

경험적 모드분해법에 기초한 계층적 평활방법*

김동호¹⁾ 오희석²⁾

요약

현실세계에서 관찰되는 시그널(signal)은 다양한 주파수(frequency)들의 시그널로 혼합되어 있는 경우가 많다. 예를 들어 태양 흑점 자료의 경우 약 11년 주기와 85년 주기로 변동한다는 사실은 널리 알려져 있다. 또한 경제 시계열 자료의 경우는 통상적으로 계절요인(seasonal component), 순환요인(cyclic component) 그리고 장기적인 추세요인(long-term trend)으로 분해하여 분석한다. 이러한 시계열 자료를 구성요소별로 분해하는 것은 오래된 주제중 하나이다. 전통적인 시계열자료 분석기법으로 스펙트럴 분석기법 등이 널리 사용되고 있으나 시계열 자료들이 비정상(nonstationary)일 경우에는 적용하기 어렵다. Huang et. al(1998)은 경험적 모드분해법(empirical mode decomposition)이라고 하는 자료적응적인(data-adaptive) 방법을 제안하였는데, 비정상성(nonstationarity)에 대한 강건성(robustness)으로 여러 분야에 널리 응용되고 있다. 그러나 Huang et. al(1998)은 잡음(error)에 의해 오염된 자료에 대한 구체적인 처리방법은 제시하지 못하고 있다. 본 논문을 통하여 효율적인 잡음제거 방법을 제안하고자 한다.

주요용어: 분해, 경험적 모드분해법, 주파수, 내재모드함수, 체거름과정, 제로교차점.

1. 서론

Huang et. al(1998)이 고안한 경험적 모드분해법(Empirical Mode Decomposition; 이하 EMD)은 시그널을 국소적인 주파수의 정도에 따라 내재모드함수(intrinsic mode function)라는 함수들로 분해한다. 스펙트럴 분석기법(spectral analysis)을 사용하기 위해서는 시그널이 정상(stationary)이어야 하지만 EMD 분석기법은 비정상 시그널(nonstationary signal)에도 적용 가능하며 시그널에 내재되어 있는 파동(oscillations)을 자료 적응적으로 용이하게 추출하는 장점을 가지고 있다.

EMD는 경험적 알고리즘에 기초하며 명확한 수학적 체계 형태로 제공되지는 않는다. 따라서 EMD가 제공하는 각 분해 요소에 대한 해석에 대해서는 전문가의 판단이 필요하다. 그 동안의 문헌과 선행연구에서는 주로 주파수 분해와 관련된 알고리즘적인 측면의 연구

* 이 논문은 2006학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

1) (339-701) 충남 연기군 조치원, 홍익대학교 국제경영학과, 전임강사

E-mail: donghohk@hongik.ac.kr

2) (151-747) 서울시 관악구 신림9동, 서울대학교 통계학과, 조교수

E-mail: heeseok@stats.snu.ac.kr

주제를 다루어 왔다 (Deering과 Kaiser 2005, Linderhed 2005, Zeng과 He 2004). 잡음에 의해 오염된 시그널의 경우 분해에 앞서 잡음을 제거할 필요가 있다. 본 논문에서는 EMD와 교차검증(cross-validation)에 의해 효율적으로 잡음을 제거하는 방법론을 제시하고자 한다. 2절에서 EMD를 간략하게 소개하고, 3절에서는 본 논문에서 제안하고자 하는 방법을 구체적으로 설명하고자 한다. 4절에서는 모의실험을 통하여 제시한 방법의 효율성을 검토한다.

2. EMD 소개

EMD는 시그널에 내재되어 있는 파동(oscillation)을 국소적으로 식별하는데에서 출발한다. 파동(oscillation) 또는 주파수(frequency)에 대한 합의된 정의는 없지만 다음의 예를 통하여 개념적으로 설명하고자 한다. 그림 2.1과 같은 사인파모양 함수(sinusoidal function)를 시그널(점선)로 고려하자. 그림 2.1에서 다음의 사항들을 관찰할 수 있다.

- 파동 또는 주기적인 패턴이 반복된다.
- 국소평균(local average)은 0이고 시그널은 국소평균에 대해 대칭적이다.
- 파동의 한 주기(cycle)는 0에서 시작하여 2개의 국소 극대값(최대값과 최소값)을 거쳐 0으로 끝나는 사인파모양 함수(굵은 실선)로 인식할 수 있다. 또는 국소 최대(최소)에서 출발해서 인접한 국소 최대(최소)에서 끝나는 사인파모양 함수(굵은 점선)로 인식할 수 있다. 이 경우 2개의 0과 하나의 국소 최소(최대)를 통과하게 된다.

위의 관찰에 기초하여 Huang et. al(1998)은 내재모드함수(Intrinsic Mode Function; 이하 IMF)를 2개의 인접한 국소 최대(최소)에 의해 형성되고 그 사이에 존재하는 국소 최소(최대)를 통과하는 사인파모양 함수로 정의하였다.

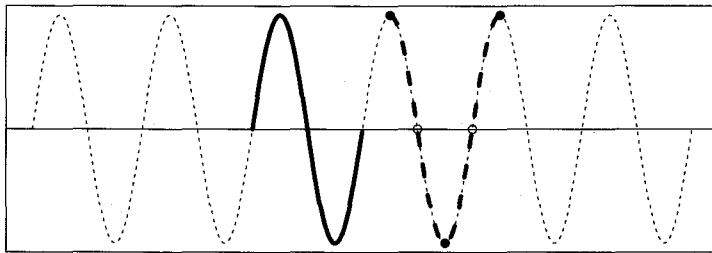


그림 2.1: 사인파모양 함수

현실세계에서 관찰되는 시그널은 여러 개의 고주파들(high frequencies)과 저주파들(low frequencies)로 구성되어 있다. 다음의 가상적인 시그널 $x(t)$ 을 고려하여 보자(그림 2.2).

$$x(t) = 0.5t + \sin(\pi t) + \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t).$$

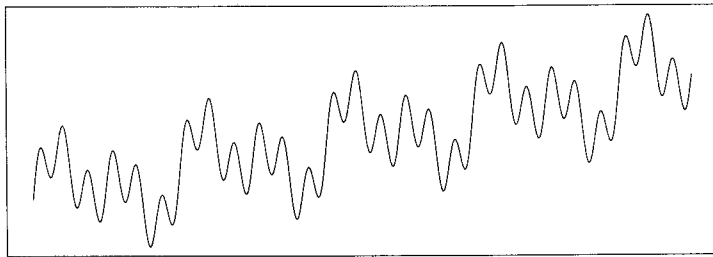


그림 2.2: 가상적인 사인파모양 시그널 $x(t)$

Huang et. al(1998) 은 각각의 구성요소를 추출하는 방법을 제안했는데 다음과 같다. 첫째, 국소 최대/최소값들을 식별한다 (그림 2.3 (a)). 둘째, 국소최대와 국소최소 각각을 이용하여 보간법(interpolation)에 의해 2개의 함수를 추정한다. 보간법으로는 삼차 스플라인(cubic spline)을 주로 사용한다. 각각을 상위막(upper envelop)과 하위막(lower envelop)이라 한다 (그림 2.3 (b)). 전반적으로 시그널은 2개의 함수들 사이에 존재하게 되며 2개 함수의 평균은 본래의 시그널보다 저주파를 형성하게 된다. 상위막과 하위막의 평균을 평균막(mean envelop)이라 한다 (그림 2.3 (c)). 본래의 시그널 $x(t)$ 에서 평균막을 공제하여 고주파적인 패턴을 가지는 잔여시그널(residue signal) h 을 분리하게 된다 (그림 2.3 (d)).

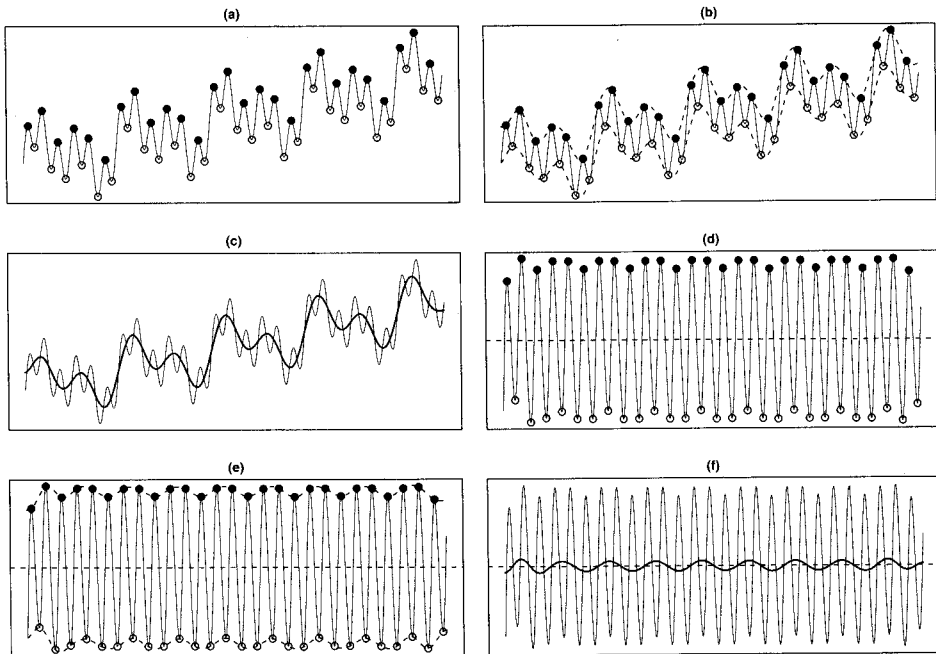


그림 2.3: 체거름과정(sifting)

Huang et. al(1998)은 IMF가 만족하여야 할 성질로 다음의 2가지를 제시하였다. 1) 극단값들의 갯수와 제로통과점(zero-crossing)의 갯수의 차이는 1이다. 2) 국소평균은 0이다. 이때 국소평균(local average)이 0이라는 것은 상의막(upper envelop)과 하위막(lower envelop)의 평균, 즉 평균막(mean envelop)이 0이라는 의미이다. 위에서 설명한 절차를 한번 적용하여 이러한 성질들을 만족시킬 수 있는 잔여 시그널을 얻기는 매우 어렵다. 따라서 위의 과정을 잔여 시그널 h 에 반복적으로 적용하여 IMF를 추출하게 된다. 그림 2.3 (d), (e)와 (f)은 두번째로 위의 과정을 적용하는 과정을 설명하고 있다. 이 반복적인 알고리즘을 체거름과정(sifting)이라 한다. 이러한 체거름과정을 통하여 잔여시그널은 평균이 0이며 동시에 0에 대해 대칭적인 시그널 IMF로 접근하게 된다. 체거름과정은 고주파로부터 저주파 요소를 반복적으로 제거하는 과정이라고 할 수 있다. 첫번째 IMF imf_1 은 최고의 고주파를 형성하게 된다. 잔여시그널 $r = x - imf_1$ 이 여전히 다수의 주파수로 구성되어 있을 경우 체거름과정을 잔여시그널에 반복적용하여 최종적으로 m 개의 IMF를 추출하게 된다. 본래의 시그널에서 m 개의 IMF를 제거하고 남은 부분을 r 이라고 하면 다음의 관계가 성립된다.

$$x(t) = imf_1(t) + \dots + imf_m(t) + r(t).$$

3. 잡음제거방법

잡음에 오염된 시그널 $x(t)$ 가 다음의 과정을 통하여 생성되었다고 가정하자.

$$x(t) = f(t) + \epsilon(t), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

여기서 $\{\epsilon(t)\}$ 은 평균이 0, 분산이 σ^2 인 잡음이며 f 는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) + \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t) & 0 < t \leq 3, \\ \sin(\pi t) + \sin(6\pi t) & 3 < t \leq 6, \\ \sin(\pi t) + \sin(6\pi t) + \sin(12\pi t) & 6 < t \leq 9. \end{cases}$$

그림 3.1은 가상적인 시그널 $x(t)$, EMD에 의해 분해한 2개의 IMF $imf_i, i = 1, 2$ 와 잔여시그널 r 을 보여주고 있다. 그림 3.1에서 관찰할 수 있듯이 2개의 IMF는 많은 잡음을 내포하고 있다. 이러한 잡음을 효율적으로 제거하는 방법중 하나는 분계점(threshold)을 이용하는 것이다.

즉 i 번째 imf_i 에 대해 다음의 모형을 설정하고 모수 μ_i 가 0인지를 분계점(threshold)을 이용하여 판별하는 것이다. 즉 $imf_i(t)$ 의 절대값이 어떤 분계점(threshold) λ_i 보다 작을 경우 μ_i 를 0으로 추정하는 것이다.

$$imf_i(t) = \mu_i + \delta_i(t), \quad \text{여기서 } \delta \text{ 는 잡음이다.}$$

2개의 IMF에 대한 분계점을 각각 0.8107과 0.3878로 설정하여 잡음을 제거한 IMF를 각각 $d_i, i = 1, 2$ 라 하면 평활된 시그널 \hat{f} 는 다음과 같다.

$$\hat{f}(t) = d_1(t) + d_2(t) + r(t).$$

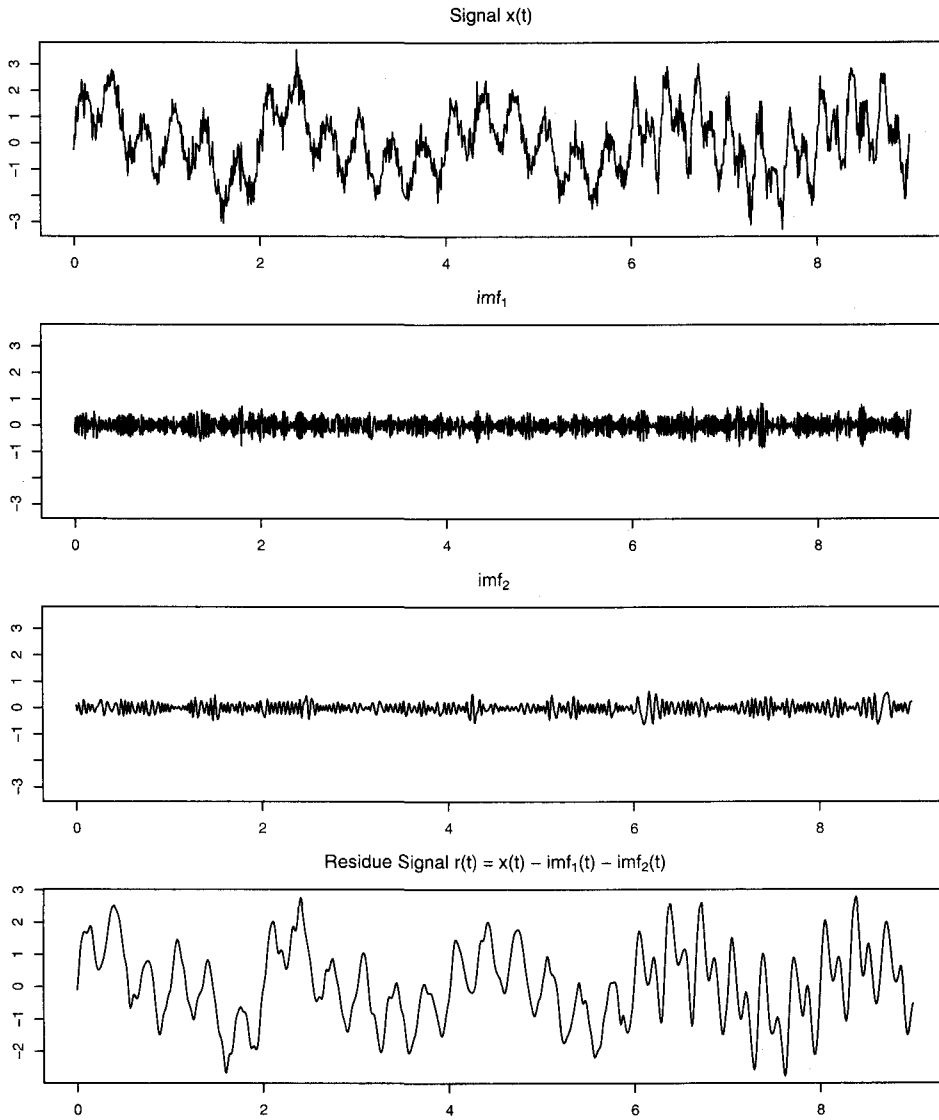


그림 3.1: 모형 3.1에 의한 시그널 $x(t)$ 에 대한 EMD 결과

그림 3.2은 잡음을 제거한 2개의 IMF $d_i, i = 1, 2$ 와 평활된 시그널 \hat{f} 을 보여주고 있다. 한편 위의 시그널을 모의실험에서 소개될 세가지 웨이블릿(wavelet) 평활법과 성과를 비교하기 위해 평균제곱오차(mean squared error), $MSE = \frac{1}{n} \sum \{f(t) - \hat{f}(t)\}^2$ 를 구하였다. 그 결과는 43.43 (EMD 방법)과 234.08, 61.29, 63.46 (세가지 웨이블릿 방법)이다. 따라서 EMD 분해 방법과 분계점을 이용하여 잡음을 제거하는 것이 효율적임을 알 수 있다.

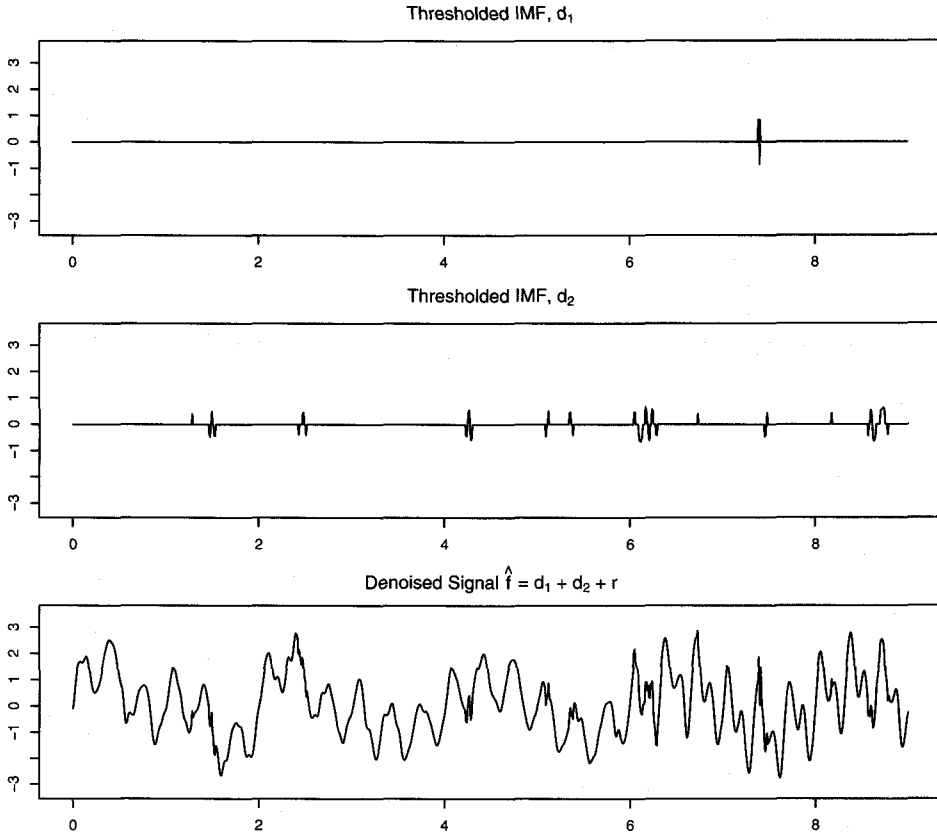


그림 3.2: 분계점을 이용한 잡음제거

각각의 평활 결과는 그림 3.3을 참조하라. 문제는 어떤 기준으로 분계점을 결정할 것인가이다. 본 논문에서는 교차타당성(cross-validation)을 이용한 방법을 제안하고자 한다. 교차타당성에서는 t 번째 자료를 제외한 $n - 1$ 개의 자료만을 사용하여 모형을 추정하여 t 번째 자료에 대한 예측오차(prediction error)를 계산하게 된다. 즉, 예측오차 PE 는 다음과 같이 계산된다.

$$PE(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{x(t) - \hat{f}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}^{-t}(t)\}^2, \quad (3.2)$$

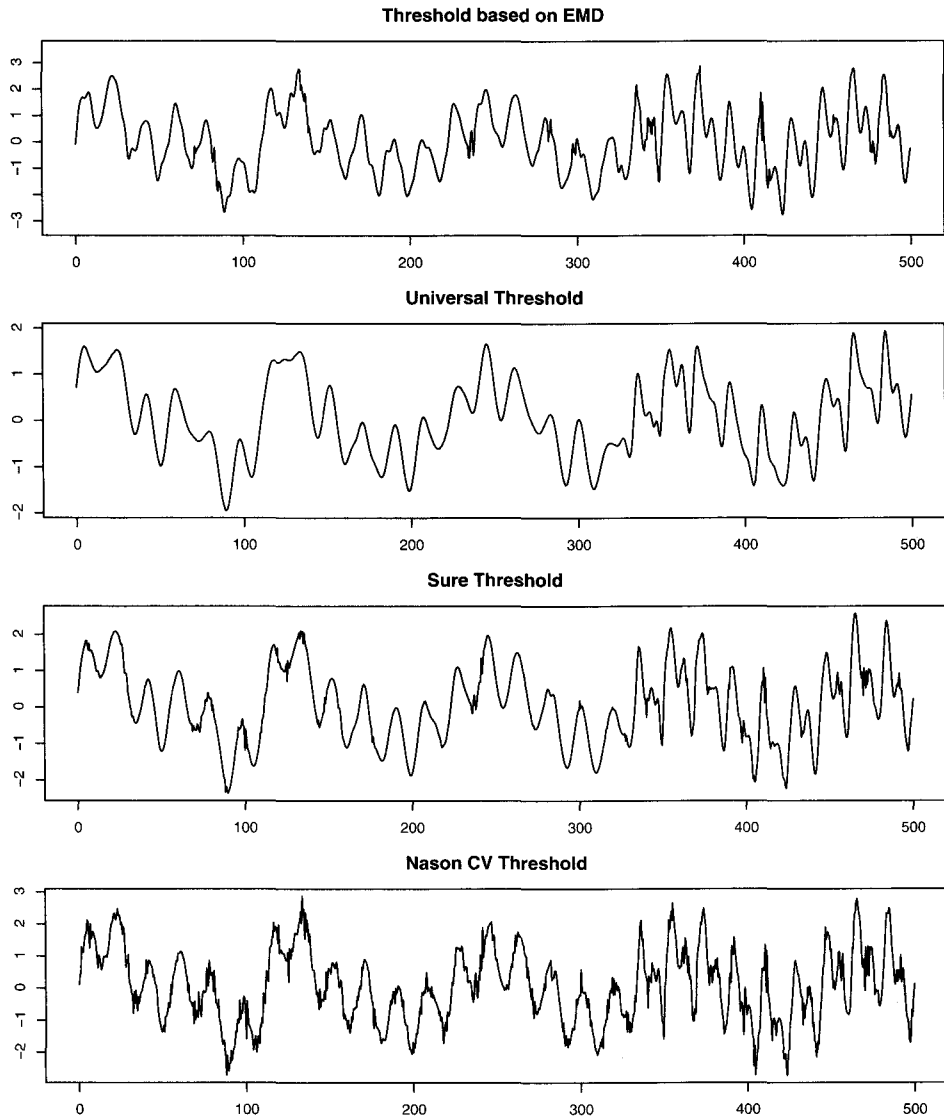


그림 3.3: EMD와 분계점을 이용한 평활방법과 웨이블릿을 이용한 평활방법의 비교. 각 방법으로 부터 구한 MSE 값은 43.43, 234.08, 61.29, 63.46이다.

여기서 $\hat{f}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}^{-t}(t)$ 는 t 번째 자료를 제외한 후, EMD에 의해 추정된 모형에 의한 t 번째 자료에 대한 예측값이다. 구체적으로 분계점을 이용하여 평활하는 방법을 기술하면 다음과 같다.

- 1) t 번째 자료를 제외하고,
- 2) $n-1$ 개의 자료에 대해 EMD 방법으로 s 개의 IMF $imf_i, i = 1, \dots, s$ 와 잔여시그널 r 을 산출한다.
- 3) 주어진 분계점(threshold) $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 으로 s 개의 IMF의 잡음을 제거하여 $d_i, i = 1, \dots, s$ 을 산출한다.
- 4) 평활된 시그널 $\hat{f} = d_1 + \dots + d_s + r$ 을 산출한 후,
- 5) t 번째 자료에 대한 예측값은 근접한 평활 시그널을 보간하여 산출한다.
- 6) 모든 t 번째 자료에 대해 위의 과정을 반복하여 예측오차 PE 를 산출한다.
- 7) 예측오차 PE 를 최소화하는 $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_s$ 를 그리드탐색 알고리즘(grid search algorithm)에 의해 최적의 분계점으로 선택하게 된다.

또한, 일반적인 K -다중교차타당성(K -fold cross-validation)을 적용할 수도 있다. 함수 $k : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, K\}$ 는 $1, 2, \dots, n$ 을 K 개의 집단으로 분할하는 함수라고 하자. 그러면 K -다중교차타당성에 의한 예측오차는 다음과 같이 정의된다.

$$PE(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{x(t) - \hat{f}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}^{-k(t)}(t)\}^2,$$

여기서 $\hat{f}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}^{-k(t)}(t)$ 는 k 번째 자료집단을 제외하고 산출한 $x(t)$ 의 예측값이다. 일반적으로 K -다중교차타당성에 의해 구해진 $\hat{\lambda}_i$ 은 (3.2)로부터 구한 λ_i 보다 분산이 적은 장점이 있다고 알려져 있다.

4. 모의실험

이절에서는 모의실험을 통하여 제안한 방법론의 경험적 성과를 측정하고자 한다. 성과가 좋은 것으로 알려진 웨이블릿에 기초한 3가지 방법과 제안한 방법을 비교하고자 한다.

1. wc: Nason(1996)에 의한 2-다중교차타당성 방법
2. ws: Donoho와 Johnstone(1995)의 Sure 방법
3. wu: Donoho와 Johnstone(1994)의 universal threshold 방법
4. emd.cv: 본 논문에서 제안하는 방법

그림 4.1의 두가지 함수를 검증용 함수로 사용하였다. 각각의 정의는 다음과 같다.

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) + \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t) & 0 < t \leq 3, \\ \sin(\pi t) + \sin(6\pi t) & 3 < t \leq 6, \\ \sin(\pi t) + \sin(6\pi t) + \sin(12\pi t) & 6 < t \leq 9, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \exp(-0.01t) \cos(\pi t/10), \quad 0 < t \leq 500.$$

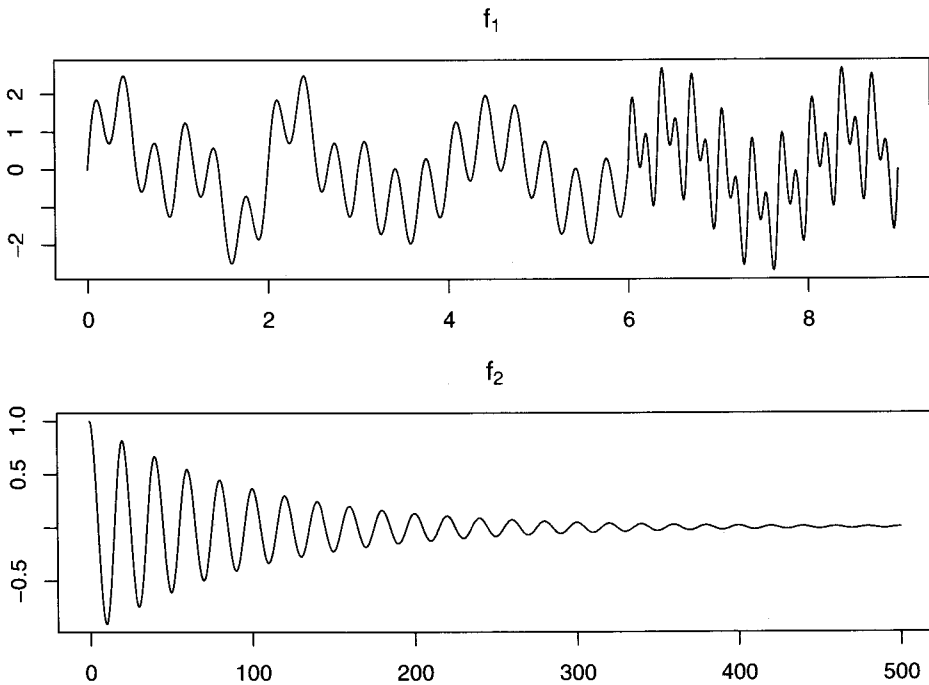


그림 4.1: 검증용 함수

잡음은 정규분포(normal distribution)에서 생성했으며 시그널대잡음 비(signal-to-noise ratio), $snr = \|f\|/\sigma$ 는 3이고 자료의 갯수는 웨이블릿과의 비교를 위해 1,024로 하였다. 위의 모의실험 조건하에 100번 반복실험하여 MSE 를 측정하였다. MSE 값에 대한 상자그림(boxplot) 4.2를 살펴보면 제안한 방법이 잡음을 제거하는데 효과적임을 알 수 있다. 모의실험과정중 제안한 방법을 의해 2-다중교차타당성 방법을 사용하였으며 첫번째와 두번째 IMF를 분계점에 의해 평활화하였다.

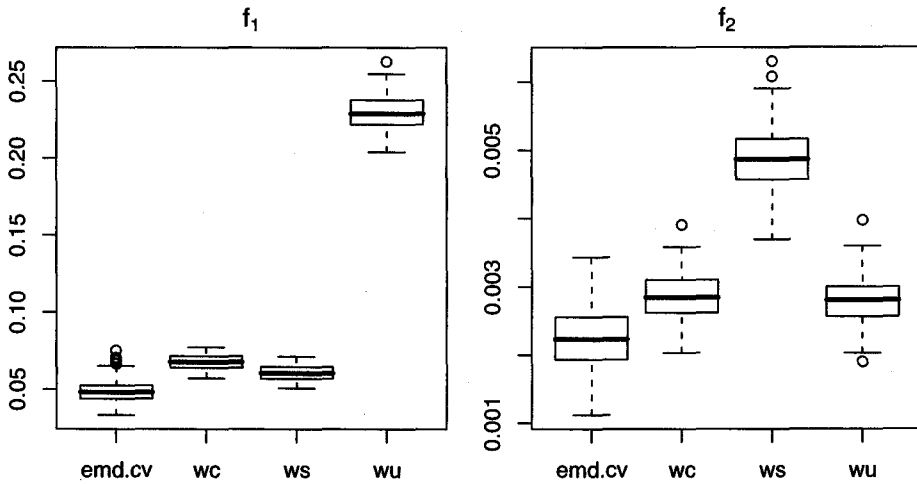


그림 4.2: 제안한 평활방법과 웨이블릿을 이용한 평활방법의 MSE에 대한 상자그림

5. 맺음말

본 논문은 최근에 개발된 경험적 모드분해법을 소개하였고 교차타당성과 조합하여 새로운 계층적 평활법을 개발하였다. 모의실험을 통해 제안한 방법이 정규분포의 잡음하에서 경험적으로 우수한 성과를 나타낸다는 사실을 입증하였다. 잡음이 두꺼운 꼬리분포(heavy-tailed distribution)에서 발생하여 극단값이 존재할 경우 체거름과정에서 이를 정상적인 시그널로 인식하는 문제가 발생할 수 있는데 이에 대한 처리방법은 추후 연구과제가 될 것이다.

참고문헌

- Deering, R. and Kaiser, J. F. (2005). The use of a masking signal to improve empirical mode decomposition. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 4, 485-488.
- Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika*, 81, 425-455.
- Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. (1995). Adapting to unknown smoothing via wavelet shrinkage, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1200-1224.
- Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. L. Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N. C., Tung, C. C. and Liu, H. H. (1998). The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society London A*, 454, 903-995.
- Linderhed, A. (2005). Variable sampling of the empirical mode decomposition of two-dimensional signals, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Informa-*

tion Processing, **3**, 435–452.

Nason, G. P. (1996). Wavelet shrinkage by cross-validation, *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B*, **58**, 463–479.

Zeng, K. and He, M.-X. (2004). A simple boundary process technique for empirical mode decomposition, *Proceedings of the IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, **6**, 4258–4261.

[2006년 4월 접수, 2006년 5월 채택]

Hierarchical Smoothing Technique by Empirical Mode Decomposition*

Donghoh Kim¹⁾ Hee-Seok Oh²⁾

ABSTRACT

A signal in real world usually composes of multiple signals having different scales of frequencies. For example sun-spot data is fluctuated over 11 year and 85 year. Economic data is supposed to be compound of seasonal component, cyclic component and long-term trend. Decomposition of the signal is one of the main topics in time series analysis. However when the signal is subject to nonstationarity, traditional time series analysis such as spectral analysis is not suitable. Huang et. al(1998) proposed data-adaptive method called empirical mode decomposition (EMD). Due to its robustness to nonstationarity, EMD has been applied to various fields. Huang et. al, however, have not considered denoising when data is contaminated by error. In this paper we propose efficient denoising method utilizing cross-validation.

Keywords: Decomposition, Empirical mode decomposition, Frequency, Implicit mode function, Sifting, Zero-crossing.

* This work was supported by 2006 Hongik University Research Fund.

1) Full-time Instructor, Department of International Management, Hongik University, Jochiwon 339-701, Korea

E-mail: donghohk@hongik.ac.kr

2) Assistant professor, Department of Statistics, Seoul National University, Seoul 151-747, Korea

E-mail: heeseok@stats.snu.ac.kr