

자유표면 유동 시뮬레이션을 위한 고정확도 수치도식의 검토

박종천* · 이병혁* · 김정후*

*부산대학교 조선해양공학과

Study on High Accurate Schemes for Simulation of Free-surface Flow

JONG-CHUN PARK*, BYOUNG-HYUK LEE* AND JEUNG-HU KIM*

*Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, Busan, Korea

KEY WORDS: Free-surface flow 자유표면 유동, High accurate scheme 고정확도 도식, Marker density function 밀도함도, Total variation diminishing limit function TVD 제한함수, Computational fluid dynamics 전산유체역학

ABSTRACT: Numerical schemes for spacing and time are tested to accurately simulate the wave propagation. The tested numerical schemes include 2nd-order central differencing, 1-order upwind scheme, 2nd-order Leith scheme, 3rd-order MUSCLE, QUICK and QUICKEST schemes in spacing and the Euler and 4th-order Runge-Kutta(R-K) schemes in time. It is seen that more accurate results are expected when the higher-order schemes, especially the schemes combined with a TVD control limiter, are used for solving the wave equation. The 3rd-order upwind scheme with limiter and the 4th-order R-K scheme in time are finally applied to the wave-making simulation in a digital wave tank.

1. 서 론

Navier-Stokes(N-S) 방정식을 이용한 전산유체역학(CFD) 분야에서 비선형성이 강한 자유표면의 유동을 시뮬레이션하기 위하여, 식 (1)과 같은 스칼라 함수(ϕ)의 수송방정식을 풀어 자유표면의 운동을 표현하는 기법이 사용되고 있다(Sussman et al., 1994; Park et al., 1999).

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (1)$$

여기서, 스칼라 함수 ϕ 에는 거리함수나 계단함수가 일반적으로 사용된다.

하지만 식 (1)에 포함된 비선형 대류항의 수치적인 이산화 과정을 통해 비물리적인 수치확산을 초래하여 자유표면의 정확한 위치 추정에 어려움을 주게 된다.

본 연구에서는 식 (1)의 시간 및 공간 이산화에 각종 수치 도식(Scheme)을 적용하여 각 도식들의 특성을 파악하였다. 또 이때 검토된 고정확도 도식을 수치조파 시뮬레이션에 적용하였다.

2. 수치 도식의 검토

2.1 이산화 기법

제안된 여러 종류의 수치 도식을 이용하여 식 (1)에 비압축성

의 질량보존법칙을 이용하여 보존형 표현인 식 (2)와 (3)의 1차원 및 2차원 파동 방정식을 수치 시뮬레이션 하였다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial(U\phi)}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial(U\phi)}{\partial x} - \frac{\partial(V\phi)}{\partial y} \quad (3)$$

단, U 와 V 는 x 와 y 방향에서의 이류속도를 각각 나타낸다.

물리량 ϕ_i 를 격자중심에 배치하는 정규격자(Regular mesh)를 채용하여 식 (2)와 (3)을 유한체적법으로 이산화한다. 시간 적분에 1차 정확도의 Euler 도식을 적용하면

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{V_i} \quad (4)$$

$$F_{i+1/2}^n = U_{i+1/2}^n \phi_{i+1/2}^n S_{i+1/2} \quad (5)$$

여기서, V_i 는 격자 i 의 체적, $S_{i+1/2}$ 은 격자경계 $i+1/2$ 의 면적이고, $F_{i+1/2}$ 은 격자경계 $i+1/2$ 의 flux이다. Flux를 계산하기 위해서는 격자경계에서의 물리량 $\phi_{i+1/2}$ 이 필요하며 격자중심에 배치된 물리량을 사용하여 격자경계에서의 값을 구한다.

2.2 수치 도식

수치 해석에는 다음과 같은 6종류의 수치도식이 적용되었다.

(1) 2차 정확도 중심차분 (CDS)

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) \quad (6)$$

(2) 1차 정확도 상류차분 (UDS)

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_i & (U \geq 0) \\ \phi_{i+1} & (U < 0) \end{cases} \quad (7)$$

(3) 2차 정확도 Leith 도식 (Lax & Wendroff, 1960)

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{C}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (8)$$

(4) 3차 정확도 MUSCL 도식(van Leer, 1979)

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_i + \frac{1}{6}(\phi_i - \phi_{i-1}) + \frac{1}{3}(\phi_{i+1} - \phi_i) & (U \geq 0) \\ \phi_{i+1} - \frac{1}{3}(\phi_i - \phi_{i-1}) - \frac{1}{6}(\phi_{i+1} - \phi_i) & (U < 0) \end{cases} \quad (9)$$

(5) 3차 정확도 QUICK 도식(Leonard, 1979)

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{8}(-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}) & (U \geq 0) \\ \frac{1}{8}(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i) & (U < 0) \end{cases} \quad (10)$$

(6) 4차 정확도 QUICKEST 도식(Leonard, 1979)

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{C}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1-C^2}{6}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) & (U \geq 0) \\ \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{C}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1-C^2}{6}(\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i) & (U < 0) \end{cases} \quad (11)$$

단, C 는 Courant 수이며 다음과 같다.

$$C_x = U \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad C_y = V \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (12)$$

2.3 1차원 및 2차원 공간 도식의 검토

먼저, 식 (2)의 1차원 테스트 문제로는 Fig. 1과 같이 ϕ 가 계단함수인 경우를 택하였다. 함수 ϕ 의 초기값으로는 x 축에서 10의 영역에 $\phi=10$ 의 값을, 그리고 나머지 영역에서는 $\phi=0$ 의 값을 주었다. 전진속도 $U=1$ 로 설정하였다. 격자간격 Δx 는 0.1이며 모든 경우에 대하여 Courant 수는 $C=0.1$ 로 일정하게 취하였다. 계산영역의 양 끝단에서는 Neumann 조건을 경계조

건으로 설정하였다. Fig. 2는 각 경우에 대하여 초기 시간 스텝과 $20/C$, $50/C$ 에서 계단함수의 시간적 전파과정에 따른 공간적 분포를 보인다. 단, 그림의 좌측에는 계단함수의 초기 파형을 함께 표시해 두었다. CDS의 경우 심한 수치적 진동이 보이며, UDS의 경우는 심한 수치적 확산과 소산에 의해 함수 원래의 형상을 알아 보기 힘들다. 그 외의 경우 수치적 진동은 다소 사라졌지만 원래 함수의 형상을 표현하는 데에는 개선의 여지가 있어 보인다.

2차원 테스트 문제에서는 Fig. 3에 보이는 바와 같이 $x-y$ 평면에서 10×10 영역에 $\phi=10$ 의 초기값을 가진다. Courant 수는 $C_x = C_y = 0.1$ 을 사용하였고 유동은 45° 방향이다. 격자간격은 $\Delta x = 0.1$ 이며 등간격 격자를 사용하였다. 경계조건은 계산 영역의 네 경계에 Neumann 조건을 설정하였다. 결과적으로 Fig. 4에 보이는 바와 같이 각 도식 별 특성은 1차원 테스트 결과와 비슷한 양상을 보인다. 단, Fig. 4의 좌측에는 계단함수의 초기 파형을 함께 표시해 두었다.

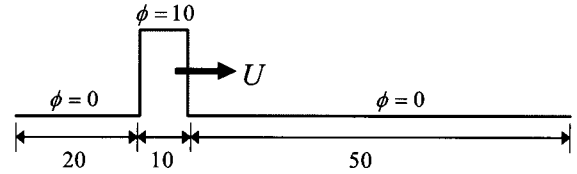


Fig. 1 1-D test model for solving wave equation

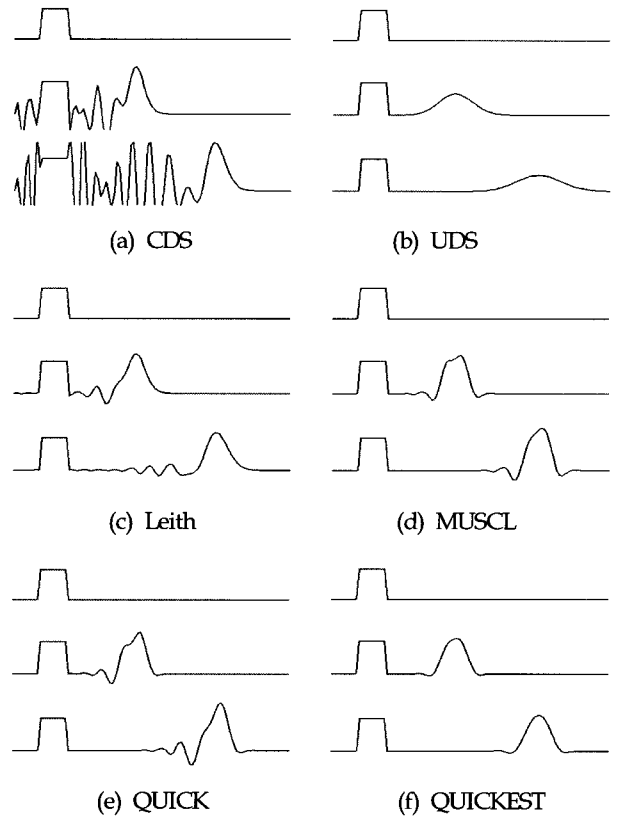


Fig. 2 Comparison of various schemes in 1-D test problem, $C=0.1$

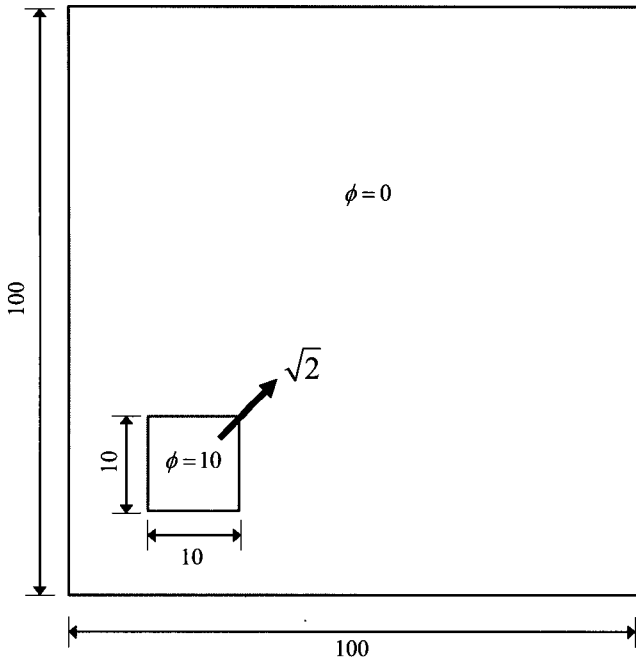


Fig. 3 2-D test model for solving wave equation

2.4 제한함수를 고려한 TVD 도식의 도입

2.3절에서 야기된 수치적 진동 및 확산을 제어하고 보다 정확한 결과를 기대하기 위하여 제한함수를 고려한 3차 정확도의 TVD(Total-variation diminishing) 도식을 도입하였다. 식 (5)의 flux를 상류화하고 편의상 첨자 $i + 1/2$ 를 i 라 놓으면

$$F_i = \frac{1}{2} (U_i - |U_i|) \phi_i^+ S_i + \frac{1}{2} (U_i + |U_i|) \phi_i^- S_i \quad (13)$$

여기서, ϕ_i^+ 와 ϕ_i^- 는 Flux 평가점에서 물리량의 보정치를 나타낸다. 이때 Flux 정의점과 물리량의 정의점이 각각 반 Cell씩 어긋나 있다고 하면 그때의 보정치는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_i^- = \phi_{i-1/2} + \Phi_1^- \delta\phi_{i-1} + \Phi_2^- \delta\phi_i \quad (14)$$

$$\phi_i^+ = \phi_{i+1/2} - \Phi_1^+ \delta\phi_{i+1} - \Phi_2^+ \delta\phi_i \quad (15)$$

$$\delta\phi_i = \phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2} \quad (16)$$

단, 식 (14) 및 (15)의 계수 Φ_1^- , Φ_2^- , Φ_1^+ , Φ_2^+ 에 따라 다양한 차분형태를 취할 수 있다. 예를 들어 $\Phi_1^- = \Phi_2^- = \Phi_1^+ = \Phi_2^+ = 0$ 일 때 1차 정도의 상류 도식이 되며, $\Phi_1^- = \Phi_1^+ = 1/6$, $\Phi_2^- = \Phi_2^+ = 1/3$ 일 때 MUSCL 도식이 된다(박중천 등, 2003).

식 (14)와 (15)에 TVD 안정화를 위하여 제한함수인 Minmod limiter(Chakravathy and Osher, 1985)를 도입하면,

$$\phi_i^- = \phi_{i-1/2} + \min\text{mod}(\Delta_{-1}, b\Delta_0) \Phi_1^- + \min\text{mod}(\Delta_0, b\Delta_{-1}) \Phi_2^- \quad (17)$$

$$\phi_i^+ = \phi_{i+1/2} - \min\text{mod}(\Delta_0, b\Delta_{+1}) \Phi_1^+ - \min\text{mod}(\Delta_{+1}, b\Delta_0) \Phi_2^+ \quad (18)$$

단, $\Delta_0 = \phi_i - \phi_{i-1}$ 로 정의하며, 본 연구에서 $b = 2.0$ 을 취한다.

Figs. 5~6에는 TVD 도식을 적용한 1차원 및 2차원 결과를 보인다. 앞서 거론되었던 수치적 진동과 확산에 의한 문제점들이 크게 개선된 것을 알 수 있다.

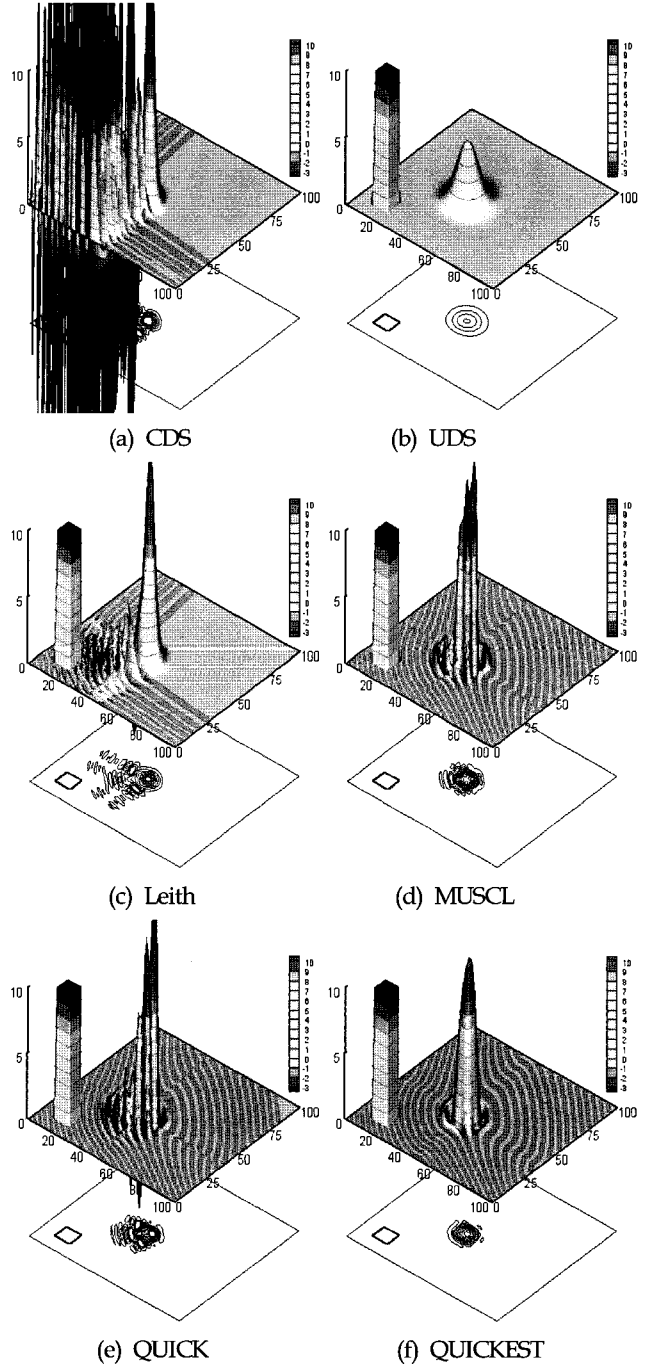
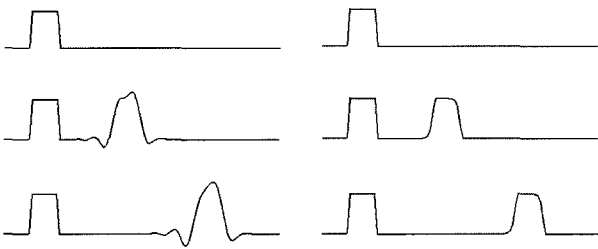
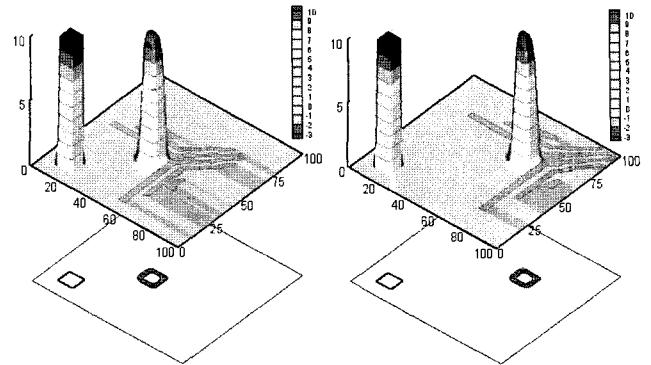


Fig. 4 Comparison of various schemes in 2-D test problem, $C = 0.1$



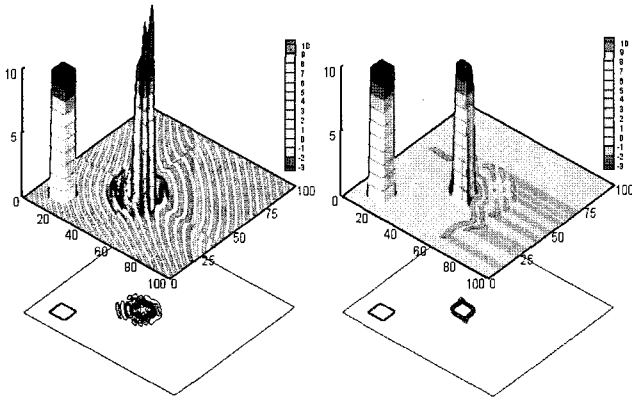
(a) MUSCL (b) MUSCL+limiter

Fig. 5 Comparison of TVD schemes in 1-D test problem, $C=0.1$



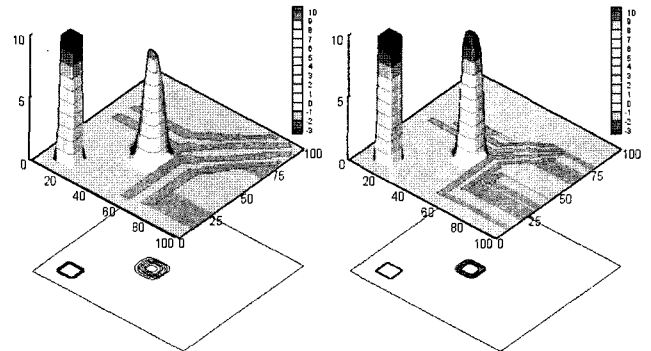
(a) $30C$ (b) $50C$

Fig. 8 Time-sequence of 2-D square wave propagation, $C=0.1$

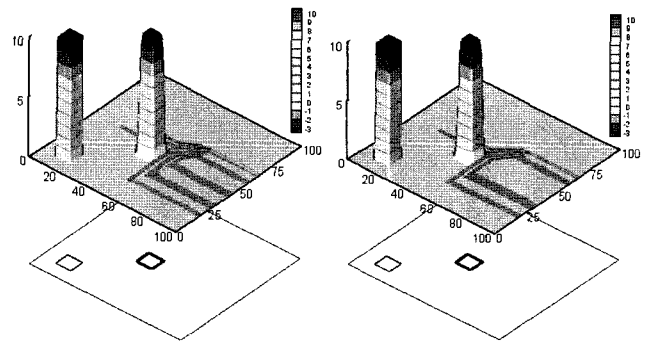


(a) MUSCL (b) MUSCL+limiter

Fig. 6 Comparison of TVD schemes in 2-D test problem, $C=0.1$

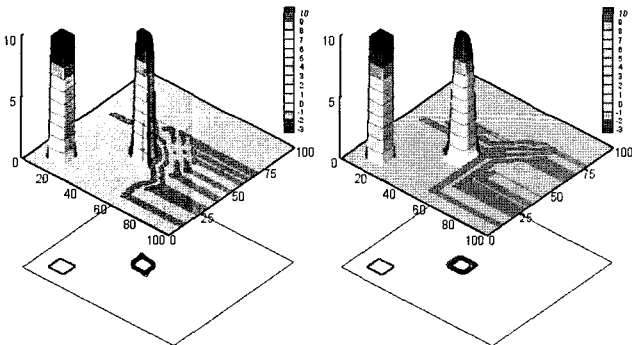


(a) $\Delta t=0.2, \Delta x=2.0$ (b) $\Delta t=0.1, \Delta x=1.0$



(c) $\Delta t=0.05, \Delta x=0.5$ (d) $\Delta t=0.1, \Delta x=0.5$

Fig. 9 Comparison of various condition in 2-D test problem, $C=0.1$



(a) Euler (b) RK-4

Fig. 7 Comparison of time schemes in 2-D test problem, $C=0.1$

2.5 시간 도식의 검토

Fig. 7에는 시간 차분 도식에 4차 정확도의 Runge-Kutta (R-K) 도식을 적용한 결과를 보인다. 1차 정확도의 Euler 도식을 적용한 결과에 비하여 공간적인 분포가 초기 파형에 가까운 분포를 유지하고 있음을 알 수 있다. Fig. 8은 공간 차분에 TVD 도식과 시간차분에 R-K 도식을 각각 적용한 경우이며 시각 $t=30C$ 와 $50C$ 에서의 공간적 분포를 나타낸다. 시간변화에 따라 형상의 변화가 그다지 크지 않음을 알 수 있다.

2.6 격자 및 시간 간격의 검토

Fig. 9(a)~(c)는 $C_x = C_y = 0.1$ 로 고정하여 Δx 와 Δt 를 변화시킨 경우, (d)는 $C_x = C_y = 0.05$ 인 경우의 결과를 나타낸다. 동일한 Courant 수의 경우라도 격자 간격이 작은 경우에 보다 정확한 해를 얻을 수 있었다.

2.7 오차 해석

보다 정량적인 해석을 위하여 매 시간스텝마다 해석해와의 오차를 식 (19)를 이용하여 살펴 보았다(Koshizuka et al., 1990).

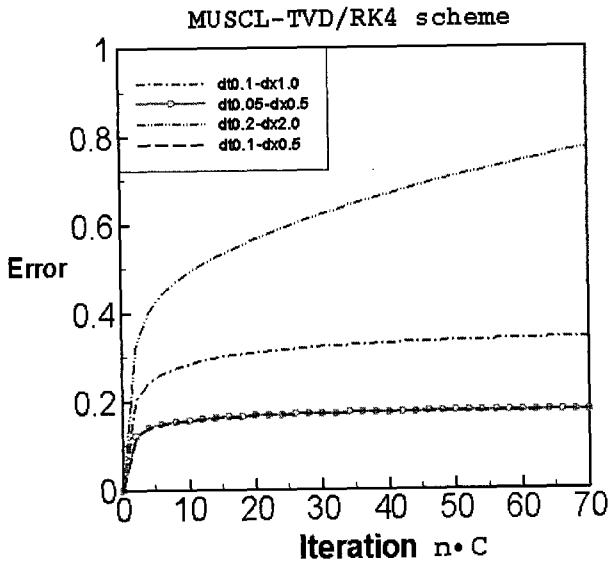


Fig. 10 Comparison of error analysis with various condition

$$err^n = \frac{\sum |\phi_i^n - \phi_i^{analytic}|}{\sum \phi_i^n} \quad (19)$$

여기서 $\phi_i^{analytic}$ 은 각 격자점에서의 해석해를 의미한다.

Fig. 9에서 수행한 각각의 경우에 대하여 식 (19)로부터 얻은 결과를 Fig. 10에 표시하였다. Fig. 9의 (a)와 (b)의 경우 시간증가(Fig. 10에서는 반복회수)에 따라 해석해와의 오차가 점점 증가하지만 (c)와 (d)의 경우에 오차의 증가율은 초기 단계에서 수렴하며 차이가 없음을 알 수 있다.

3. 수치조파 시뮬레이션

앞서 적용한 수치 도식을 이용하여 식 (20)과 같은 밀도함수 (Marker-density function, MDF)(Park et al., 1999; 박종천, 2003)의 수송방정식을 풀어 비선형성 자유표면 유동을 시뮬레이션하였다.

$$\frac{\partial M_\rho}{\partial t} + U \frac{\partial M_\rho}{\partial x} + W \frac{\partial M_\rho}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

여기서 M_ρ 는 밀도함수이며, 완전한 물과 공기의 격자에서 각각 1과 0의 값을 갖는다. 따라서 자유표면의 위치는 $M_\rho = 0.5$ 으로 표시된다.

수치 시뮬레이션 예로는 2차원 수치수조에서의 수치조파 문제이다. 수치수조의 계산방법 및 조파기를 포함한 계산 조건은 Park et al.(1999)에 상세히 설명되어 있다. 단, Park et al.(1999)에서는 대류항에 MUSCL 도식과 시간차분에는 Euler 도식을 적용하였다. 입사파의 진폭은 $A=0.03$ (m), 주기는 $T=0.9$ (sec), 파장은 $L=1.26$ (m)이다. 총 계산시간은 $t=10T$ 이며, 격자간격은 $\Delta x=L/40$ (m), $\Delta z_{min}=A/10$ (m)이다.

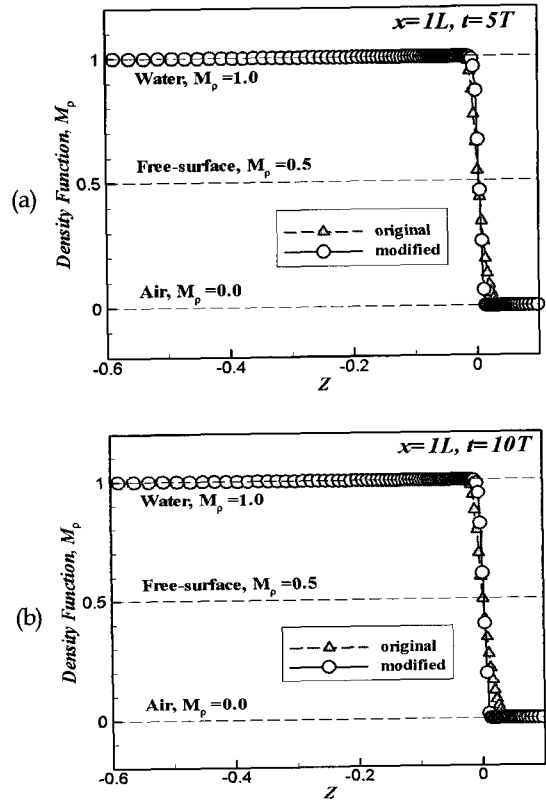


Fig. 11 Vertical distribution of M_ρ ; (a) $x=1L, t=5T$ and (b) $x=1L, t=10T$

Fig. 11은 수치조파기로부터 $x=1L$ 떨어진 곳에서 시간 $t=5T$ 와 $10T$ 에서 각각 계측한 밀도함수 M_ρ 의 연직분포를 나타낸다. 단, Fig. 11의 "Original"은 Park et al.(1999)의 방법을 사용한 결과이며, "Modified"는 대류항의 도식에 TVD 제한함수를 고려한 MUSCL 도식과 시간차분에는 4차 정확도의 R-K 도식을 적용한 본 연구의 결과를 나타낸다. 기존의 방법에 의한 결과는 전체적으로 시간이 지남에 따라 밀도함수의 연직분포가 수치적으로 확산되는 경향을 보이지만 본 연구의 결과는 시간에 따라 일정한 분포 폭을 보인다. 이러한 경향은 Fig. 12의 $x=2L$ 지점에서도 나타난다. Fig. 13은 시간 도식에 Euler와 4차 정확도의 R-K 도식을 적용하여 얻은 결과를 나타낸다. 수치조파기로부터 멀어질수록 두 도식간의 차이를 볼 수 있으며 R-K 도식의 경우 본 문제에 다소 유리하다는 사실을 알 수 있다. 하지만 이때의 최대오차는 3% 미만이었다.

4. 결 론

본 논문에서는 스칼라량의 수송방정식의 시간 및 공간 이산화에 각종 수치 도식을 적용하여 각 도식들의 특성을 파악하였다. 또한 이때 검토된 고정확도 도식을 수치조파 시뮬레이션에 적용하여 유용한 결과를 얻었다. 향후 연안 및 해양공학 분야의 쇄파현상을 동반하는 비선형성 파랑운동의 수치 시뮬레이션에 적용하여 보다 정도 높은 결과를 얻을 것을 기대할 수 있다.

후 기

본 연구는 전력산업 연구개발 사업의 “월파형 파력발전 기반 기술연구” 과제의 지원으로 수행된 연구결과 중 일부임을 밝히며, 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

박 종천 (2003). "해양환경공학의 다목적 시뮬레이션을 위한 수치파랑수조 기술", 한국해양공학회지, 제17권, 제4호, pp 174-180.

박종천, 강대환, 전호환 (2003). "저항감소를 위한 물체후방의 형상 설계에 관한 LES 해석", 한국해양공학회지, 제17권, 제5호, pp 1-10.

Chakravarthy, S.R. and Osher, S. (1985). "A New Class of High Accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws", AIAA paper, 85-0363.

Koshizuka, S., Carrico, C.B., Lomperski, S.W., Oka, Y. and Togo, Y. (1990). "Min-Max Truncation : An accurate and stable filtering method for difference calculation of convection", Computational Mechanics, Vol 6, No 6, pp 65-76.

Lax, P.D. and Wendroff, B. (1960). "Systems of Conservation laws", Comm. Pure Appl. Math., Vol 13, pp 217-237.

Leonard, B.P. (1979). "A stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol 19, pp 59-89.

Park, J.C., Kim, M.H. and Miyata, H. (1999). "Fully Nonlinear Free-Surface Simulations By a 3D Viscous Numerical Wave Tank", Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol 29, pp 685-703.

Sussman, M. Smereka, P. and Osher, S. (1994). "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow", J. of Comp. Physics, Vol 114, pp 272-280.

van Leer, B. (1979). "Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's method", J. Comp. Pys., Vol 32, pp 101-136.

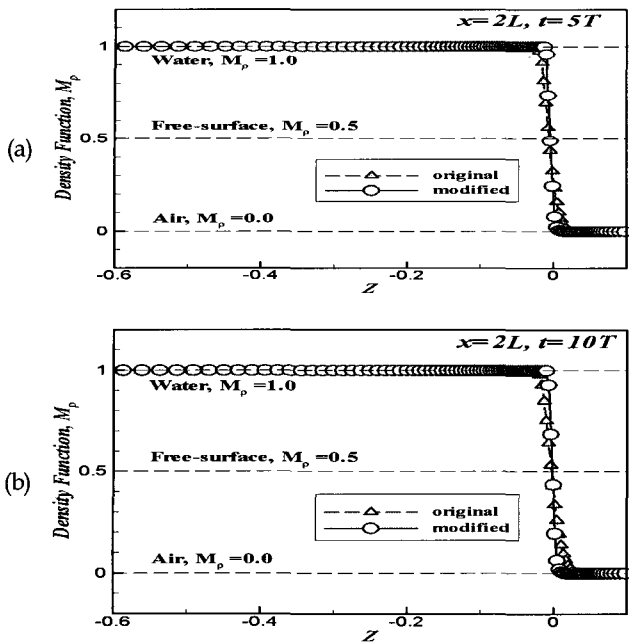


Fig. 12 Vertical distribution of M_p ; (a) $x = 2L, t = 5T$ and (b) $x = 2L, t = 10T$

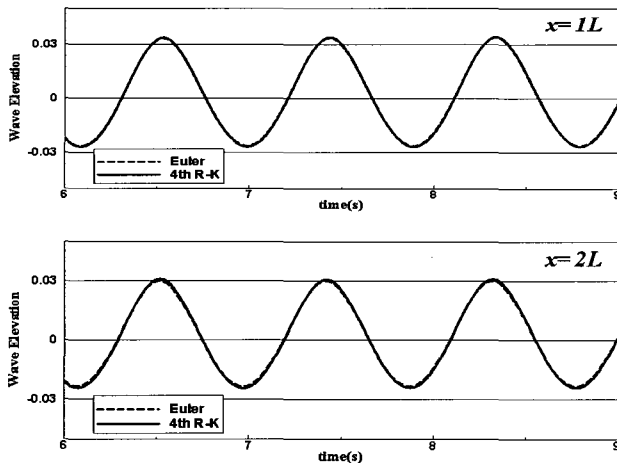


Fig. 13 Comparison of time history of wave elevation between Euler and 4th-order R-K schemes in time, which probed at $x = 1L$ (upper) and $x = 2L$ (lower)

2005년 11월 17일 원고 접수

2006년 8월 11일 최종 수정본 채택