름모가 됨을 기록하는 것으로 끝마쳤다.



[그림 Ⅳ-4] '기초학력' 그룹의 과제 (1) 답안지:
수학적 성질을 잘 드러내는 해설 보다 '한 사람씩 돌아가며' 작성한 답안을 '보기 좋게' 정리하는 것에 더 주의를 기울임

과제 (1)의 답안을 보면 기본패턴의 외부 선분부터 그리려고 시도한 방법(학생 답안의 1~4)과 정사각형의 대각선을 긋고 각 변의 길이를 이등분하는 선분을 그어 정사각형을 분할하는 과정으로 연결되는 부분(학생 답안의 5~7)이 유기적으로 연결되지 못하고 그 결과가 왜 평행사변형이 되는지에 대한 수학적 설명이 제시되지 않았다. 시각적으로 결과가 평행사변형이 되기 때문에 더 이상의 정당화나 수학적 해설을 제시하지 않은 것이다.



[그림 Ⅳ-5] '기초학력' 그룹의 과제 (2) 답안지
: 답안이 나온 과정이나 전후 관계 해설이 없음

과제 (2)의 답안지를 보면 과제 (1)과는 달리 참고자료에서 마름모의 정의를 활용하여 결과만 제시하고 있다. 왜 그런지에 대한 설명을 제시해야 한다는 교사의 말에 학생들은 마름모가 되어가는 과정을 단계별로 그리지 않고, 다만 그 그림이 왜 마름모인지만 제시하였으나 수학적인 근거나 논리 없이 마름모의 정의만 설명하였다. 학생들은 과제 (1)을 해결하는 과정을 그대로 취하고 각 변의 길이만 같게 하면 마름모가 된다고 생각하였고, 각 변의 길이를 같게 하기 위해서 무엇을 고려해야 하고 어떤 과정을 거쳐야 하는지에 대해서는 언급하지 않았다.

그러나 학생들은 모든 문제해결의 과정을 함께 공유하였으며, 의사소통은 활발하지 않았으나 한 사람이 의견을 제시할 때 집중하고 받아들이는 정도는 다른 그룹에 비해 가장 높았다.

또한 혼자서 문제를 해결해야 하는 것이 아니라 함께 해결해서 공동의 답을 제시하면 되기 때문에 문제해결에 대한 부담이 적다고 여겼으며, 답안을 작성할 때에는 자신들이 협동학습 과제를 해결하는 것이기 때문에 답안도 공동으로 작성해야 한다고 하면서 단계별로 그림을 그리고 설명을 쓰는 과정을 한사람씩 돌아가면서 차례대로 작성하였다.

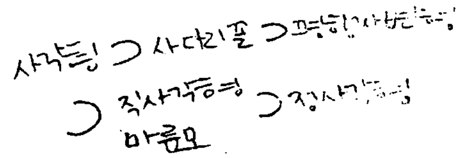
2. '보통학력' 그룹의 문제해결 과정

가. 문제해결 준비

학생들은 주어진 문제를 읽어본 후 도입부분의 문제부터 꼼꼼하게 체크하고 기본패턴보다는 활동지에 나온 [그림1] 완성본 퀼트에 나타난 전체 문양의 배치 등을 살폈다.

B2 : 이거 정사각형인가? 평행사변형 되게 하려면 어떻게 해야 되지?
B3 : 네 변의 길이가 같게 그려... 이게 정사각형이면 안쪽에 있는 이것도 네 변의 길이가 같아야 하지 않나?
B2 : 같은지 아직 모르잖아
B3 : 네 변의 길이가 틀리다구?

학생들은 사각형의 정의와 성질 등을 명확하게 제시하지는 못하였으나, 문제 이해 단계에서 사각형의 성질을 언급하기도 하고 제시된 참고자료에서 사각형의 포함관계를 살펴 메모를 하기도 하였다.



[그림 Ⅳ-6] 사각형의 포함관계 확인
: 주어진 자료에서 정보를 얻고자 시도함

나. 문제 해결

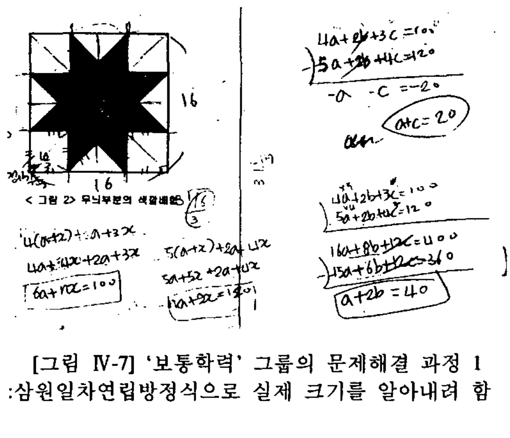
'보통학력' 그룹의 학생들의 문제해결은 크게 두 가지 과정으로 이루어졌다. 첫째, 학생들은 평행사변형의 내각의 크기를 구하면 서로 합동인 평행사변형을 그릴 수 있을 것이라고 생각했다. 8개의 평행사변형이 한 꼭지점을 중심으로 각 변이 접해있기 때문에, 한 내각이 45° 됨을 계산한 후에 나머지 내각의 합이 135° 가 된다는 사실을 이끌어 냈다. 그러나 사각형의 내각의 크기를

구하는 것이 실질적인 문제해결에는 도움이 되지 못했기 때문에 곧 다른 시도를 하게 된다.

B2 : 이게 큰 사각형 안에 들어있는 거잖아. 이거 두 개가 다른 건가? 이 사각형의 두 변의 길이는 같아야 하나?
B3 : 그 변은 달라도 상관없어, 진한 거랑 연한 거랑 합동만 되면 되는 거잖아. 계산해 볼게.
B1 : 이 길이를 먼저 구한 다음에 해야 되는데...

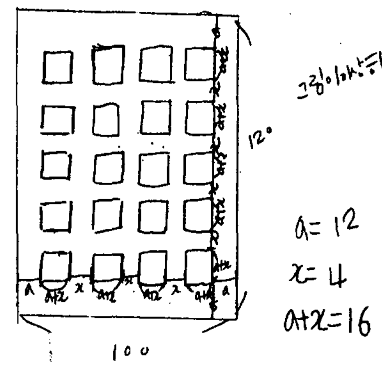
두 번째 시도는 대수적 방법을 이용하여 필요한 길이를 계산해 내는 것이었다. 학생들은 기본패턴의 크기를 먼저 구하기보다 완성본 퀼트 전체의 크기를 고려하여 필요한 길이를 구하려고 시도하였다. 따라서 완성본 퀼트의 가로·세로 길이, 완성본에 놓인 기본패턴 사이의 간격 등을 고려하여 구해야 할 길이를 정하고 이를 각각 미지수로 지정하여 연립방정식을 세워 해결을 시도하였다.

B3 : 여기 길이 다 같게 해?
B2 : 아니, 틀려... 이거 다 연립해 보면... 여기를 x라고 두면...
B3 : 나도 해 봤거든?! 근데 이게 다 달라... 부호가.. 연립이 안 돼...
B2 : 나는 이걸 다 했을 때...



[그림 Ⅳ-7] '보통학력' 그룹의 문제해결 과정 1 :삼원일차연립방정식으로 실제 크기를 알아내려 함

문제에서는 전체 완성본 퀼트의 가로·세로 길이만 제시하였으므로 기본패턴의 크기나 패턴 사이의 간격 등은 학습자가 정해야 한다. 그러나 학생들은 임의로 이 길이를 정하기보다는 식을 세워 정하는 것이 수학적인 방법이라고 여겼다. 삼원일차연립방정식을 세우고 이를 해결하는 것이 쉽지 않은 작업이었음에도 불구하고 학생들은 많은 시행착오를 거치면서 미지수의 수나 그 범위를 제한하는 등의 조정을 통해 해를 구해냈다.



[그림 Ⅳ-8] '보통학력' 그룹의 문제해결 과정 2 : 실물 사이즈를 알아내려 함

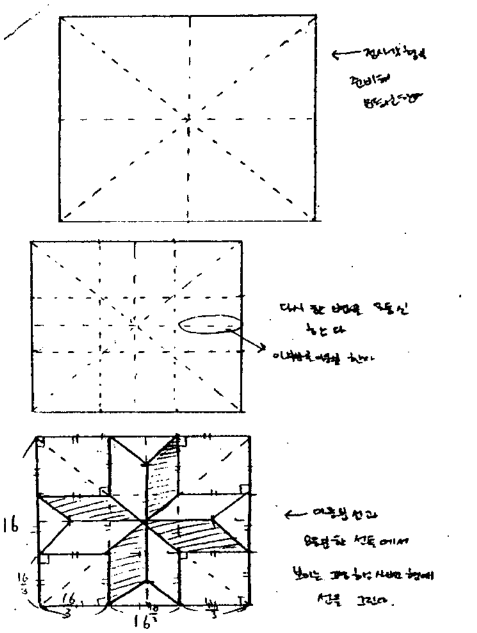
이 해결 과정에서의 특징은, 학생들이 과제에 제시된 기본패턴에서 정사각형의 한 변의 길이를 구한 것이 아니라 전체 완성본 퀼트 문양에서 테두리의 너비와 패턴 사이의 간격을 이용해 기본패턴의 크기를 결정했다는 것이다. 완성본 퀼트의 전체적인 균형과 조화를 고려하여 기본패턴의 크기를 정하려고 한 것은 '기초학력' 그룹이 기본패턴의 실제 크기를 자로 재어서 문제를 해결하려는 시도보다는 수학적으로 의미 있는 과정을 보여준 것이었다.

다. 결론 도출 단계

연립방정식을 이용해 구하고자 하는 길이를 계산해 낸 학생들은 이를 바탕으로 기본패턴의 그림을 완성해 가는 과정을 서술하였다. 복잡한 연립방정식을 통해 얻어낸 결과는 기본패턴에 있는 정사각형의 가로·세로 길이를 정하는 데에만 활용되었을 뿐 그 이상의 활용은 보이지 않았다.

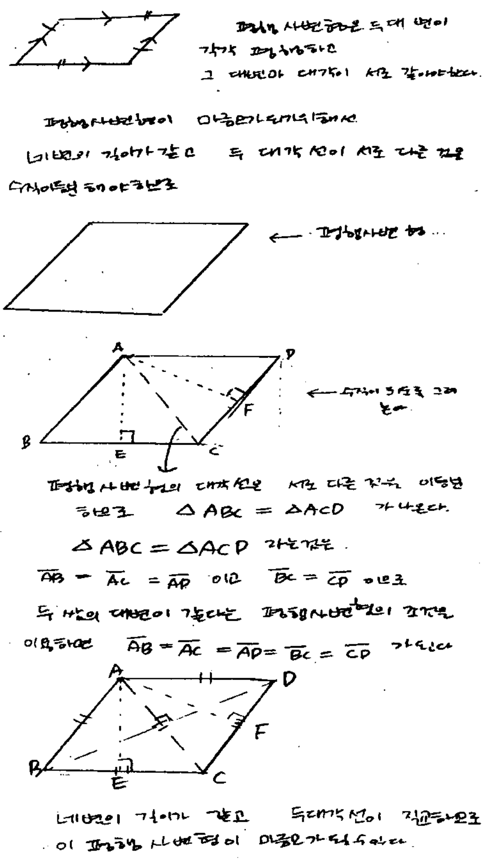
학생들의 과제 (1) 답안지는 정사각형의 가

로·세로 선분의 분할선과 대각선 등을 이용하여 내부에 서로 합동인 8개의 평행사변형을 그리는 과정을 비교적 간단명료하게 제시하고 있다. '기초학력' 그룹 학생들의 답안지와 마찬가지로 각각의 선분이 왜 평행인지, 그려진 내부의 사각형들이 왜 평행사변형이 되는지를 말로 서술하지는 않았으나, 교차하는 선분 사이에 직각 표시를 하고 문제해결 시도 단계에서 사각형의 내각의 크기를 구해낸 것을 바탕으로 평행사변형의 대각의 크기가 같음을 활용하여 내부에 그려지는 사각형이 평행사변형이 됨을 직관적으로 나타내려 하였다.



[그림 Ⅳ-9] '보통학력' 그룹의 과제 (1) 답안지 :논리적인 설명보다는 미지수 값을 구한 것에 따른 결과를 제시함

서로 합동인 8개의 마름모를 그려내야 하는 과제 (2)에서 학생들은 나름대로 증명을 시도하였다. 마름모가 평행사변형에 포함된다는 것에 착안하여 평행사변형이 마름모가 되기 위한 조건을 찾아내어 과제를 해결하고자 하였다. 학생들은 평행사변형의 대변의 길이가 같다는 성질을 바탕으로 이웃하는 두 변의 길이가 같음을 보이면 주어진 평행사변형이 마름모가 됨을 보일 수 있기 때문에 평행사변형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$임을 증명하였다. 그러나 학생들의 증명과정을 살펴보면 논리전개 상의 오류가 있음을 알 수 있다. [그림 Ⅳ-10]을 보면 평행사변형에서 한 대각선에 의해 생긴 두 삼각형이 합동이라는 것을 이용하기는 하였으나 대응변을 끌어내는 것에서 오류를 범했고, 따라서 삼각형의 합동을 이용하여 이웃하는 두 변의 길이가 같음을 보이는 과정이 올바르게 도출되지 못했다. 자신들의 증명에 대해 다시 생각해 보거나 검증을 하는 모습은 관찰되지 않았다.



[그림 Ⅳ-10] '보통학력' 그룹의 과제 (2) 답안지 :논리적 설명보다는 결과를 다시 한 번 언급하는 것으로 답안을 작성함

'보통학력' 그룹의 학생들은 과제 (1)에서 주어진 도안의 실제 길이를 염두에 두고 각 변의 길이를 구해내려 하였다. 평행사변형의 성질을 이용하기 보다는 우선 길이에 대한 정보를 구한 다음에 그 길이대로 평행사변형을 그려나가는 방법을 시도했으며, 평행사변형으로부터 마름모의 성질을 구성해나가는 과제 (2)에서는 나름대로 증명 형태의 해설을 제시하였다.

주어진 과제에서 찾아낼 수 있는 일반화된 성질을 능숙하게 다룬 것은 아니지만 문자와 식을 이용해 기본패턴의 길이를 계산하려고 했다는 점, 답안을 작성함에 있어서도 과제 (2)에서는 나름대로 증명의 형태를 갖추려고 시도한 점 등은 '기초학력' 그룹의 문제해결 과정에 비해 좀 더 일반화되고 다양한 수학적 수행을 시도했다고 할 수 있다.

3. '우수학력' 그룹의 문제해결 과정

가. 문제해결 준비

'우수학력' 그룹의 학생들은 문제 이해 단계에서 서로 아이디어를 나누며 이미 사각형의 성질에 대해서는 숙지하고 있음을 드러내었다. 다른 그룹에 비해 문제 이해에 더 많은 시간을 할애하였으며 교사에게 무엇을 평가하고자 하는지, 어떤 결과를 요구하는 문제인지, 문제에 필요한 조건을 추가할 수 있는지 등의 질문을 수시로 하였다.

C3 : 평행사변형 그리는 거니까 그냥 평행선 그리면 되지 않나?
C1 : 먼저 겉에 있는 사각형을 그리고 그 안에 그려야지
C2 : 이건 정사각형인 것 같아
C1 : 정사각형의 크기는 우리가 정해도 된다고 했으니까...적당히 정해
C3 : 아냐, 그래도 답으로 나오는 크기가 있을 거 같아, 계산할 수 있을 거야

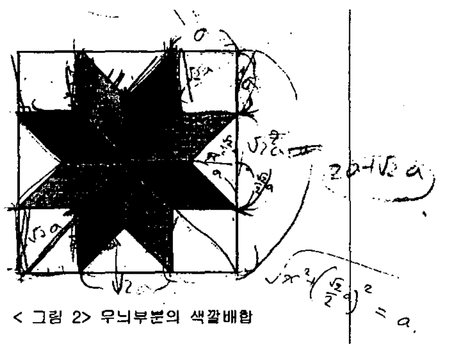
나. 문제해결의 단계

문제해결 과정에서 다른 그룹의 학생들이 실제 기본패턴을 그리기 위해 사각형의 각 변의 길이를 알아내는 것에 많은 시간을 할애하고 애쓰는 것에 비해, '우수학력' 그룹의 학생들은 실제 길이에 신경을 쓰지 않았다. 그보다는 문제를 해결하는 데에 있어서 전제 조건이 무엇인가, 가정과 결론이 무엇인가를 의논하는 것에 시간을 더 많이 할애하였다.

C3 : 일단 정사각형의 길이는 별로 안 중요한 것 같으니까... a로 놓고 계산해보면... 한 변의 길이가 a인 평행사변형을 그리면..
C3 : 정사각형의 대각선의 길이를 이용하면 될 것 같은데... 일단 가정이 뭔지를 생각해서 결론을 이끌어내면 돼. 그냥 이걸 처음부터 평행사변형이라고 가정하는거야
C2 : 평행선만 계속 그어주면 돼. 이거 이어보면 팔각형이야. 팔각형만 잘 그리면 될 것 같은데...

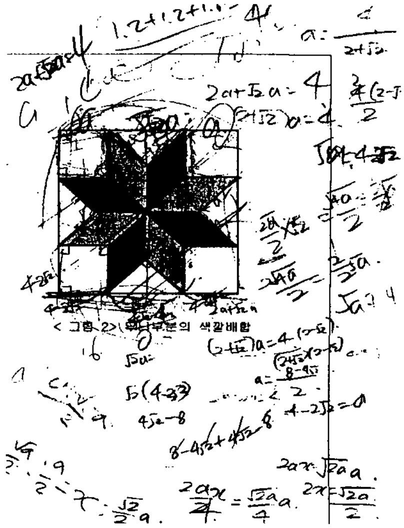
학생들은 문자를 이용하여 변의 길이를 임의로 지정하고, 피타고라스의 정리나 삼각비를 이용하여 정사각형의 대각선의 길이를 구하였다.

C1 : 그냥 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$를 곱해야 하는데 이건 자로 그리는 거니까 근사값으로 1.4를 쓰면 돼



[그림 Ⅳ-11] '우수학력' 그룹의 문제해결 시도
:한 변의 길이가 a인 임의의 정사각형으로부터 전체 패턴을 그리는 데에 필요한 길이 정하기

학생들은 시각적으로 드러나는 정보 보다는 도형의 성질을 이용하여 기본패턴의 길이 사이의 관계를 먼저 구하려 하였다. 그리고 주어진 기본패턴의 변의 길이를 구해야 하는 과정에서도 별다른 고민 없이 근사값을 활용하였다. 필요한 변의 길이 사이의 관계를 파악한 후 실제로 대각선을 그릴 때에는 $\sqrt{2}$값을 자로 잴 수 없기 때문에 근사값 1.4를 이용하기로 한 것이다.

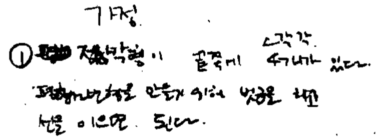


[그림 Ⅳ-12] '우수학력' 그룹의 문제해결 시도

'우수학력' 그룹의 문제해결 과정은 다른 그룹과 크게 두 가지 측면에서 다른 특징을 나타내었다. 첫 번째 특징은 학생들이 문제를 이해하고 해결을 시도할 때, 조건은 무엇인가, 도형의 성질, 대상 사이의 관계는 무엇인가를 먼저 확인하고 '가정'으로부터 '결론'을 이끌어내는 증명을 시도하려고 했다는 것이다.

C3 : 가정이 맞으면 결론도 맞는 거니까... 평행사변형이라고 가정하고...

다른 그룹의 학생들이 눈에 보이는 대로 길이를 재거나, 실제 모델의 길이에 초점을 두어 복잡한 식을 세워 기본패턴의 길이를 먼저 구하려는 것에 비해 '우수학력' 그룹의 학생들은 도형의 정의와 성질에서 비롯되는 당위적인 조건을 이용하려 하였고, 이를 증명의 형식으로 표현하고자 했다.



[그림 Ⅳ-13] 문제해결의 과정 : '가정이 무엇인가?'

두 번째 특징은 '기초학력' 그룹과 '보통학력' 그룹의 학생들이 기본패턴에서 한 정사각형의 변의 길이를 먼저 정한 후에 각 변의 이등분선과 대각선 등으로 분할해 가면서 평행사변형이나 마름모를 만들어가려고 시도하는 것에 비해, '우수학력' 그룹은 작은 단위의 정사각형의 한 변의 길이와 그 대각선의 길이를 이용하여 큰 정사각형을 작도해 나가는 방법을 활용했다는 것이다.

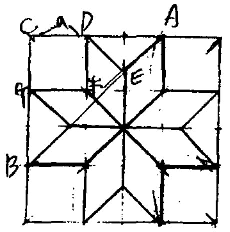
C3 : 여기 귀퉁이의 제일 작은 사각형을 정사각형이라고 가정해서 먼저 그린 다음에 붙여 가면 돼, 그리고 증명할 거야.

즉, 큰 정사각형의 분할에 따른 변의 길이 계산이나 측정 결과에 제한받지 않고 임의의 길이를 가진 정사각형과 그 대각선의 길이를 이용하여 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구해냄으로써 내부에 그려지는 도형이 당위적으로 마름모(평행사변형)가 되도록 결론을 도출하였다. 이렇게 하면 외부 정사각형의 한 변의 길이를 먼저 정해놓고 내부 평행사변형의 한 변의 길이를 구하는 것보다 변의 길이를 구하는 것에 제약이 없어진다.

다. 결론 도출 단계

답안을 작성하는 과정에서 학생들은 과제 (1)은 과제 (2)를 해결하면 자동으로 성립하므로 과제 (2)의 답안만 작성하면 된다고 생각했다. 그리고는 [그림 Ⅳ-14]의 기본패턴을 가지고 증명을 시도하였다. 증명이 수학적으로 엄

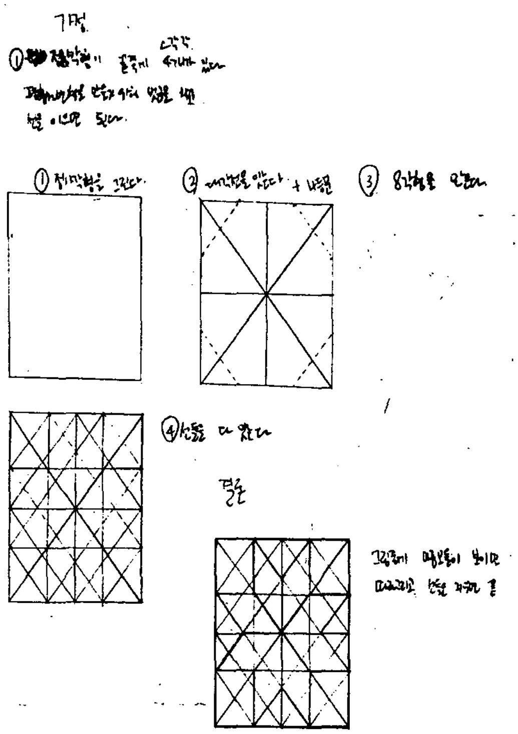
밀하지는 못했지만 나름대로 가정과 전제 조건을 세우고 그로부터 결론을 도출해 내었다.



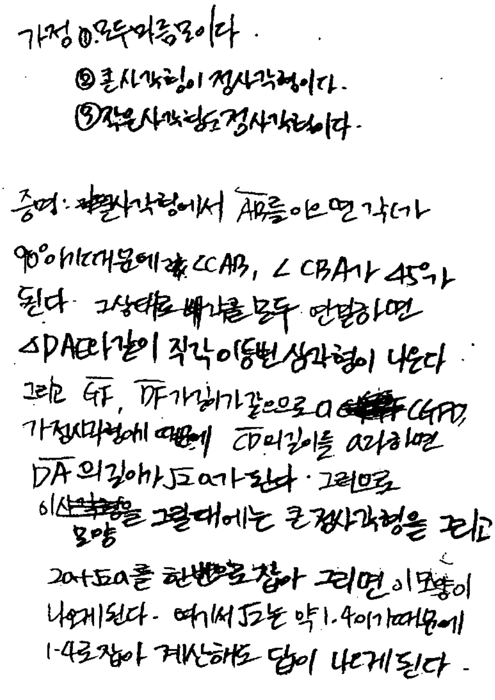
[그림 IV-14] 기본패턴 구성의 특징
: 임의의 정사각형으로부터 기본패턴을 구성함

과제 (2)가 과제 (1)의 결과를 포함한다고 하더라도 답안지는 각각 제출할 것을 교사가 요구하자 학생들은 각자 자신의 방법대로 작성한 답안지를 제출하였다. 문제를 해결하는 과정에서 학생 C2는 주어진 문제가 복잡한 수학적 계산이나 성질보다는 직관에 의해 쉽게 해결될 수 있는 '창의적인 문제'라고 생각하고 수학적인 해설을 최소한으로 하고 답안을 작성하는 것이 창의적이라고 말하였다. 그리고는 기본패턴에서 팔각형을 찾아내면 쉽게 평행사변형을 그릴 수 있다고 여기고 자신의 의견대로 작성한 답지를 제출하였다.

'우수학력' 그룹의 학생들은 주어진 과제 (1)과 과제 (2)를 별개의 것으로 생각하기 보다는 연결된 것으로 보았고, 마름모가 평행사변형에 포함된다는 성질을 이용하여 마름모를 그려내는 것에 초점을 두고 해를 도출해 내려고 하였다. 또한 주어진 기본패턴 도형의 실제 길이나 크기를 측정하거나 구해내는 것에 초점을 두지 않고, 마름모(평행사변형)의 성질을 만족하는 기본 도안을 그리려고 시도하였다.



[그림 IV-15] 학생 C2의 과제 (1) 개별 답안지 :복잡한 계산이나 증명(해설)없이 직관적인 설명



[그림 IV-16] '우수학력' 그룹의 과제 (2) 답안지 : 그림을 통한 실제 길이지정보다는 답을 구하는 논리적 과정을 서술하려 함

Ⅴ. 성취수준별 문제해결의 특징

이 장에서는 Tall 등(2001)의 기하 개념의 발달 단계와 [그림 Ⅱ-1]과 <표 Ⅱ-1>의 내용을 바탕으로 수준별 그룹의 문제해결 과정에서 나타난 특징을 살펴볼 것이다.

'기초학력' 그룹의 학생들은 주어진 문제에서 발견할 수 있는 수학적 성질이나 해결 방법을 모색하기보다는 문제에서 주어진 그림 자체의 크기와 모양에 대하여 언급하고 이를 바탕으로 주어진 과제를 해결하려는 경향을 나타냈다. 또한 문제를 해결하는 과정에서 어떤 수학적인 사고와 수행을 거쳐야 할 것인가 보다는 주어진 그림의 실제 길이를 재어 그것을 문제해결의 토대로 삼는 등 실질적으로 자신들이 할 수 있는 방법으로 해결을 시도하였다.

구체적으로 살펴보면, 기초학력 그룹의 학생들은 수학적 지식과 정보 활용의 측면에서 명확하지 않은 비형식적 용어를 사용하고 선수학습의 지식이나 정보를 확인하려는 노력을 하지 않았다. 문제해결의 접근 방법에 있어서는 문제를 해결하려는 목표에 맞추어 해야 할 행동을 정하기보다 실제로 자로 재어서 길이를 측정하는 등 자신이 할 수 있는 것을 우선 행동으로 옮기는 모습을 보여주었다. 학생들은 수학 지식을 이용하고 현상을 수학적으로 해석하여 과제를 해결하기보다, 자신의 감각과 행동을 이용하려 했고, 패턴을 대상으로 인식하기보다 각각의 구성요소의 길이나 각을 찾아 전체를 만들려는 절차적 접근을 시도하였다. 이를테면, 학생들은 정삼각형을 세 변의 길이가 같은 삼각형 또는 세 내각의 크기가 같은 삼각형이라는 성질로 받아들이지 않고, 자나 각도기를 이용하여 측정을 했을 때 변의 길이나 각의 크기가 각각 모두 같게 나오면 이를 정삼각형으로 생각하였다. 이것은 기하 개념의 인지적 발달 단계에서도 도형의 모양이나 크기를 다루는 첫번째 수준에 머무른 것이라 하겠다. 또한 해결 방법의 도출 및 정당화에 있어서는 자신의 해를 정당화하려는 노력이 전혀 보이지 않아, 도형의 외적 모양에 초점을 두지만 논리적 사고의 접근을 시도하지 않음을 보여주었다.

'보통학력' 그룹의 학생들은 수학적 지식과 정보 활용에 있어서 사각형의 포함관계, 사각형의 성질 등을 먼저 살펴보려는 노력을 하였다. 그리고 이미 알고 있는 계산 방법이 무엇인지 생각해 보고, 연립방정식을 활용하려는 시도를 하였다. 문제해결의 접근 방법에 있어서는 해결 계획을 수립한 후에는 답이 되는 변의 길이를 구할 수 있는 계산을 수행하였다. 문제를 해결함에 있어서 나름대로의 수학적 이해와 해석을 보여주고 해결방법에 대한 계획을 수립하고 실행하였다. 완성본 퀼트의 크기를 염두에 두고 계산 결과를 예측하기도 하고, 각의 크기와 연립방정식 계산을 하고, 마름모의 성질에 대한 증명을 시도하면서 효율적인 수학 내용을 사용하였고, 기하에서 대수를 활용하였다.

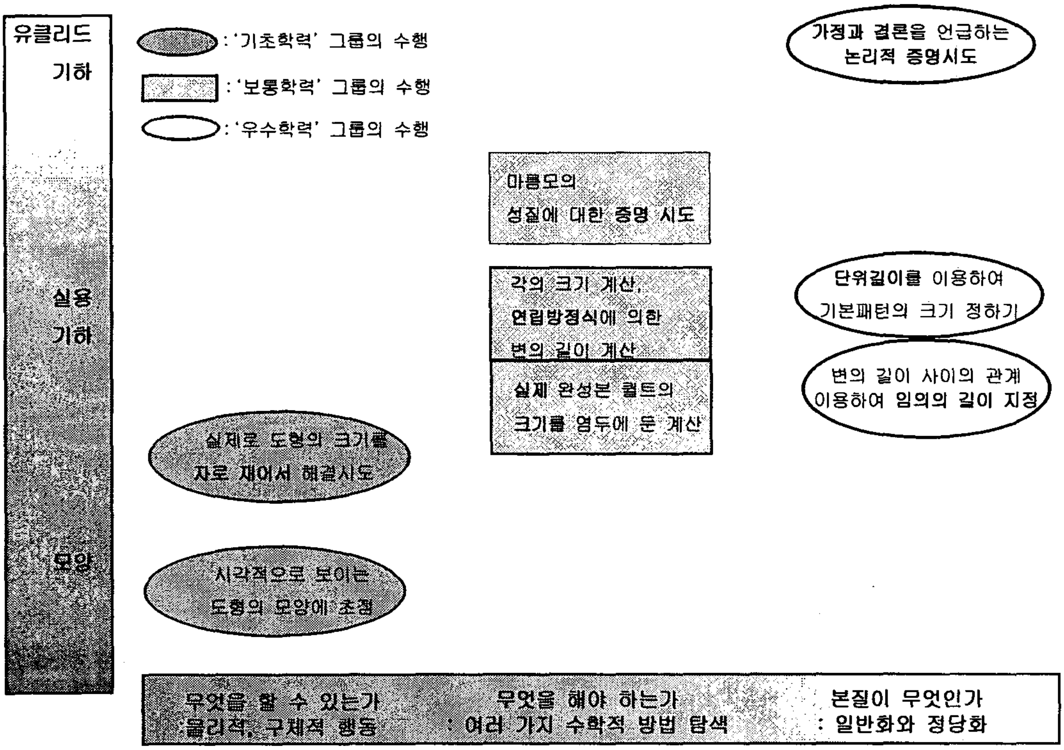
이 학생들이 다루는 기하는 실제 현실적으로 가능한 대상으로서의 도형과 유클리드 기하의 도형을 모두 다루고 있었다. 교과서에서 도형의 성질은 주로 정리가 주어지고 증명을 하라는 문제와 도형의 성질을 이용하여 길이나 각의 크기를 구하는 문제로 다루어지는데, 이 연구에서의 과제는 설명을 요구하는 것으로 해를 구하는 것과 그에 대한 증명을 모두 구하도록 하였다. 따라서 학생들에게 증명을 직접적으로 요구하지 않아 실용 기하의 모습을 보였을 수도 있다. 해결 방법의 도출 및 정당화에 있어서는 연립방정식 계산을 통한 변의 길이에 대한 정당화는 제시되지 않았다.

'우수학력' 그룹의 학생들은 수학적 지식과

정보 활용의 측면에서 도형의 정의와 성질이 무엇인지 먼저 확인하고 어떤 성질이 있을 때 그 성립 조건이 무엇인지 확인하여 그것을 이용하려 하였다. 주어진 문제를 가정과 결론으로 구분하여 증명 문제로 바꾸었다. 자신이 해결해야 할 과제에 있어서 '실제로 가능한 길이가 될 수 있는가'는 염려하지 않았으며 일단 논리적인 증명을 통한 해결을 바탕으로 하였다.

문제해결의 접근 방법에 있어서는 논리적인 증명을 시도했고 피타고라스의 정리 등을 이용하여 일반화된 계산도 시도하였다. 가정과 결론을 구분하고 일반화된 도형에서 증명을 시도하여 특수화하려 했으며, 문제해결 단계마다 '정의'에 합당한 것인지를 확인하였다. 단위 길이를 이용하여 기본패턴의 크기를 정하고, 임의의 길이를 지정하고 변의 길이끼리 어떤 관계가 있는지 파악하려 하면서, 기하 도형 자체를 수학적 대상으로 다루고 그 표현도 형식적으로 사용하는 '수학에 대해 상징적으로 생각'하는 수행 단계에 있었다. 학생들이 다루는 기하 개념은 도형을 추상적으로 여기는 유클리드 기하 수준이었으나 완전히 형식적인 수준에 이르지는 못했다. 즉 유클리드 기하의 대상을 이상적인 것으로 여기고 다룰 수는 있었으나 증명 과정에서 수학적 엄밀성은 다소 떨어졌다. 정당화에 있어서는 그룹 구성원들의 결론을 비교하고 그룹의 최종 답안을 제시하는 모습을 보였다.

성취수준별 동질 그룹의 학생들이 문제해결 및 답안 작성 과정에서 보여준 수학적 문제해결 수행의 특징은 [그림 V-1]과 같이 정리해 볼 수 있다. 기초학력 그룹의 수행은 자신들이 무엇을 할 수 있는가의 수준에서 문제해결을



[그림 V-1] 성취수준별 문제해결의 특징

탐색하였고 기하 개념에 있어서도 시각적인 외적 모양에 초점을 두거나 실제로 길이를 재어 보는 실용 기하의 측면에서 문제해결이 이루어졌다. 보통학력 그룹의 수행은 문제를 해결하기 위해 무엇을 해야 하는지 명확히 하고 그에 따라 문제해결 방법을 선택하였다. 연립방정식의 풀이나 증명을 시도했다는 점에서 여러 가지 문제해결 방법을 탐색한 것으로 보이며, 기하 개념의 발달 수준도 시각적 모양을 벗어나 계산 절차를 수반하여 해를 찾으려 하고 증명도 시도한 수준이었다. 우수학력 그룹의 학생들은 처음부터 문제 자체에 대한 해보다 일반적인 문제로 확장하여 해결하려 하고 그 해를 특수화하여 문제의 해를 찾으려는 시도를 하였다. 또한 결과에 대한 정당화의 필요성도 느끼고 그것을 보여주려 했다. 단위 길이를 사용하거나 변의 길이 사이의 관계를 이용한 것 등은 실용기하의 수준이었으나 가정과 결론을 나누고 증명을 시도한 것은 유클리드 기하의 수준에서 한 접근이라 할 수 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구에서는 사각형의 성질을 바탕으로 주어진 조건에 맞게 도형을 그려내는 문제를 해결하는 과정에서 나타난 특징을 학생들의 성취 수준에 따라 비교해 보았다. 기하 개념의 인지 발달 수준과 수학 문제해결 방법 선택의 스펙트럼을 바탕으로 학생들의 문제해결 과정에서 나타난 특징을 비교해 봄으로써, 교사가 수업에서 학생들의 수준에 따라 어떤 점을 고려해야 할 것인지를 생각해볼 수 있다. 학생들의 수준에 따른 문제해결의 특징을 파악한다면 수업 설계에 있어 수업 목표와 성취 수준 및 제공해야 할 학습의 내용과 문제의 경향 특징 등의 사항을 결정하는 데에 도움이 될 것이다. 이 연구 결과를 바탕으로 수준별 수업에서 학생들을 지도할 때의 시사점을 몇 가지 제안하고자 한다.

먼저, 기초학력 그룹 학생들의 특징에 따른 수학 학습 지도를 생각해 본다. 이 연구에 참여한 학생들은 중학교 3학년으로 1년 전 유클리드 기하를 경험했음에도 불구하고, 도형의 모양 수준에서 문제해결에 접근하였다. 이것은 도형의 성질을 형식적으로 지각하거나 인식하지 못했다는 증거라 할 수 있다. 도형의 모양이나 크기에 초점을 두고 수학 내적인 조작을 하지 못하는 학생들에게 가정과 결론을 나누고, 이미 증명된 정리 내용을 가지고 증명에 임하는 것은 의미 없는 것일 수도 있다. 7차 교육과정의 8-나 단계 도형의 성질 내용은 "삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명할 수 있다."(교육부, 1999)로 되어 있으나 기초학력 학생들에게는 아직 발달되지 않은 수준의 내용이다. 따라서 수준별 학습을 위해서는 학생들이 수준에 따라 기하 내용을 이해할 수 있도록 핵심적인 내용은 공통으로 하되 그것을 이해하고 활용할 수 있는 능력은 증명으로 제한되지 않아야 할 것이다. 교사들도 학생들에게 어려운 접근을 반복적으로 제시하기보다 학생들이 자신의 수준에서 과제를 수학적으로 이해하고 해석하며 수학적 성질을 찾아내도록 하는 경험을 제공한 후 점차 형식화하여 높은 인지 수준으로 발달하도록 지도해야 할 것이다.

보통학력 학생들이 나름대로의 문제해결 계획을 수립하고 이 과정에서 다양한 수학적 시도를 해 볼 수 있다는 것은 수업을 설계하고 진행하는 교사에게 매우 고무적인 일이다. 일반적으로 교사들은 보통학력 학생들의 수업 진행이 쉽다고 여기는 경향이 있다. 보통학력의

학생들을 위한 수업은 교과서 활용도가 높아 상대적으로 교재의 개발이나 준비에 적은 시간을 투자할 수 있고, 기존의 자료가 대부분 보통 수준의 학생들을 대상으로 개발되어 있어 그것을 활용하기에도 좋기 때문이다. 하지만 본 연구의 결과에 비추어볼 때, 교사는 학생들이 다양한 수학 문제 해결을 시도하는 과정에서 발생하는 오류를 주의 깊게 관찰하고 피드백 해야 하며, 하나의 문제를 해결하더라도 학생들의 다양한 접근 방법을 공유하고 그 타당성을 확인하는 과정이 포함되도록 지도해야 한다. 이것은 보통학력 수준의 학생들을 지도할 때 고려할 사항이 많음을 뜻하고, 교사들에게 더 신중한 수업 준비를 요하는 것이다. 수준별 수업을 실시한다면, 학생들의 인지 발달 수준, 수학적 수행의 단계 등의 여러 특성에 따라 수업을 설계하고 학생들을 지도해야 할 것이다.

수준별 수업에서 교사들은 우수학력의 학생들에게 어렵고 복잡한 문제를 제시하여 수준별 수업을 특징지으려는 경향이 있다. 본 연구의 우수학력 학생들은 같은 문제를 다루더라도 형식적인 사고 과정을 통해 해결을 시도하고, 이를 수학적으로 엄밀성을 갖추어 표현하려 한다. 따라서 이러한 경험을 제공하는 수학 학습 지도가 필요할 것으로 보인다.

학교 현장에서, 이루어지고 있는 수준별 수업은 학생들의 학습과정상에서 나타날 수 있는 수학적 사고와 문제해결의 수준별 특징보다는 학습결과로 얻어지는 성취수준의 차이에 따라 학생들에게 제시하는 문제의 양과 난이도의 조정에만 초점이 맞추어져 있는 실정이다. 수준별 수업을 실시하고 있거나 계획하고 있는 교사들은 수준별 수업에 있어 '학생들의 수준에 맞는 문제, 개념, 내용의 제공'과 '수준별 수업에 따른 평가 및 성적부여의 문제'를 가장 고민하고 있다. 이것은 수준별 수업의 실시에 대한 가장 현실적인 문제이기도 하지만 수준별 수업의 설계에 대한 인식과 필요한 정보의 부족의 측면을 보여주는 것이기도 하다. 수준별 수업을 단지 학생들의 수준에 따른 문제의 난이도와 양을 조절하는 것, 또는 반복학습과 심화학습, 개념 주입과 이해 등 단편적인 기준으로 구분하여 설계하고 있는 것이 현실이 되어버린 학교 현장에서 본 연구에서 나타난 학생들의 문제해결 특징은 교사가 수준별 수업을 설계함에 있어서 수업목표, 학생들의 성취 달성수준, 수업실시에 있어 주의를 기울여야 할 측면 등을 설정하고 그에 맞는 피드백을 계획하는 데 중요한 정보가 될 것이다.

본 연구는 각 수준의 학생들을 한 그룹씩만을 기하 문제에서 관찰하였고, 하나의 기하 문제 해결만을 분석했다는 제한점을 가지고 있지만, 학생들의 문제해결 과정에서 나타난 특징을 기반으로 수준별 수업에서 어떤 점을 고려해야 할 것인가를 고찰했다는 점에서 수준별 수업을 설계하는 교사들에게 의미 있는 연구가 될 것이다.

참고문헌

교육부(1999). **중학교 교육과정 해설(Ⅲ) -수학, 과학, 기술·가정-**. 교육부.

김대현·김석우·박소영(2000). 수준별 교육과정 평가준거 개발을 위한 탐색적 연구-수준별 교육과정 운영을 위한 계획 영역을 중심으로-. **교육과정연구, 18**(1), 299-326.

김석우·김정섭·정성아(2004). 수준별 교육과정의 효율적 운영을 위한 학생평가 방안 연구. **교육과정연구, 22**(1), 45-74.

김희영(2002). **제 7차 교육과정의 교과서와 수준별 수업에 대한 중학교 과학교사들의 의**

결과 학생들의 과학 학업성취도 및 태도 조사. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

박소영(2001). 중학교 수준별 수업 운영 실태에 관한 교사 인식 조사. **교육과정연구, 19**(2), 95-117.

이양락 · 김선희 · 고정화 · 조영미 · 구자형 (2005). **2004년 국가수준 학업성취도 평가 연구 -수학-**. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRE- 2005-1-4.

허경철(1996). 수준별 교육과정의 필요성과 개발방향. **교육과정연구, 14**(2), 1-19.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics, to appear in Proceedings of PME 25.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 111- 133.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lesh, R., & Carmona, G. (2003). Piagetian conceptual systems and models for mathematizing everyday experiences. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism : models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 71-96). Lawrence Erlbaum Associates.

Polya,G. (1986). **어떻게 문제를 풀 것인가** (우정호 역.). 서울: 천재교육(원저 1968년 출판).

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1*, 81 - 104.

Research for Distinctive Features of Geometry Problem Solving According to Achievement Level on Middle School Students

Kim, Ki Yoen (Bugak Middle School)
Kim, Sun Hee (KICE)

In this study, we research distinctive features of geometry problem solving of middle school students whose mathematical achievement levels are distinguished by National Assessment of Educational Achievement. We classified 9 students into 3 groups according to their level : advanced level, proficient level, basic level. They solved an atypical geometry problem while all their problem solving stages were observed and then analyzed in aspect of development of geometrical concepts and access to the route of problem solving. As those analyses, we gave some suggestions of teaching on mathematics as students' achievement level.

* key words : achievement level(성취수준), geometry(기하), problem solving(문제해결)

논문접수 : 2006. 4. 28
심사완료 : 2006. 6. 5

<부록> 수준별 문제 해결 과정

1. '기초학력' 그룹

단계	질문과 학생 반응	연구자의 해석
문제해결을 위한 준비	• 문제 상황을 스스로 이해하려는 노력(시도)이 있는가?	
		▸ 문제를 각자 읽어보는 시간을 가짐 ▸ 한참을 아무 것도 하지 않고 있음
	• 문제에서 단서를 찾아내는가?	
	A1 : 뭘 먼저 구해야 하지? 답안 예 : *"중심점을 지나는 선의 길이"*	▸ 도입단계의 문제에 답함으로써 문제 해결의 실마리를 찾아보려고 함 ▸ 명확한 용어를 사용하지 않음
	• 문제해결에 필요한 선수학습 지식을 체크하는가?	
		▸ 사각형의 성질이나 정의에 대해 주어진 자료를 살펴봄
문제 해결	• 문제해결을 위해 선수학습 지식을 활용하는가?	
		▸ 선수학습 지식이나 정보를 확인하는 과정이 보이지 않음
	• 문제해결에 필요한 수학적 개념을 도출하는가?	
	A2 : 어떻게 하지? A1 : 이거 평행사변형 그리는 거니까.. 일단...여기가 대각선이고...	▸ 문제 해결시도가 매우 소극적임 ▸ 사각형, 대각선, 평행선의 성질 등을 활용하려고 함
	• 어떤 수학적 경향을 나타내는가?	
	A1 : 일단 이 테두리 모양을 보면... 별모양으로...여덟개 있는 별모양....	▸ 도형의 모양 등 시각적인 특징 중에서 제시된 모양본의 테두리 부분의 모양을 먼저 그리려고 시도함
	• 어떤 문제해결의 전략을 사용하는가? / • 다양한 해결전략(방법)을 시도하는가? / • 시행착오의 과정이 나타나는가?	
	A1 : 일단 이 테두리 모양을 보면... 별모양으로...여덟 개 있는 별모양.... A1 : 선생님, 이거 크기는 저희 맘대로 해도 돼요? A2 : 이거 자로 재 보자. 선생님이 합동이라고 했으니까.. A1 : 여기 큰 정사각형 귀퉁이에서 작은 정사각형을 빼내면...또 정사각형이 남으니까..그 안에 대각선을 그리고...	▸ 도형의 정의, 성질, 모양본의 크기나 변의 길이에 신경 쓰지 않음. ▸ 활동지에 인쇄된 모양본의 각 변의 길이를 자로 재어 그리려고 함 ▸ 주어진 모양본의 외부로부터 주어진 모양이 되도록 잘라내고 분할하려고 함
	• 그룹 구성원간의 상호작용이 나타나는가? / • 자신의 의견을 피력하는가?	
	A1 : 이거 협동 학습 이랬으니까 우리 한 사람씩 돌아가면서 답 쓰자 A2, A3 : 그래	▸ 그룹 구성원의 문제해결 활동은 모두 공유됨, 의사소통은 많이 나타나지 않았으나 한 사람이 의견을 제시할 때, 집중하고 받아들이는 정도가 가장 높음 ▸ 그룹 과제이므로 모두가 의논하여 함께 답안을 작성해야 한다고 여김
결론 도출 및 정당화	• 올바른 결론을 이끌어 내는가?	
	(정사각형, 평행선의 성질을 이용하여 평행사변형 그려냄) (마름모는 결과만 제시)	▸ 결과는 옳게 도출되었으나 결과도출의 과정이 유기적이지 못함 ▸ 마름모의 경우 해결과정 없이 마름모의 정의만 제시하여 결과 주장함
	• 자신이 이끌어낸 결론에 대해 설명(해설)하는가? / • 문제해결 결과에 대한 정당화를 할 수 있는가? / • 문제해결 과정 및 결과에 대해 반성하는가?	
		▸ 말로 설명해 달라는 교사의 요구에 잘 설명하지 못함 ▸ 올바른 정당화나 증명의 과정을 도출하지 못함 ▸ 결과에 대한 반성과정은 보이지 않음

2. ‘보통학력’ 그룹

단계	질문과 학생 반응	연구자의 해석
문제 해결을 위한 준비	• 문제 상황을 스스로 이해하려는 노력(시도)이 있는가?	
	(도입부분의 문제에서 주어진 도안의 전체 크기와 부분 부분의 실제 길이를 먼저 체크함)	▶ 문제를 각자 읽어보는 시간을 가짐 ▶ 주어진 문제 상황을 파악하기 위해 도입부분의 문제를 체크함
	• 문제에서 단서를 찾아내는가?	
	B2 : 이거 정사각형인가? 평행사변형 되게 하려면 어떻게 해야 되지? B3 : 네 변의 길이가 같게 그려... 이게 정사각형이면 안쪽에 있는 이것도 네 변의 길이가 같아야 하지 않나? B2 : 같은지 아직 모르잖아 B3 : 네 변의 길이가 틀리다구?	▶ 사각형의 성질을 분명하게 제시하지 못함 ▶ 문제에서 제시된 원형본의 전체적인 모양과 크기를 먼저 관찰하고 언급함(모양본과 모양본 사이의 거리, 테두리 간격 등)
	• 문제해결에 필요한 선수학습 지식을 체크하는가?	
	연습지에 정리: “ *사각형⊃사다리꼴⊃평행사변형⊃직사각형, 마름모⊃정사각형* ”	▶ 사각형의 성질이나 정의에 대해 주어진 자료에서 사각형의 포함관계를 살핌
문제 해결	• 문제해결을 위해 선수학습 지식을 활용하는가? / • 문제해결에 필요한 수학적 개념을 도출하는가?	
	B3 : 두 사각형이 합동이라면...이게 이거면 요게 요거지... B2 : 봐봐...전부 합쳐서 1,2,3,4,5,6,7,8인데 전체 둘레가 360° 고 다 합동이랬으니까 이 각은 45° ... $45^\circ+45^\circ=90^\circ$ 고 사각형의 내각의 합이 360° 니까... 아 모르겠다.. B3 : 잘 해봐... B2 : 아, 여기 135° 맞네.. 근데 각을 왜 구하지? B3 : 각을 구해야 길이를 구하지, 봐봐 360° 빼기 90° 는...	▶ 주어진 모양본의 두 사각형을 가리키며 길이가 같아야 하는 대응변이 어떤 것인지를 확인함 ▶ 주어진 도형의 내각의 크기를 구해 단서로 활용하려고 시도함 평행사변형의 한 내각의 크기를 구하고 각 부분의 내각의 크기를 구하려고 함
	• 어떤 수학적 경향을 나타내는가?	
	B2 : 이게 큰 사각형 안에 들어있는 거잖아, 이거 두 개가 다른 건가? 이 사각형의 두 변의 길이는 같아야 하나? B3 : 그 변은 달라도 상관없어, 진한거랑 연한거랑 합동만 되면 되는 거잖아 계산해 볼게... B1 : 이 길이를 먼저 구한 다음에 해야 되는데.. B2 : 각도가 달라지니까 각을 먼저 구해야 하나? B1 : 각도를 따져도 어차피 길이는 재야 할 거 아냐, 길이 재야 하니까 이거하고 이거를...	▶ 도형의 모양, 색깔 등 전체적으로 시각적인 특징을 먼저 파악한 후에 실제 길이를 계산해 내려고 함 ▶ *각의 크기와 변의 길이를 먼저 구해야 문제를 해결할 수 있다고 여김*, 각의 크기는 직관적으로 구해내지만 변의 길이를 구하는 것에는 직관을 활용하지 못함
	• 어떤 문제해결의 전략을 사용하는가? / • 다양한 해결전략(방법)을 시도하는가? / • 시행착오의 과정이 나타나는가?	
	B3 : 여기 길이 다 같게 해? B2 : 아니, 틀려...이거 다 연립해 보면...여기를 x라고 두면... B3 : 나도 해 봤거든?! 근데 이게 다 달라...부호가.. 연립이 안돼... B2 : 나는...이걸 다 했을때.... (구성원 각자가 변의 길이를 미지수로 둔 연립방정식을 세워 각 변의 길이를 구하는 계산을 시도함)	▶ 도형의 실제크기를 염두에 두고 그려야 하는 모양본의 모양이나 도형의 성질보다는 전체 그림의 간격, 배치 등을 먼저 구하기 위해 식 세우기 전략을 사용함 ▶ 각자 다른 아이디어나 해결방법이 나오지 않고, 모두 연립방정식을 통한 변의 길이 구하기에 주력함 여러 변의 길이를 미지수로 두어 삼원 일차연립방정식을 세워서 각 변의 실제 길이를 구하고자 함
	• 그룹 구성원간의 상호작용이 나타나는가? / • 자신의 의견을 피력하는가?	
		▶ 전체적으로 그룹 구성원 간의 상호작용이나 토론이 적은 편, 문제이해 단계에서는 거의 나타나지 않음 ▶ 식을 세워서 계산하고 그 결과를 확인하는 과정에서 약간의 의사소통 장면이 보임
결론 도출 및 정당화	• 올바른 결론을 이끌어 내는가?	
	연습지에 정리 : “ *a=12, x=4, a+x=16* ” (한 변의 길이가 16인 정사각형을 3등분하여 평행선을 그려 냄) B2 : 여기랑 여기랑 직각이고 각이 다 같으니까 합동 맞어 B3 : 어, 평행사변형이야 (평행사변형으로부터 마름모를 이끌어 내고자 여러 성질을 부여함)	▶ 오랜 시간의 계산을 거쳐 원형본의 정사각형의 한 변의 길이(a+x)와 간격(x)을 구해냄 ▶ 평행사변형의 성질을 나름대로 잘 드러냄 ▶ 마름모의 성질을 이끌어 내는 데에 올바른 논리적 용이 없음
	• 자신이 이끌어낸 결론에 대해 설명(해설)하는가? / • 문제해결 결과에 대한 정당화를 할 수 있는가? / • 문제해결 과정 및 결과에 대해 반성하는가?	
	(자신이 그린 그림이 마름모가 되는 이유를 설명)	▶ 평행사변형이 마름모가 되기 위한 조건들을 제시하고 이를 정당화하고자 시도하였으나 옳게 이끌어 내지 못하고, 결론만 주장함 ▶ 자신의 증명(설명)과정에 대한 반성이 나타나지 않음

3. '우수학력' 그룹

단계	질문과 학생 반응	연구자의 해석
문제 해결을 위한 준비	• 문제 상황을 스스로 이해하려는 노력(시도)이 있는가?	
	C3 : 이거 문제가 좀 어려운 것 같은데? C2 : 선생님 이거 몇 학년 문제예요? C2 : 사각형 크기는 맘대로 정해도 돼요? C1 : (문제를 꼼꼼히 읽고, 도입단계의 문제를 진지하게 생각함)	▸ 문제를 각자 읽어보는 시간을 가짐 ▸ 문제 해결의 조건에 대해 상의하거나 질문함 ▸ 주어진 문제상황을 파악하기 위해 도입부분의 문제를 꼼꼼하게 체크하고 답함
	• 문제에서 단서를 찾아내는가?	
	C3 : 평행사변형 그리는 거니까 그냥 평행선 그리면 되지 않나? C1 : 먼저 겉에 있는 사각형을 그리고 그 안에 그려야지 C2 : 이건 정사각형인 것 같아 C1 : 정사각형의 크기는 우리가 정해도 된다고 했으니까...적당히 정해 C3 : 아냐, 그래도 답으로 나오는 크기가 있을 거 같아, 계산할 수 있을 거야	▸ 평행사변형의 성질이나 성립조건을 알고 있음 ▸ 문제에서 제시된 원형본을 그리기 위해 정사각형의 크기를 먼저 정하고자 함
	• 문제해결에 필요한 선수학습 지식을 체크하는가?	
	전원 : 사각형의 성질에 대해서는 언급하지 않음	▸ 사각형의 성질이나 정의에 대해 주어진 자료를 체크하거나 질문하지 않음
문제 해결	• 문제해결을 위해 선수학습 지식을 활용하는가?	
	C3 : 일단 정사각형의 길이는 별로 안중요한 것 같으니까... a로 놓고 계산해보면... 한 변의 길이가 a인 평행사변형을 그리면.. C2 : 이거 그렇게 복잡하게 푸는 거 아닌 거 같아, 단순하게 생각해	▸ 피타고라스의 정리를 이용하여 길이를 실제 계산해내고자 함 ▸ 쉽게 해결할 수 있는 방법으로 접근하고자 함
	• 문제해결에 필요한 수학적 개념을 도출하는가?	
	C3 : 정사각형의 대각선의 길이를 이용하면 될 것 같은데... 일단 가정이 뭔지를 생각해서 결론을 이끌어내면 돼. 그냥 이걸 처음부터 평행사변형이라고 가정하는거야 C2 : 평행선만 계속 그어주면 돼. 이거 이어보면 팔각형이야. 팔각형만 잘 그리면 될 것 같은데...	▸ 주어진 문제를 가정과 결론으로 나누어 증명하는 문제로 해결하고자 함 ▸ 주어진 원형본의 외부 꼭지점을 연결하면 팔각형이 나온다는 것에 착안하여 평행선을 그려내고자 함
	• 어떤 수학적 경향을 나타내는가?	
	C3 : 가정이 맞으면 결론도 맞는 거니까... 평행사변형이라고 가정하고... C2 : 난 이 문제가 쉽게 생각하면 쉽게 풀 수 있는 거 같아, 괜히 어렵게 생각해서 더 안풀리는 거야, 초등학교 수준으로 생각해, 그냥 평행사변형이잖아.	▸ 도형의 모양 등 시각적인 특징을 언급하기 보다는 증명을 통한 문제해결을 시도함 ▸ 해결해야 할 과제가 합동인 평행사변형을 그려내는 것이므로 간단하게 평행사변형의 성질만을 이끌어내려고 함
	• 어떤 문제해결의 전략을 사용하는가? / • 다양한 해결전략(방법)을 시도하는가? / • 시행착오의 과정이 나타나는가?	
	C3 : 일단 정사각형의 길이는 별로 안중요한 것 같으니까... a로 놓고 계산해보면... 한 변의 길이가 a인 평행사변형을 그리면.. C3 : 가정이 맞으면 결론도 맞는 거니까... 평행사변형이라고 가정하고... C3 : 여기 귀퉁이의 제일 작은 사각형을 정사각형이라고 가정해서 먼저 그린다음에 붙여 가면 돼, 그리고 증명할거야 C2 : 평행선만 계속 그어주면 돼. 이거 이어보면 팔각형이야. 팔각형만 잘 그리면 될 것 같은데... C1 : 그냥 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$를 곱해야 하는데 이건 자로 그리는 거니까 근사값으로 1.4를 쓰면 돼	▸ 도형의 실제크기에 신경 쓰지 않고 일반화한 도형의 변의 길이 구하기, 가정과 결론으로 증명시도하기 전략으로 접근함 ▸ 주어진 원형본의 가장 작은 단위 정사각형부터 시작하여 전체 원형본의 모양을 만들어 나감 ▸ 여러 가지 그림을 그려보고 도형의 시각적 특징을 파악하여 시행착오를 거치는 전략으로 접근함 ▸ 정사각형의 대각선의 길이를 근사값으로 잡고 실제 길이를 지정하여 작도를 시작함
	• 그룹 구성원간의 상호작용이 나타나는가? / • 자신의 의견을 피력하는가?	
	C2 : 선생님 따로 해도 돼요? 그냥 제 방법대로 풀게요	▸ 세 명 중 두 명(C3, C2)은 활발하게 토론하고 나머지 한 사람(C1)은 주로 계산하거나 자기의 생각대로 문제해결을 시도함 ▸ 활발한 토론 후에, 소그룹 내에서 하나의 결론을 도출하기 보다는 자신의 해결방법을 사용하여 답을 얻고자 함
결론 도출 및 정당화	• 올바른 결론을 이끌어 내는가?	
	(팔각형의 성질을 활용하여 평행사변형을 그려냄) (작은 단위 정사각형의 크기를 지정하고 이로부터 변의 길이를 연장하여 큰 정사각형을 만들어냄)	▸ 각자 이끌어낸 결론을 가지고 비교한 후 올바른 답을 제시하려 함 ▸ 당위적으로 마름모를 이끌어 냄
	• 자신이 이끌어낸 결론에 대해 설명(해설)하는가? / • 문제해결 결과에 대한 정당화를 할 수 있는가? / • 문제해결 과정 및 결과에 대해 반성하는가?	
	C3 : 아예 처음부터 이게 마름모라고 가정하고 그게 왜 그런지 설명하면 돼 C2 : 좀 더 쉽고 단순하게 생각해서 그려도 될 것 같았는데... 이건 창의력 문제였을거야, 선생님 전 아주 창의적으로 문제를 푼 것 같아요 C1 : 그냥 근사값으로 계산해서 결론만 그리지 뭐	▸ 자신이 작성한 답안을 증명의 형식으로 풀어서 설명하고자 함 ▸ 기존에 쉽게 접하던 문제형태와 다른 것에 대해 창의력 문제일 것이라고 생각함 ▸ 문제해결의 시간이 지속되면서 집중력을 잃고 자신이 작성한 답안에 대해 정당화나 반성의 과정을 보이지 않음