Commun. Korean Math. Soc. **21** (2006), No. 3, pp. 409–417

초청논문

프랙탈과 다중프랙탈의 연구

백인수

요 약. 자연현상의 복잡한 대상의 연구에서 출발한 프랙탈의 연구는 물리학에서 특히 열역학에서의 기법을 활용한 다중프랙탈의 연구로까지 그 영역이 확대 되었다. 이 논문에서는 프랙탈과 다중프랙탈의 여러 가지 성질과 그 응용에 대한 최근 결과를 소개한다.

제 1 절 역사적 배경

과학자는 자연계의 복잡한 현상을 설명하는 도구로서 흔히 혼돈 (chaos) 과 프랙탈 (fractal)을 연상하게 된다. 혼돈에서 일어나는 그 메카니즘은 역학계 (dynamical system)로 설명되며 이러한 역학계에서 발생하는 거의 모든 도형은 프랙탈로 이해하면 되겠다.

프랙탈이란 용어는 1975년 Mandelbrot가 처음으로 사용한 것이다. 프랙탈은 그의 논문 ([10])에서 정수가 아닌 차원 즉 쪼개진 (fractus)이란 라틴어에서 출발한 단어에서 출발한 비정수 (non-integer) 차원의 도형을 의미하는 것으로 쓰여진 것으로 자연계에 존재하는 거의 모든 물체가 여기에 해당하는 것으로 인식되고 있다.

이러한 프랙탈을 설명하는 도구로 여러 가지가 있지만 가장 많이 쓰이는 것으로 하우스도르프 차원이 있다. 이미 항상 정수값을 취하는 위상적 차원 (topological dimension) 값은 그 도형과 위상적으로 같은 도형인 소위 위상동형인 도형들 (homeomorphic images)의 하우스도르프 차원들의 최소값임이 잘 알려져 있다. 따라서 대다수의 학자가 이러한 하우스도르프 차원과 위상적 차원이 다른 도형을 프랙탈로 인식하고 있음을 주목할 필요가 있다. 즉 하우스도르프 차원이 위상적 차원보다 큰 도형을 대체로 프랙탈로 지칭하는데 동의하고 있다.

Received June 9, 2006.

2000 Mathematics Subject Classification: 28A78.

Key words and phrases: 하우스도르프 차원, 패킹 차원, 다중프랙탈, 스펙트럼, 칸토르 집합, 르장드르 변환, 자기상사집합, 자기상사측도, 국소차원, 자기상사차원, 분포집합.

이 논문은 2005년도 부산외국어대학교의 해외파견연구지원에 의해 연구되었음.

그러나 하우스도르프 이후에 많은 유용한 하우스도르프 차원과 유사한 차원들이 등장함에 따라 이러한 용어는 주로 그러한 유사 하우스도르프 차원이 위상적 차원보다 큰 도형을 프랙탈로 지칭하고 있는 형편이다. 이때 그러한 유사 차원을 프랙탈 차원이라 부르고 있다. 하우스도르프 차원 다음으로 가장 널리 쓰이는 차원으로는 패킹 차원 (packing dimension)이 있는데 이것은 1982년 Tricot의 논문 ([18])에서 그 유용성이 지적되었다.

한편 하우스도르프 차원은 1919년 Hausdorff가 주창한 것 ([8])으로 비정수차원을 갖는 하우스도르프 측도의 임계점의 값으로 정의가 됨을 알고 있다. 즉 어떤 실수값에 대해서 그 값보다 작은 차원의 하우스도르프 측도 값이 무한대 값을 갖고 그 값보다 큰 차원의 하우스도르프 측도 값이 0을 갖는다는 사실을 주목하여 그 실수값을 그 도형의 하우스도르프 차원으로 정의하는 것이다.

이러한 시도는 종래의 르베그측도 (Lebesgue measure)를 일반화한 것으로 그 당시에는 크게 주목을 받지 못한 것으로 알려져 있다. 그러나 컴퓨터의 급속한 발달로 말미암아 주어진 복소함수의 역학계에서 안정된 집합 (stable set)에 대한 여집합 (complement)인 불안정 집합 (unstable set)의 연구가 활발하게 진행되었다. 그와 같은 연구는 컴퓨터의 발달 이전인 1918년 Julia에 의해 시도 되었던 바 ([9]) 그 이름을 줄리아 집합으로 연구되고 있다. 이러한 줄리아 집합의 연구에 그러한 복소 역학계를 설명하는 백과사전이라 할 수 있는 만델브로트 집합이 1980년대부터 만델브로트 ([11])에 의해 연구되면서부터 프랙탈의 연구가 활기를 띠게 되었다고 할 수 있다.

제 2 절 프랙탈과 다중프랙탈

프랙탈의 크기를 말하는 차원에 대한 연구는 여러 방향으로 연구되고 있다. 하지만 가장 핵심적인 프랙탈 차원은 하우스도르프 차원과 그 짝 (dual)인 패킹차원이라 할 수 있다. 하우스도르프 차원은 에너지 이론과 밀접한 관련성을 갖고 있어 그 중요성이 인정되고 있으며 패킹차원은 보완작용을 하며 위상적인 크기 (topological magnitude) 즉 그 도형이 제1범주 (first category)에 속하는지 아니면 제 2범주 (second category)에 속하는지에 관여하는 중요한 차원으로 인식되고 있다 ([4]).

그밖에 패킹차원은 그 해상도 (visibility)가 하우스도르프 차원보다 크며 도형의 곱 (product)의 하우스도르프 차원을 계산하는데 매우 중요한 역할을 하게 된다. 즉 두 도형의 곱의 하우스도르프 차원은 둘 중 어느 하나만 그 하우스도르프 차원과 패킹차원의 값이 같으면 그 두 도형의 하우스도르프 차원의 합과 같게 된다는 사실을 주목할 필요가 있다 ([18]).

최근의 연구를 보면 주로 이러한 프랙탈 도형의 하우스도르프 차원값과 패킹 차원값에 대한 연구가 여러 형태의 기술을 통해 계산되고 있음을 알 수 있다. 더 나아가 이러한 도형을 확률론에 연계시켜 소위 무작위 프랙탈 (random fractal)로 그 연구가 확장되고 있음 ([6])을 주목할 필요가 있다. 한편 동일한 차원을 갖는 대상을 보다 엄밀히 구분하기 위해서 기하학적인 구분을 위한 또 다른 차원의 연구로 차원지문 (dimension print)의 연구가 진행된 바 있다 ([16]).

그리고 프랙탈의 본질적인 연구로서 다중프랙탈 (multifractal)의 연구가 최근 들어 가장 큰 화두가 되고 있음은 주지의 사실이다. 다중프랙탈은 물리현상의 하나인 빛의 분광 (spectrum)을 예로 들면 쉽게 이해할 수 있다. 빛을 이해하는 하나의 시도로서 우리는 프리즘 (prism)을 이용한 분광을 들 수 있다. 이때 그 분광은 빛의 파장에 의한 차이로 나타나는 것으로 알려져 있다. 실제로 프랙탈을 이해하기 위해서 어떤 측도를 이용한 국소차원 (local dimension)의 값의 차이에 의한 분광을 볼 수 있다.

한편 국소차원이란 것은 르베그 밀도정리 ([6])를 일반화한 것으로 생각하면 되겠다. 즉 주어진 집합 내의 한 점이 있을 때 그 점을 중심으로 한 작은 구 (ball)의 측도 값이 그 구의 지름의 몇 제곱에 근사한다면 그 몇 제곱에 해당하는 값이 바로 그 점의 그 측도에 대한 국소차원으로 볼 수 있다.

르베그 밀도 정리는 일반적인 n 차원 유클리드 공간내의 주어진 르베그측도가 양인 보렐집합 (Borel set) 내의 거의 모든 점들이 그 n 차원의 르베그측도에 대한 국소차원이 n 이라는 것 (그 점을 중심으로 한 그 집합과 만나는 부분에 해당하는 작은 구 (ball)의 측도 값이 그 구의 지름의 n 제곱의 상수배에 근사한다)을 말한다. 즉 그 점을 둘러싼 구와 그 집합의 교집합이 거의 구의 부피와 같다는 의미로서 국소적으로 그 점 근방은 본질적으로 꽉 찬 근방으로 보아도 무방하다는 의미이다. 즉 그 점 근방은 국소적으로 n차원 유클리드 공간으로 인식해도 좋다는 의미이다. 이것을 확대하면 n 차원 내의 미분가능한 곡선내의 거의 모든 점은 1차원 하우스도르프 측도에 대한 국소차원이 1이고 미분가능한 곡면내의 모든 점은 2차원 하우스도르프 측도에 대한 국소차원이 2임을 알 수 있다. 즉 국소적으로 선적인 요소를 갖느냐 아니면 면적인 요소를 갖느냐 하는 것을 짐작할 수 있게 한다. 이러한 요소들을 각각 나누어서 그 요소들을 갖는 부분들이 얼마나 되는가 하는 것을 연구하는 것이 다중프랙탈의 연구라고도 볼 수 있다. 더 나아가 좋은 조건 (주어진 국소차원에 대응하는 집합이 공집합이 아닌 프랙탈)으로 다중프랙탈을 생성시킬 수 있는 소위 다중프랙탈 측도에 대한 국소차원도 함께 생각할 수도 있다 ([7]).

즉 이때 그 분광된 부분의 차원을 연구하는 것이 바로 다중프랙탈의 연구라고 할 수 있다. 즉 프리즘에 해당하는 것이 바로 다중프랙탈 측도

이며 그 무지개 부분에 해당하는 것이 다중프랙탈이며 무지개 색깔을 결정하는 파장에 해당하는 것이 국소차원이라 할 수 있다. 이때 다중프랙탈 측도라고 언급한 것은 이러한 연구가 극히 제한적으로 이루어지고 있으며 아무 측도나 다 그러한 좋은 결과 즉 차원을 쉽게 발견할 수 있는 다중프랙탈을 생산하지는 못한다는 것을 말하고 있다.

이러한 하우스도르프 차원이나 패킹 차원은 Frostman의 밀도 정리 (density theorem)로부터 그 결과를 쉽게 도출할 수 있음이 알려져 있다 ([6]). 그리고 이러한 밀도정리와 에너지 (energy) 이론은 또한 밀접한 관계가 있음이 이미 알려져 있다 ([6]).

최근 이러한 프랙탈의 가장 기본적인 도형으로서 자기상사 집합 (self-similar set)이 연구되어 왔다. 이 도형은 매우 다루기 쉬우며 그 대표적인 도형이 칸토르 집합 (Cantor set)이다. 그리고 자기상사도형의 프랙탈 차원은 자기상사차원 (self-similarity dimension)으로 매우 쉽게 구할 수 있다.

한편 그 다중프랙탈 측도는 자기상사측도 (self-similar measure)임이 잘 알려져 있다. 즉 이 다중프랙탈의 연구는 1989년 열역학을 이용한 Rand의 아이디어 ([15])에서 출발하여 1992년 Cawley와 Mauldin ([3])에 의해 그 수학적인 모델이 탄생하게 되었으며 이때 그 다중프랙탈 측도로서 자기상사측도가 사용되었다.

자기상사 측도는 주어진 자기상사집합을 분광시킨다. 즉 다중프랙탈 측도로서 자기상사 측도는 그 국소차원 값에 따라 전체 자기상사집합을 분해한다. 각기 동일한 국소차원 값을 가지는 원소로 이루어진 부분집합은 다중프랙탈로서 새로운 하나의 프랙탈 도형이 되는 것이다. 이 프랙탈 도형의 프랙탈 차원을 계산하는 것이 바로 다중프랙탈의 핵심적인 연구가 되는 것이다.

최근 이러한 자기상사도형의 변형인 여러 도형의 연구가 이루어지고 있지만 그 본질적인 연구가 아직 다 완성되지 않았다고 본다. 즉 다중프랙탈 측도로서 가장 간단한 자기상사 측도조차도 그 국소차원 값에 따라 전체 자기상사집합을 분해한다고는 하지만 그 국소차원이 반드시 수렴점 (convergence point)이라고는 할 수 없다. 즉 자기상사 집합 안의 많은 점들이 발산점 (divergence point)으로 나타난다는 사실이 또 다른 연구 분야를 제공하고 있는 것이다.

먼저 이러한 수렴점에 관한 연구를 소개하면 다음과 같다. 먼저 가장 간단한 도형인 자기상사 집합에서 자기상사 측도가 주어질 때 그 국소차원이 수렴점으로 나타나는 경우가 있다. 이러한 동일한 국소차원의 수렴값을 갖는 점들을 생각하면 그 차원을 구하기는 무척 어렵다는 사실을 알 수 있다. 그러나 벌써 그 국소차원이 집합 내에서 사용되었음을 고려한다면 큰 노력을 들이지 않고 그 차원을 구할 수 있음도 알 수 있다. 이러한 시도가 바로 다중프랙탈의 연구 내용의 핵심임을 알 수 있다. Cawley와 Mauldin은 그 대안으로서 새로운 자기상사 측도로의 변

환을 이용하였다. 그리하여 프로스트만의 밀도 정리를 매우 효율적으로 활용하여 그 차원을 얻은 바 있다. 그러한 시도는 열역학에서 중요한 르장드르 변환 (Legendre transform)에서 비롯된 것이다. 이러한 시도는 또한 그 집합의 분포집합과 밀접한 관계가 있음이 최근 밝혀진 바 있다 ([1]). 이것을 살펴보면 다음과 같다.

자기상사 칸토르집합의 원소는 그 원소를 생성하는 각 단계별 좌측 및 우측 기본구간 (fundamental interval)의 구성에서 나오는 string과 일대일로 대응한다. 예를 들면 원소가 첫번째 단계에서 좌측 구간에 속하고 두번째 및 세번째 구간에서 우측구간에 속하게 된다면 그 원소는 string 122...와 일대일로 대응하게 된다. 주어진 $r \in [0,1]$에 대해 string의 첫번째 부터 k번째 까지의 1의 빈도인 $\frac{n_1(x|k)}{k}$의 빈도수열 $(\frac{n_1(x|k)}{k})_{k=1}^{\infty}$의 하극한 (상극한)이 r인 원소들의 모임인 하 (상) 분포집합을 다음과 같이 정의할 수 있다. 즉

$$\underline{F}(r) = \{x \in F : \liminf_{k\to\infty} \frac{n_1(x|k)}{k} = r\},$$

$$\overline{F}(r) = \{x \in F : \limsup_{k\to\infty} \frac{n_1(x|k)}{k} = r\}.$$

이때 $\{\underline{F}(r) : 0 \le r \le 1\}$은 모두 서로소 (disjoint)이며 그 합집합은 원래 자기상사 칸토르 집합이 된다. 마찬가지로 $\{\overline{F}(r) : 0 \le r \le 1\}$ 은 모두 서로소 (disjoint)이며 그 합집합은 원래 자기상사 칸토르 집합이 된다. 한편 $\underline{E}_\alpha^{(p)}$ ($\overline{E}_\alpha^{(p)}$) 을 좌측 기본구간을 p로 주는 자기상사측도인 γ_p의 하국소차원 (상국소차원)이 α인 집합으로 정의하면 즉,

$$\underline{E}_\alpha^{(p)} = \{x : \liminf_{r\to 0} \frac{\log \gamma_p(B_r(x))}{\log r} = \alpha\},$$

$$\overline{E}_\alpha^{(p)} = \{x : \limsup_{r\to 0} \frac{\log \gamma_p(B_r(x))}{\log r} = \alpha\}$$

으로 정의하면 다음과 같은 흥미로운 결과를 유도할 수 있다. 즉 $p \in (0,1)$ 와 $r \in [0,1]$ 에 대해 $g(r,p) = \frac{r \log p + (1-r)\log(1-p)}{r \log a + (1-r)\log b}$ 라고 두면 $a^s + b^s = 1$ 를 만족하는 s에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\underline{F}(r) = \underline{E}_{g(r,p)}^{(p)}$ if $0 < p < a^s$,

(2) $\underline{F}(r) = \overline{E}_{g(r,p)}^{(p)}$ if $a^s < p < 1$,

(3) $\overline{F}(r) = \overline{E}_{g(r,p)}^{(p)}$ if $0 < p < a^s$,

(4) $\overline{F}(r) = \underline{E}_{g(r,p)}^{(p)}$ if $a^s < p < 1$.

이 때 대수의 법칙 (strong law of large numbers)을 이용하면 $\underline{F}(r)$ ($\overline{F}(r)$) 의 차원은 모두 $g(r,r)$임을 알 수 있다.

이와는 별도로 Olsen과 Winter의 결과 ([14])를 살펴보면 약간은 독립적이지만 다른 방향으로 더욱 더 상세한 결과를 알 수 있다. 즉 빈도수열의 하극한이 r_1이고 상극한이 r_2인 점은 그 집적점 (accumulation point) 집합이 $[r_1, r_2]$이 되고 그 점들의 집합의 하우스도르프차원은 $\inf_{r\in[r_1,r_2]} g(r,r)$임을 알 수 있다. 특히 최근의 결과 ([2])를 보면 빈도수열의 하극한이 r_1이고 상극한이 r_2인 점을 모은 집합의 패킹차원이 보다 상세히 연구되고 있음을 알 수 있다. 이 최근 이론은 기존 Baek ([1])의 결과로부터 유추될 수 있음을 알 수 있다. 한편 이러한 다중프랙탈의 연구방향을 자세히 살펴보면 크게 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

물리학자들이 최초에 규정한 거친 (coarse) 다중프랙탈 연구 및 수학적인 배경을 토대로 한 정교한 (fine) 다중프랙탈 연구가 있다. 정교한 다중프랙탈이나 거친 다중프랙탈이나 모두 르장드르 변환을 이용한다는 점에서 공통점을 찾을 수 있다. 그 차이점은 거친 다중프랙탈의 연구는 말 그대로 수학의 측도론을 이용하지 않고 즉 정교한 수학적인 도구 없이 예를 들면 box 차원과 같은 도구를 사용함으로써 다소 거칠게 어떤 점 근방의 주어진 측도의 분포의 불규칙성을 연구한 것이며 정교한 다중프랙탈은 말 그대로 측도론을 토대로 어떤 주어진 측도에 대한 동일한 국소차원을 갖는 부분집합의 차원 연구를 수학적으로 정교하게 이론전개를 한다는 점이 다르다. 하지만 정교한 다중프랙탈의 연구는 거친 다중프랙탈의 연구에서 출발되었다는 점을 주목할 필요가 있다.

한편 르장드르 변환이란 열역학에서 주로 사용되는 용어로서 특히 1차원에서의 르장드르 변환이 쓰인다. 즉 주어진 볼록함수의 르장드르 변환은 그 볼록함수의 접선의 수직좌표축과 만나는 점의 수직좌표 소위 y 절편의 음수 값으로 그 기하학적 의미를 가진다. 보다 엄밀히 말하면 볼록함수 f의 그래프는 거의 모든 점에서 접선을 가지므로 그 접선의 기울기에 해당하는 값을 x로 하고 그 접선의 수직축의 절편에 해당하는 값 b의 반수 $-b$를 $g(y)$로 둔다면 $-g(y) = b = f(x) - yx$ (여기서 $y = f'(x)$)를 얻는다. 즉 우리는 $g(y) = yx - f(x)$ (여기서 $x = f'^{-1}(y)$)를 얻게 되는 것이다. 즉 f의 르장드르 변환 g의 정의인 $f' = (g')^{-1}$의 동치형태인 $f(x) + g(y) = xy$를 얻게 된다. 이와 같은 형태는 열역학에서 아주 중요한 수식으로 서로 다른 열역학의 포텐셜 (potential)들의 변환에 이용된다. 따라서 1989년 이러한 열역학이라는 물리학적 수식에서 출발한 Rand의 논문 ([15]) 즉 거친 다중프랙탈의 연구가 선행되었으며 그러한 르장드르 변환에서 아이디어를 얻어 Cawley와 Mauldin은 1991년 그들의 정교한 다중프랙탈 이론 ([3])을 내어 놓게 된 것이다.

제 3 절 요약

일차원 유클리드 공간에서 선분의 길이를 확장한 일차원 르베그측도에서 출발한 개념은 선분의 확장인 다차원 유클리드 공간에서의 일차원

다양체로 나아가 그 곡선의 길이의 개념이 더욱 확장된다. 이것을 더욱 확장한 것이 일차원 하우스도르프 측도이며 다시 나아가 하우스도르프의 개념으로 일차원인 도형을 정의한다. 이러한 하우스도르프 개념은 그 도형을 덮는 가장 경제적인 덮개 (economical covering)를 사용하므로 그 짝의 개념인 가장 많은 패킹 (maximal packing)을 사용하는 패킹차원을 생산한다. 물론 일차원 하우스도르프 측도나 일차원 패킹측도는 일차원 다양체의 길이와 동일한 값을 제공하므로 그 활용도가 더욱 높다.

이러한 개념의 확장은 더욱더 나아가 르베그 밀도 정리로 나아간다. 르베그 밀도 정리를 바탕으로 하여 다차원 유클리드 공간에서 정칙인 일차원 도형과 비정칙인 일차원 도형과의 성질을 규명하면서 우리는 자연스럽게 Besicovitch 정사영 (projection) 정리를 접하게 된다. 이러한 개념은 기존 Kakeya문제와 깊은 관련을 가지면서 그 연구 영역을 넓히게 된다 ([5]).

가장 널리 연구가 되는 자기상사집합은 2개 이상의 축소함수의 부동집합의 예로서 자기상사 차원과 관련을 갖게 된다. 자기상사차원은 소위 개집합조건 (open set condition)을 전제로 하므로 그 개집합조건의 강화 또는 약화로 인한 많은 연구가 진행되고 있다. 강화 쪽의 연구로는 강집합조건 (strong set condition)이라 불리며 자기상사함수족을 독립변수로 하는 자기상사집합의 하우스도르프 측도값을 연속이 되도록 하는 조건으로 연구되고 있으며 나아가 그 패킹측도값 또한 연속이 되는지에 대해 연구가 되고 있다. 약화 쪽의 연구는 소위 중첩 (overlap)을 갖는 조건으로 그 연구가 상당히 진전되어 있으나 완벽하게는 연구되지 않았다. 따라서 얼마만큼 그 중첩의 조건에 더 강한 조건을 부여하지 않고 차원을 계산하는가에 연구가 집중되고 있으며 이러한 연구 ([13])는 앞서 말한 Besicovitch의 정사영 연구와 그 궤를 함께 하는 것으로 매우 흥미롭다.

한편 이러한 일차원에 관련된 문제는 자연스럽게 이차원 유클리드 공간에서의 도형의 넓이, 이차원 다양체 및 그 곡면의 넓이 그리고 이차원 하우스도르프 차원 측도, 이차원 패킹차원측도를 생각하게 한다. 이와 같은 르베그밀도 정리를 이용한 원리로 정칙 (regular)이나 비정칙 (irregular) 도형을 생각할 수 있고 더욱 복잡한 형태를 띠면서 그 연구 대상으로 자리 잡을 수 있다.

또 다른 한편으로는 이러한 정수 차원을 벗어나 비정수차원의 도형을 생각할 수 있다. 우리가 프랙탈이라고 부르는 진정한 의미의 도형들이다. 실제 주어진 도형의 위상동형인 도형의 하우스도르프 차원 값들의 최소값이 그 도형의 위상차원임을 고려하면 프랙탈은 바로 그러한 도형 중 하우스도르프 차원이 그 위상차원보다 큰 것을 지칭함을 유의할 필요가 있다. 위에서 언급한 다차원 유클리드 공간에서의 곡선의 길이를 고려하면 무한의 길이를 갖는 도형은 하우스도르프 차원이 1 이상

이다. 그리고 곡선의 길이를 0으로 갖는 도형은 하우스도르프 차원이 1 이하인 도형으로 생각하면 되겠다. 즉 프랙탈 차원은 무한을 더욱 세분하며 또한 0을 더욱 세분하는 도구로 이용될 수 있음을 또한 유의한다.

한편 이러한 프랙탈을 소위 다중프랙탈측도라는 새로운 측도를 사용하면 더욱 세분할 수 있는 기회를 제공하는데 이렇게 탄생한 것이 그 프랙탈 내의 부분집합인 프랙탈로서 보통 다중프랙탈로 불린다. 물리학 생물학 화학 등에서 출발한 다중프랙탈 이론은 보통 거친 다중프랙탈 이론이라 불리고 그 첨병 역할을 충실히 했다고 본다. 그리고 최근에는 증권의 분석에도 그 활용 ([17])이 되고 있는 실정이다. 그 후에 열역학을 이용한 정교한 다중프랙탈 이론이 등장하면서 다중프랙탈은 새로운 전기를 마련한다. 그리고 이러한 정교한 다중프랙탈 이론은 곧바로 소수이론의 핵심으로 등장한다. 최근 정규수 (normal number)라는 이름으로 이러한 이론이 활발히 연구되고 있다 ([14]). 이러한 이론은 확률론의 대수의 법칙 및 에르고딕 (ergodic)이론과 깊은 관련을 갖고 있다. 하우스도르프 측도이론은 물리의 에너지 이론과도 깊은 관련을 갖고 있어 그 유용성이 증대되어 왔으며 확률론과 접합되어 삼투 (percolation)이론에도 관련성이 높다. 우리가 잘 알고 있는 2차원 이상의 유클리드 공간에서 브라운운동은 그 차원이 2임이 잘 알려져 있다 ([6]).

어떻게 보면 프랙탈은 Mandelbrot가 컴퓨터를 활용한 복소수공간에서의 2차함수의 역학계를 연구함으로써 그 연구가 활발히 되었다고 본다. 즉 복소함수 $f(z) = z^2 + c$ 에서 c의 값에 따른 줄리아집합의 분류를 한 백과사전이라 할 수 있는 만델브로트집합을 연구함으로써 그 전기가 새로이 마련되었다고 본다. 그러한 줄리아 집합의 가장 간단한 형태는 tent map에 의한 칸토르 집합이다. 이러한 칸토르 집합의 연구 또한 매우 복잡하며 그 연구가 끝나지 않았다고 본다.

앞으로의 연구의 방향은 앞에서 본바와 같이 유의미한 기존 이론과 접합한 미개척 영역에서의 새로운 방향의 모색으로부터 이루어질 것으로 기대된다. 예를 들면 거친 다중프랙탈 이론에만 국한된 다중프랙탈 이론이 열역학에서의 이론을 바탕으로 하여 정교한 다중프랙탈 이론으로의 방향전환으로 인한 새로운 이론의 전개 등을 들 수 있다. 이러한 열역학 이론은 비단 다중프랙탈 뿐만 아니라 비선형 칸토르 집합의 차원 문제에서 압력 (pressure)이론 및 에르고딕 이론과의 관련성으로 그 역할이 증대되고 있다. 또한 기대되는 바로는 기하적 측도이론 (geometric measure theory) 분야에서의 중첩의 연구 ([12]) 내지는 Weirstrass 함수와 같은 미분불능함수의 그래프의 차원 ([6])과 관련된 기존 미해결 문제의 돌파구의 발견으로 이루어질 가능성이 높다.

참고 문헌

[1] I. S. Baek, *Relation between spectral classes of a self-similar Cantor set*, J. Math. Anal. Appl. **292** (2004), no. 1, 294–302.

[2] I. S. Baek, L. Olsen, and N. Snigireva, *Divergence points of self-similar measures and packing dimension*, preprint.
[3] R. Cawley and R. D. Mauldin, *Multifractal decomposition of Moran fractals*, Adv. Math. **92** (1992), 196–236.
[4] G. A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer Verlag, 1990.
[5] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
[6] ———, *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, 1990.
[7] ———, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley and Sons, 1997.
[8] F. Hausdorff, *Dimension und äusress*, Mass. Math. Ann. **79** (1919), 157–179.
[9] G. Julia, *Sur l'itèration des fonctions rationnelles*, J. Math. Pure Appl. **7** (1918), no. 4, 47–245.
[10] B. B. Mandelbrot, *Les Object Fractals: Forme*, Hasard et Dimension, Flammarion, 1975.
[11] ———, *The fractal geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, 1982.
[12] P. M. Mattila, *The geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, 1995.
[13] S. Ngai and Y. Wang, *Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps*, J. London Math. Soc. **63** (2001), no. 2, 655–672.
[14] L. Olsen and S. Winter, *Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures*, J. London Math. Soc. **67** (2003), no. 2, 103–122.
[15] D. Rand, *The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters*, Ergodic Th. Dynam. Sys. **9** (1989), 527–541.
[16] C. A. Rogers, *Dimension prints*, Mathematika **35** (1988), 1–27.
[17] X. Sun, H. Chen, Z. Wu, and Y. Yuan, *Multifractal analysis of Hang Seng index in Hong Kong stock market*, Physica A, Statistical mechanics and its applications **291** (2001), no. 1, 553–562.
[18] C. Tricot, *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Cambridge Philo. Soc. **91** (1982), 54–74.

부산시 남구 우암동 산 55-1
부산외국어대학교 수학과
608-738
E-mail: isbaek@pufs.ac.kr