

점탄성 원통의 모드 I 균열 해석

Numerical Analysis of Viscoelastic Cylinders with Mode I Cracks

심우진*

오근*

Sim, Woo-Jin

Oh, Guen

(논문접수일 : 2005년 11월 11일 ; 심사종료일 : 2006년 7월 21일)

요지

원환균열과 원주균열을 지닌 축대칭 선형 점탄성 증실축과 증공축이 외력을 받을 때 파괴역학 변수로서 응력확대계수, 에너지방출률 그리고 균열개구변위의 수치해를 유한요소해법을 이용하여 구한다. 균열선단에서는 응력의 특이성을 지닌 1/4절점 삼각형 특이요소가 사용된다. 또한 수치해를 비교 검증하기 위해 탄성-점탄성 상응원리를 이용하여 선형파괴역학의 탄성해들로부터 점탄성 이론해가 유도 제시된다. 해석에 사용되는 점탄성 물성은 체적변형은 탄성적이고 전단변형은 표준선형고체처럼 거동한다고 가정한다. 제시된 수치해법과 이론해는 축대칭 점탄성 거동 연구에 중요한 자료가 된다.

핵심용어 : 점탄성 원통, 응력확대계수, 에너지방출률, 균열개구변위, 유한요소법

Abstract

In this paper, the stress intensity factor, energy release rate and crack opening displacement are computed using the finite element method for axisymmetric viscoelastic cylinders with the penny-shaped and circumferential cracks. The triangular elements with quarter point nodes are used to describe the stress singularity around the crack edge. The analytical solutions are also derived by using the elastic-viscoelastic correspondence principle and compared with the numerical results to show the validity and accuracy of the presented method. Viscoelastic materials are assumed to behave elastically in dilatation and like a three-parameter standard linear solid.

Keywords : viscoelastic cylinder, SIF, energy release rate, crack opening displacement, FEM

1. 서론

축대칭 형상을 지닌 점탄성 구조물은 원자력 발전소, 내압 용기, 파이프 등 산업 분야에 널리 존재하며, 그 응용분야가 상당히 넓다.

균열을 지닌 점탄성 구조물에 대한 연구는 국내외적으로 정적, 동적 하중 조건 아래에서 이론적, 실험적, 수치적으로 많은 연구가 이루어져 왔다(Mackerle, 2004; Mesquita 등, 2002; 심우진 등, 2004; 이강용 등, 1998; 이상순, 2001; 2003). 그러나 국내의 경우에 축대칭 점탄성 구조물의 균열해석에 관한 연구는 거의 없다.

본 논문에서는 기 발표된 선형 점탄성 축대칭 구조물의 유한요소해법(심우진 등, 2005)을 바탕으로 모드 I 정적균열(원환균열과 원주균열)을 지닌 선형 점탄성 원통(증실축

과 증공축)의 파괴역학 변수들을 해석한다. LEFM(선형탄성파괴역학)에서처럼, 선형 점탄성 파괴역학 변수들은 응력확대계수, 에너지방출률, J-적분, 균열개구변위 등으로 표현되며, 공학적인 수치해법도 선형 탄성의 경우와 유사하다. 그러나 점탄성 유한요소방정식은 탄성의 경우와는 달리 과거의 절점값들이 현재 절점값 계산에 영향을 미치므로, 시간절점수가 증가함에 따라 많은 계산시간과 메모리가 필요하다. 파괴역학 변수들 중에서 응력확대계수와 균열개구변위는 유한요소방정식의 해인 변위결과로부터 직접 구해지나, 에너지방출률과 J적분은 2차 계산이 추가로 필요하다. 선형 점탄성 균열문제의 이론해는 해당 탄성해에 탄성-점탄성 상응원리를 적용하여 구할 수 있으나, 변위 경계조건이 포함되면 완전한 형태의 수식유도가 어렵다. 다행히도 대부분의 경우에 외력이 경계조건으로 주어지므로 완전 형태의

* 책임저자, 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 교수

전화: 054-478-7371 ; Fax: 054-478-7319

E-mail: wjsim@kumoh.ac.kr

* 금오공과대학교 기계설계공학과 대학원 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

수식유도가 가능하다. 게다가, 외력이 일정하면 선형 점탄성 응력확대계수와 선형 탄성 응력확대계수는 동일한 값을 갖는다. 그러나 점탄성 재료의 파괴역학적 측면에서 볼 때 시간변수적인 파괴역학 변수, 즉, 점탄성 에너지방출률 및 균열개구변위가 더 물리적 의미가 있다. 본 논문에서는 J-적분을 제외한 3가지 파괴역학 변수들을 해석한다. 참고로, 이상순 등(2003)은 경계요소법을 사용하여 2차원 선형 점탄성 모드 I 균열문제의 에너지방출률을 구했다. 수치해석의 예로써는 원환균열 또는 원주균열을 지닌 점탄성 중실축 또는 중공축이 인장하중을 받는 4가지 문제를 취급한다. 균열선단에서는 수치해의 정확도를 높이기 위해 등매개변수 2차원 사변형 유한요소를 변질시킨 1/4절점 삼각형 특이요소를 사용한다. 계산된 수치해와 유도된 이론해들은 서로 비교하여 두 해의 타당성과 정확성을 보인다.

2. 점탄성 에너지방출률 G(t)와 유한요소방정식

점탄성 포텐셜에너지는 탄성 포텐셜에너지에 탄성-점탄성 상응원리를 적용하여 구할 수 있으며, 라플라스 영역에서 다음과 같이 표기된다.

$$\Pi(s) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} s \hat{\sigma}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_i} s \hat{t}_i \hat{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} s \hat{f}_i \hat{u}_i d\Omega \quad (1)$$

여기서, Π 는 점탄성 포텐셜에너지, s 는 라플라스 변수, 그리고 $\hat{\cdot}$ 는 라플라스 변환된 함수이다. 그리고 식 (1)의 등식 우측에서 첫째 항은 라플라스 영역에서의 점탄성 변형 에너지, 나머지 항들은 표면력과 체적력에 의하여 점탄성체에 가해진 일이다.

체적력을 무시할 경우에, 식 (1)은 시간영역에서 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} * \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \bar{t}_i * du_i d\Gamma \quad (2)$$

여기서 *는 Stieltjes convolution(Christensen, 1982)이며, \bar{t}_i 는 Γ_i 상에서의 주어진 표면력이다.

축대칭 점탄성 에너지방출률 $G(t)$ 는 LEFM(Anderson, 1995; Chen, 2000; Owen 등, 1983)에서와 같이 미소 균열길이의 증분에 대한 점탄성 포텐셜에너지의 변화율로 정의된다. 즉,

$$G(t) = - \frac{d\Pi(t)}{da} \approx - \frac{\Delta\Pi(t)}{\Delta a} = - \frac{\Pi_2(t) - \Pi_1(t)}{2\pi r_a(a_2 - a_1)} \quad (3)$$

여기서, $a_2 = a_1 + \Delta a$ 이며 r_a 는 원통의 중심으로부터 균열 선단까지의 반경이다. 점탄성 에너지방출률 $G(t)$ 는 식 (3)에서 보듯이 균열길이가 a_1, a_2 일 때 $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ 를 각각 계산해야 하며, 가능한 가상균열길이의 증분 Δa 를 작게 하면 좋다. 본 논문의 축대칭 해석에서는 Δa 의 적당한 범위로써 $10^{-6} \leq \Delta a \leq 10^{-2}$ 으로 조사되었다. 또한 $\Pi(t)$ 는 식 (2)의 형태보다는 발산정리와 평형방정식을 사용하여 단순화된 다음 식을 이용하여 구한다.

$$\Pi(t) = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \bar{t}_i * du_i d\Gamma \quad (4)$$

표면력(외력)이 일정할 경우, 식 (4)는 탄성의 경우와 형태가 동일하게 되며, 유한요소해석시 행렬식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi(t) = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (5a)$$

$$= - \frac{1}{2} \{F\}^t \{u\} \quad (5b)$$

여기서, $\{F\}$ 는 절점력 벡터이고, 상첨자 t 는 전치행렬, 그리고 $\{u\}$ 는 절점변위 벡터이다.

축대칭 문제의 외력이 $p(r, t) = \sigma_0 H(t)$ 일 경우에 식 (3)의 $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ 는 원통좌표계로써 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= 2\pi \int_{\Gamma_i} p(r, t) v(r, a_1, t) r dr \\ \Pi_2(t) &= 2\pi \int_{\Gamma_i} p(r, t) v(r, a_2, t) r dr \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, v 는 Γ_i 상에서의 y 방향 변위이다.

한편, 선형 점탄성 축대칭 문제를 해석하기 위한 유한요소방정식은 점탄성 포텐셜에너지 식 (2)의 변분식이나 가상일의 원리를 바탕으로 유도될 수 있으며, 그 최종식을 간단히 요약하면 다음과 같다(심우진, 2005).

$$[\bar{K}(\Delta t)] \{u^N\} = \{\bar{F}\} + \sum_{n=1}^{N-1} [\Delta \bar{K}(t)] \{u^n\} \quad (7)$$

여기서, $[\bar{K}(\Delta t)]$ 는 시간증분 Δt 에 따라 일정하며, N 은 현 시간 절점, $\{\bar{F}\}$ 는 외력, 그리고 나머지 합기호항은 과거의 절점변위들이 현재의 절점변위 계산에 미치는 영향력, 즉 이력 계산이다.

3. 선형 점탄성 파괴역학 변수들의 유도

본 해석에서 사용되는 점탄성 재료는 체적변형시 선형적

으로 거동하고 전단변형시 3요소 표준선형고체처럼 거동한다고 가정한다.

$$k(t) = k_0$$

$$\mu(t) = \mu_0 \{ a + (1 - a)e^{-\lambda t} \} \quad (8)$$

여기서, $k(t)$ 는 체적이완함수, $\mu(t)$ 는 전단이완함수, 그리고 k_0, μ_0, a, λ 는 이완함수의 상수계수들이다.

2차원 평면변형률 모드 I 탄성균열 문제에 대한 y방향 변위는 응력확대계수와 다음과 같은 관계를 가지며, 이는 축대칭 원통문제의 모드 I 탄성균열 해석에도 근사적으로 적용될 수 있다고 가정한다(Hilton 등, 1973).

$$v = \frac{K_I}{8\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ (7 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \quad (9)$$

여기서, ν 는 프와송비이다.

식 (9)에 대한 점탄성 이론해는 탄성-점탄성 상응원리를 이용해서 라플라스 변환해를 구한 후에 역변환시키면 된다. 그러나, K_I 가 시간변수이면 점탄성 변위 $v(t)$ 에 대한 완전한 수식을 구하기가 힘들다. 다행히도 선형 탄성이나 선형 점탄성 문제에서 외력이 일정하면 두 경우의 K_I 값이 동일하므로 라플라스 역변환을 통해 $v(t)$ 에 대한 완전한 수식을 구할 수가 있다. 이런 방법으로 선형 점탄성 y-방향 변위와 응력확대계수 사이의 관계식을 유도하면 다음과 같다.

$$v(t) = v_0 [a_1 + a_2 e^{-b_1 t} + a_3 e^{-b_2 t}] K_I \quad (10)$$

여기서,

$$v_0 = \frac{1}{16\mu_0} \sqrt{\frac{2r}{\pi}}$$

$$a_1 = \frac{c_2}{(3k_0 + \mu_0 a) a \lambda}$$

$$a_2 = 2 \left(1 - \frac{1}{a} \right) \left(3 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{3k_0 \lambda (1 - a)} \left\{ \frac{\mu_0 \lambda (a - 1)}{3k_0 + \mu_0} c_1 + \frac{3k_0 (1 - \lambda) + \mu_0 (1 - a \lambda)}{(3k_0 + \mu_0 a) \lambda} c_2 \right\}$$

$$b_1 = a \lambda$$

$$b_2 = \frac{3k_0 + \mu_0 a}{3k_0 + \mu_0} \lambda$$

$$c_1 = 6(3k_0 + 5\mu_0) \sin \frac{\theta}{2} - 2(3k_0 + \mu_0) \sin \frac{3\theta}{2}$$

$$c_2 = 6\lambda(3k_0 + 5\mu_0 a) \sin \frac{\theta}{2} - 2\lambda(3k_0 + \mu_0) \sin \frac{3\theta}{2}$$

또한, LEFM에서 에너지방출률과 응력확대계수 사이의

관계식 $G_I = (1 - \nu^2) K_I^2 / E$ 와 상응원리를 이용해서 선형 점탄성 에너지방출률과 응력확대계수 사이의 관계식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$G_I(t) = G_{I0} \{ a_4 + a_5 e^{-b_3 t} + a_6 e^{-b_4 t} \} K_I^2 \quad (11)$$

여기서,

$$G_{I0} = \frac{1}{4\mu_0(3k_0 + \mu_0)}$$

$$a_4 = \frac{(3k_0 + 4\mu_0 a)(3k_0 + \mu_0)}{a(3k_0 + \mu_0 a)}$$

$$a_5 = (3k_0 + \mu_0) \left(1 - \frac{1}{a} \right)$$

$$a_6 = \frac{3k_0 \lambda (1 - a)}{3k_0 + \mu_0} \left\{ 18k_0 \lambda - \frac{9k_0 \lambda (3k_0 + \mu_0 a)}{3k_0 + \mu_0} - \frac{9k_0 \lambda (3k_0 + \mu_0)}{3k_0 + \mu_0 a} \right\}$$

$$b_3 = a \lambda$$

$$b_4 = - \frac{3k_0 + \mu_0 a}{3k_0 + \mu_0} \lambda$$

한편, 모드 I 균열을 지닌 축대칭 선형 점탄성체에 대한 개구부에서의 균열개구변위 $\delta(t)$ 는 LEFM의 축대칭 모드 I 균열 개구변위식(Tada 등, 2000)과 상응원리를 이용해서 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\delta(t) = \delta_0 \{ a_4 + a_5 e^{-b_3 t} + a_6 e^{-b_4 t} \} \quad (12)$$

여기서, δ_0 는 기하학적 형상에 관련된 상수계수로서 다음의 각 예제에서 정의되며, a_4, a_5, a_6, b_3, b_4 는 물성에 관련된 상수로서 식 (11)에서 주어진다.

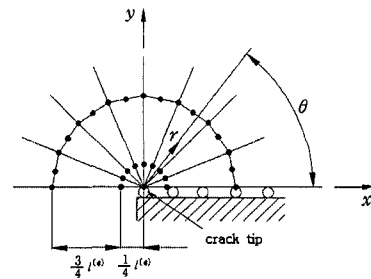


그림 1 균열선단에서의 삼각형 특이요소

4. 수치해석 예

모드 I 정적균열을 지닌 선형 점탄성 원통의 파괴역학 변수들을 해석하기 위해 4가지 예제를 택하여 유한요소해석하고, 그 결과를 유도된 이론해와 서로 비교함으로써 수치결

파의 정확성과 유도된 이론해의 타당성을 보인다. 파괴역학 변수로는 응력확대계수(K_I), 균열개구변위($\delta(t)$), 그리고 에너지방출률($G_I(t)$)을 구한다. 참고로, $t=0$ 에서의 점탄성 해는 탄성해와 같으므로 LEFM의 탄성해는 점탄성 수치결과와의 정확도를 검증하는데 이용될 수 있다.

유한요소메쉬는 등매개변수 2차 사변형요소를 사용하여 분할하였으며, 균열선단에서는 그림 1에서와 같이 응력의 특이성을 지닌 삼각형 특이요소(Barsoum, 1976)를 사용한다. 파괴역학 변수 계산시에, 본 논문에서처럼 균열선단에 특이요소를 사용하면 일반적인 사변형 요소를 사용한 경우보다 적은 요소수로도 안정적이고 더 정확한 수치결과를 얻을 수 있다. 가상의 균열전진 Δa 에 의한 $G_I(t)$ 의 계산시에는 균열선단 주위의 특이요소만을 이동 배치하여 재계산한다. 본 해석에서는 균열선단 주위를 그림 1에서와 같이 8개의 특이요소를 사용하여 분할하고, $\theta = 180^\circ$, $r = 0.001R_0$ (R_0 는 중공축과 중실축의 외경, r 은 특이요소의 1/4절점)에서 구한 y 방향 변위해로부터 응력확대계수를 구한다. 그리고 수치계산에 사용된 점탄성 이완함수의 상수계수들은 $\mu_0 = 480$, $k_0 = 1280$, $\alpha = 0.25$, $\lambda = 0.4$ 로 하고, 무차원 시간증분을 $\Delta t/t_R = 0.1$ 로 하여 수치계산을 수행한다. 여기서, $t_R = (\alpha\lambda)^{-1} = 10$ 은 지연시간이다.

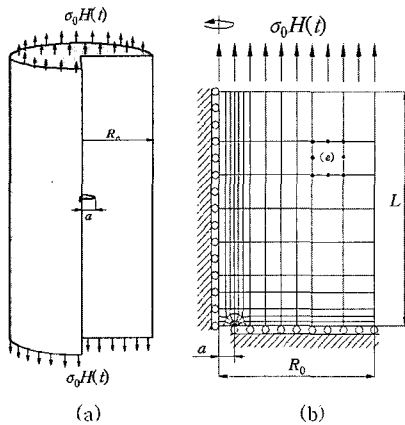


그림 2 (a) 균일한 인장하중을 받으며 중심에서 원환균열을 지닌 점탄성 중실축 (b) 유한요소모델

4.1 원환균열을 지닌 점탄성 중실축

그림 2(a)에서와 같이 내부에 원환균열을 지닌 중실축이 균일한 인장하중 $\sigma_0 H(t)$ 을 받고 있다. 이 문제를 해석하기 위해 그림 2(b)에서와 같이 기하학적 대칭성을 이용하여 1/4 단면만을 고려하여 유한요소모델을 만들고 수치해석을

수행하였다. 이때 해석에 사용된 중실축의 외경은 $R_o = 500$, 길이는 $2L = 1400$ 으로 하였다.

균열길이 a 에 따른 파괴역학 변수들을 계산하기 위해 $a = 50, 100, 150, 200, 250$ 으로 하였다. 중실축인 경우(4.1절, 4.2절)에는 총 152개의 등매개변수 2차 사변형요소를 사용하였다. 그리고 $G_I(t)$ 를 계산하기 위해 가상균열의 크기를 $\Delta a = a_2 - a_1 = 0.002$ 로 하여 수치해석을 수행하였다.

수치결과와의 정확도를 알기 위해서 $t=0$ 에서의 점탄성 응력확대계수(SIF) 및 균열개구변위(COD)에 관한 수치해(식 (7)과 식 (10)사용)와 LEFM의 이론해(Tada 등, 2000)를 비교한 그림을 그림 3과 4에 무차원화시켜 도시하였다. 본 논문의 선형 점탄성 파괴역학 수치해석이 충분히 타당함을 알 수 있다. 그림 3에서 균열길이가 $a/R_o = 0.3, 0.5$ 인 곳에서 약간의 오차가 보이는데 이는 유한요소메쉬를 더 세분화하여 그 오차를 줄일 수가 있다.

그림 5는 원환균열을 지닌 점탄성 중실축의 가상균열에 의한 에너지방출률 수치해(식 (3))를 유도된 점탄성 이론해(식 (11), 이때 K_I 는 이론값)와 비교 도시한 것이다. $t/t_R = 5$ (정상상태)에서의 수치결과들 중에서 $a/R_o = 0.2$ 인 경우에는 0.2%의 최소오차를, $a/R_o = 0.4$ 인 경우에는 0.56%의 최대오차를 보이고 있다.

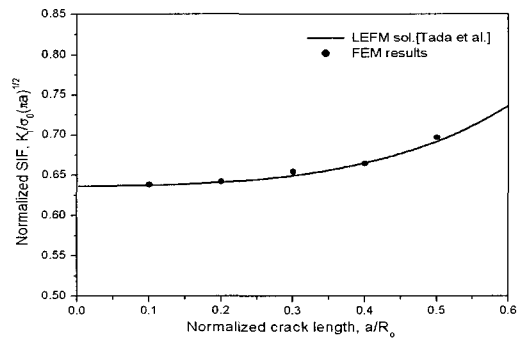


그림 3 원환균열을 지닌 중실축의 $t=0$ 에서 균열길이에 따른 무차원화된 응력확대계수

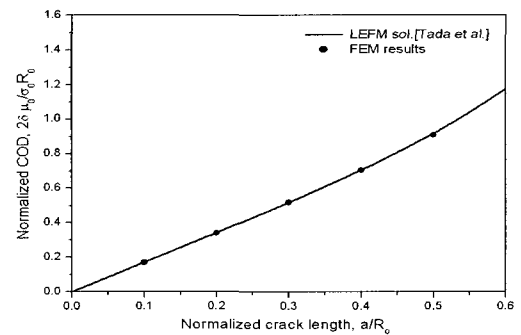


그림 4 원환균열을 지닌 중실축의 $t=0$ 에서 균열길이에 따른 무차원화된 균열개구변위

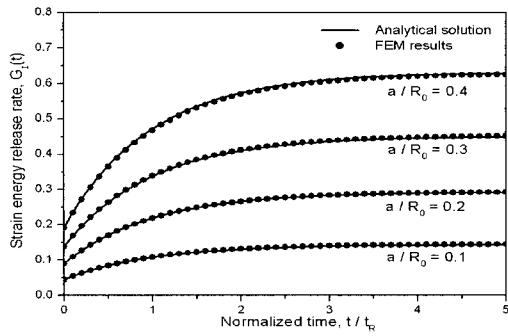


그림 5 원환균열을 지닌 점탄성 중실축의 시간의 경과에 따른 에너지방출률

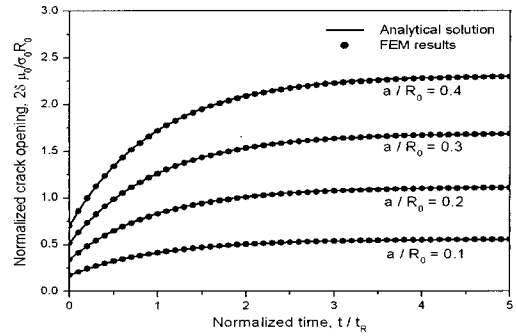


그림 6 원환균열을 지닌 점탄성 중실축의 시간의 경과에 따른 무차원화된 균열개구변위

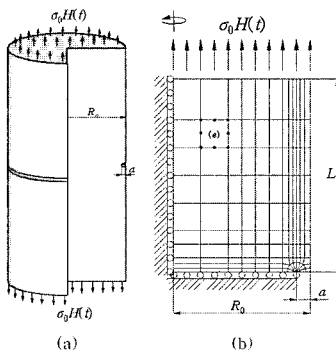


그림 7 (a) 균일한 인장하중을 받으며 표면에서 원주균열을 지닌 점탄성 중실축 (b) 유한요소모델

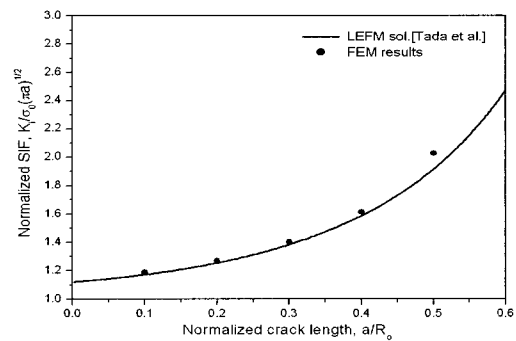


그림 8 원주균열을 지닌 점탄성 중실축의 t=0에서 균열길이에 따른 무차원화된 응력확대계수

그림 6은 내부에 원환균열을 지닌 점탄성 중실축의 축선상의 균열개구변위 수치해(식 (7))를 유도된 점탄성 이론해(식 (12))와 비교 도시한 것이다. $t/t_R=5$ 에서의 균열개구변위 수치해는 이론해와 비교하여 $a/R_0=0.2$ 에서 -0.58% 의 최대오차를, $a/R_0=0.3$ 에서 -0.13% 의 최소오차를 보이고 있다. 여기서 식 (12)의 형상과 관련된 상수계수 δ_0 는 다음과 같다.

$$\delta_0 = \frac{2\sigma_0 a}{\pi\mu_0(3k_0 + \nu_0)} D_1 \left(\frac{a}{R_0} \right) \quad (13)$$

여기서, D_1 은 Tada *et al.*(2000)에서 정의된 변수로써 다음과 같다.

$$D_1 \left(\frac{a}{R_0} \right) = \frac{1}{a/R_0} \ln \left(\frac{1}{1-a/R_0} \right) \times \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a}{R_0} + 0.34 \left(\frac{a}{R_0} \right)^{3.5} \right]$$

4.2 원주균열 지닌 점탄성 중실축

그림 7(a)에서와 같이 표면에 원주균열을 지닌 중실축이

균일한 인장하중 $\sigma_0 H(t)$ 를 받고 있다. 이 문제를 해석하기 위해 그림 7(b)에서와 같은 유한요소모델을 사용하였으며, 이때의 메쉬 형상 그림 7(b)는 그림 2(b)와 중심축에 대해 대칭이다. 또한 점탄성 에너지방출률을 계산하기 위한 가상 균열의 크기도 앞 예제(4.1절)와 동일하게 가정하였다.

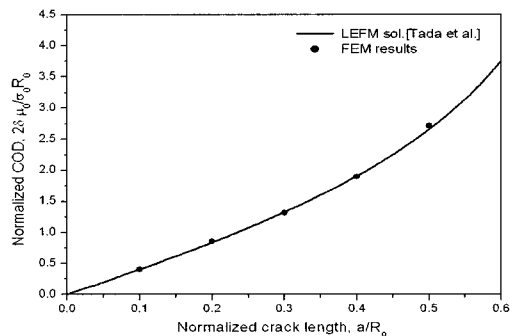


그림 9 원주균열을 지닌 점탄성 중실축의 t=0에서 균열길이에 따른 무차원화된 균열개구변위

수치결과의 정확도를 알기 위해서 $t=0$ 에서의 점탄성 응력확대계수 및 균열개구변위에 관한 수치해(식 (7)과 식 (10)사용)와 LEFM의 이론해(Tada 등, 2000)를 비교한 그림을 그림 8과 9에 무차원화시켜 도시하였다. 그림 8에서

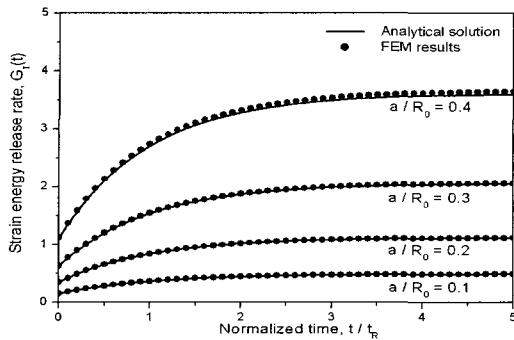


그림 10 원주균열을 지닌 점탄성 중실축의 시간의 경과에 따른 에너지방출률

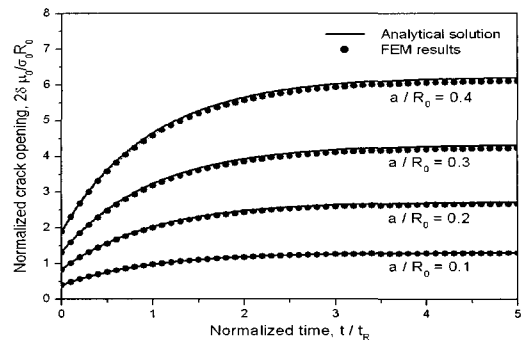


그림 11 원주균열을 지닌 점탄성 중실축의 시간의 경과에 따른 무차원화된 균열개구변위

균열의 길이가 커질수록 응력확대계수 값이 이론해와 점차 벌어지고 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은 점탄성 중실축의 내부에서 요소에 대한 면적적분이 반경의 함수로 주어지게 되므로 중실축의 내부에서 요소분할을 세밀하게 분할해야 되나, 그림 7(b)의 내부에서 세밀하지 못한 메쉬를 사용함으로 인해 생긴 오차로 생각된다.

그림 10은 원주균열을 지닌 점탄성 중실축의 가상 균열에 의한 에너지방출률 수치해(식 (3))를 점탄성 이론해(식 (11))와 비교 도시한 것이다. $t/t_R=5$ (정상상태)에서의 수치결과들 중에서 $a/R_0=0.2$ 인 경우에는 -0.10% 의 최소 오차를, $a/R_0=0.4$ 인 경우에는 -1.29% 의 최대오차를 보이고 있다.

그림 11은 원주균열을 지닌 점탄성 중실축의 표면에서 균열개구변위 수치해(식 (7))를 점탄성 이론해(식 (12))와 비교 도시한 것이다. $t/t_R=5$ 에서의 균열개구변위 수치해는 이론해와 비교하여 $a/R_0=0.1$ 에서 0.77% 의 최소오차를, $a/R_0=0.3$ 에서 1.95% 의 최대오차를 보이고 있다. 여기서 식 (12)의 형상과 관련된 상수계수 δ_0 는 다음과 같다.

$$\delta_0 = \frac{\sigma_0 a}{\mu_0(3k_0 + \mu_0)} D_2 \left(\frac{a}{R_0} \right) \tag{14}$$

여기서, D_2 는 Tada 등(2000)에 주어져 있다. 즉,

$$D_2 \left(\frac{a}{R_0} \right) = \frac{1}{(1 - a/R_0)^2} \times \left[1.454 - 2.49 \frac{a}{R_0} + 1.155 \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 \right]$$

4.3 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 중공축

그림 12(a)에서와 같이 내경에 원주균열을 지닌 점탄성

원통(중공축)이 균일한 인장하중 $\sigma_0 H(t)$ 를 받고 있다. 이 문제를 해석하기 위한 유한요소 메쉬형상은 그림 12(b)와 같으며, 원통의 두께에 대한 길이의 비는 $L/b=4$ ($b=R_o-R_i$)이다.

점탄성 원통해석(4.3절, 4.4절)에서는 총 248개의 등매개변수 2차 사변형요소를 사용하였다. 그리고 점탄성 원통의 외경은 $R_o=1000$ 으로 고정하고, 내외경비를 $R_i/R_o=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ 으로 변화시키면서, 각 경우에 균열이 점탄성 응력확대계수에 끼치는 영향을 조사하기 위해 균열길이의 비 $a/b=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 에 대해 수치해석을 수행하였다. 그리고 점탄성 에너지방출률을 계산하기 위한 가상균열의 크기는 $\Delta a/b=0.00002$ 로 하여 수치해석을 수행하였다.

내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 내경상의 균열개구변위는 점탄성 이론해(식 (12))로 표현될 수 있으며, 이때 형상과 관련된 상수계수 δ_0 는 다음과 같다.

$$\delta_0 = \frac{\sigma_0 a}{\mu_0(3k_0 + \mu_0)} D_3 \left(\frac{a}{b}, \frac{R_i}{R_o} \right) \tag{15}$$

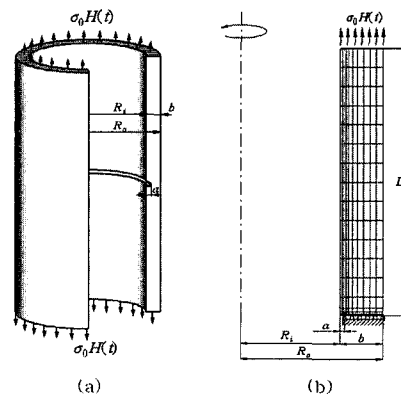


그림 12 (a) 균일한 인장하중을 받으며 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통 (b) 유한요소모델

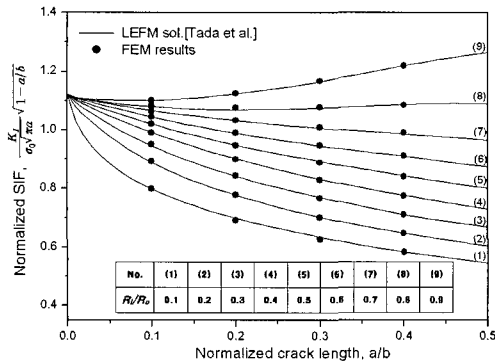


그림 13 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 $t=0$ 에서 균열 길이와 내외경비에 따른 무차원화된 응력확대계수

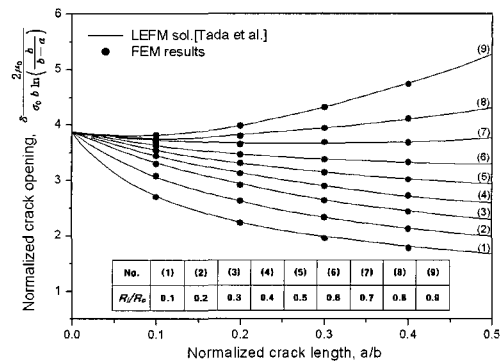


그림 14 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 $t=0$ 에서 균열 길이와 내외경비에 따른 무차원화된 균열개구변위

표 1 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 균열개구변위를 계산하기 위한 형상과 관련된 보정계수

Values of R_i/R_o	$D_3(a/b, R_i/R_o)$			
	$a/b=0.1$	$a/b=0.2$	$a/b=0.3$	$a/b=0.4$
0.1	1.07471	0.93945	0.88604	0.86946
0.2	1.20950	1.09826	1.04117	1.02488
0.3	1.31151	1.22977	1.18059	1.17435
0.4	1.36217	1.31220	1.29271	1.29946
0.5	1.40274	1.38345	1.40351	1.44934
0.6	1.43568	1.45307	1.50885	1.59132
0.7	1.47217	1.53792	1.63669	1.76792
0.8	1.48222	1.60022	1.76014	1.96483
0.9	1.50870	1.66852	1.93001	2.27896

여기서, D_3 는 Tada 등(2000)에 그림으로 주어져 있으나, 표 1과 같이 재정리하였다.

수치결과의 정확도를 알기 위해서, 그림 13과 14에는 $t=0$ 에서 내외경비 (R_i/R_o), 균열길이와 두께의 비 (a/b)에 따른 응력확대계수와 균열개구변위를 무차원화시켜 탄성해 (Tada 등, 2000)와 비교 도시하였다.

그림 13에서 응력확대계수는 원통의 내외경비 $R_i/R_o = 0.8, 0.9$ 를 제외하고는 두께에 대한 균열의 비가 커질수록 감소하고 있음을 알 수 있다. 다시 말해서 원통의 외경에 비해 두께가 얇은 경우(그림에서(8),(9)곡선)에는 균열길이에 의한 파괴의 영향이 증가함을 알 수 있다.

그림 14에서 균열개구변위는 응력확대계수의 결과와 유사한 경향을 보여주고 있다. 즉, 점탄성 원통의 두께가 얇은 경우(그림에서 (8),(9)곡선)에는 두께에 대한 균열길이의

비가 커질수록 균열개구변위가 증가함을 알 수 있다.

그림 15는 내외경비가 $R_i/R_o=0.5$ 인 점탄성 원통의 점탄성 에너지방출률의 수치해(식 (3))와 이론해(식 (11))를 비교 도시한 것으로, $t/t_R=5$ (정상상태)의 수치결과 중에서 $a/R_o=0.3$ 에서 -0.22% 의 최소오차를, $a/R_o=0.2$ 에서 -0.96% 의 최대오차를 보이고 있다.

표 2에는 $R_i/R_o=0.1\sim 0.9$ 각 경우에, 균열길이의 비가 $a/b=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 일 때, $t=0$ 와 $t=\infty$ 에서의 점탄성 에너지방출률의 수치결과와 이론해를 비교한 것이다. 중실축의 내외경비가 일정한 경우에는 균열길이가 클수록 에너지방출률이 커짐을 알 수 있다. 이에 반해 두께에 대한 균열길이의 비가 일정한 경우에는 내외경비에 따른 에너지 방출률의 최대값이 일정하지 않다. 내외경비가 $a/b=0.1, 0.2, 0.3$ 인 경우는 $R_i/R_o=0.2$ 에서, $a/b=0.4$ 인 경우에는 $R_i/R_o=0.3$ 에서 최대값을 가지며 이들 두께보다 더 두꺼워지면 오히려 에너지방출률이 작아짐을 알 수 있다. 표 2에서 수치결과는 이론해와 비교하여 최대 2.95%의 오차를 보이고 있는데, 이는 요소를 세분화함으로써 그 크기를 줄일 수 있다. 대부분의 수치결과는 1%미만의 오차를 보이고 있다.

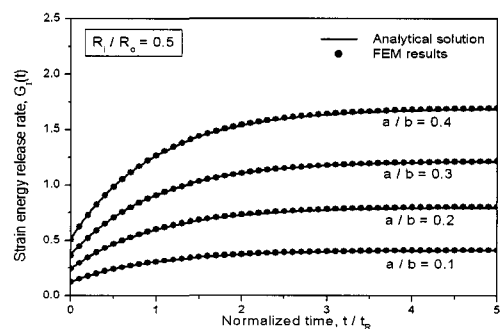


그림 15 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통에서 시간의 경과에 따른 에너지방출률

표 2 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 에너지방출률

Values of R_i/R_o		Energy release rate, $G_I(t)$							
		a/b=0.1		a/b=0.2		a/b=0.3		a/b=0.4	
		$G(0)$	$G(\infty)$	$G(0)$	$G(\infty)$	$G(0)$	$G(\infty)$	$G(0)$	$G(\infty)$
0.1	Anal.	0.139	0.453	0.240	0.781	0.339	1.104	0.446	1.453
	FEM	0.139	0.457	0.234	0.768	0.329	1.075	0.442	1.444
0.2	Anal.	0.154	0.510	0.264	0.867	0.369	1.202	0.488	1.596
	FEM	0.154	0.500	0.263	0.861	0.366	1.202	0.486	1.589
0.3	Anal.	0.152	0.495	0.271	0.882	0.388	1.265	0.515	1.677
	FEM	0.154	0.506	0.271	0.897	0.383	1.266	0.514	1.695
0.4	Anal.	0.143	0.467	0.266	0.866	0.388	1.265	0.527	1.714
	FEM	0.142	0.470	0.263	0.873	0.383	1.270	0.521	1.723
0.5	Anal.	0.126	0.411	0.245	0.799	0.372	1.213	0.518	1.687
	FEM	0.126	0.414	0.243	0.806	0.366	1.216	0.511	1.695
0.6	Anal.	0.106	0.346	0.213	0.705	0.335	1.106	0.481	1.594
	FEM	0.105	0.345	0.213	0.695	0.333	1.091	0.480	1.567
0.7	Anal.	0.083	0.270	0.174	0.568	0.284	0.926	0.424	1.382
	FEM	0.082	0.270	0.174	0.573	0.284	0.941	0.425	1.412
0.8	Anal.	0.057	0.180	0.125	0.407	0.216	0.704	0.344	1.121
	FEM	0.057	0.185	0.126	0.414	0.216	0.716	0.340	1.131
0.9	Anal.	0.029	0.096	0.069	0.225	0.127	0.414	0.216	0.704
	FEM	0.029	0.097	0.069	0.226	0.127	0.418	0.215	0.711

*위 표에서 $G(t) = G_I(t)$ 이다.

표 3 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 무차원 COD값

Values of R_i/R_o		Normalized COD, $2\delta_{\mu_0}/\sigma_0 R_0$							
		a/b=0.1		a/b=0.2		a/b=0.3		a/b=0.4	
		$\delta(0)$	$\delta(\infty)$	$\delta(0)$	$\delta(\infty)$	$\delta(0)$	$\delta(\infty)$	$\delta(0)$	$\delta(\infty)$
0.1	Anal.	0.258	0.840	0.451	1.469	0.638	2.078	0.835	2.719
	FEM	0.254	0.843	0.445	1.467	0.626	2.052	0.818	2.695
0.2	Anal.	0.258	0.841	0.469	1.527	0.666	2.171	0.875	2.849
	FEM	0.259	0.860	0.469	1.559	0.665	2.211	0.869	2.880
0.3	Anal.	0.245	0.796	0.459	1.496	0.661	2.154	0.877	2.856
	FEM	0.243	0.802	0.454	1.509	0.657	2.190	0.871	2.899
0.4	Anal.	0.218	0.710	0.420	1.368	0.621	2.021	0.832	2.709
	FEM	0.217	0.715	0.418	1.386	0.619	2.062	0.834	2.781
0.5	Anal.	0.187	0.609	0.369	1.202	0.561	1.829	0.773	2.518
	FEM	0.186	0.611	0.369	1.218	0.559	1.859	0.770	2.565
0.6	Anal.	0.153	0.499	0.310	1.010	0.483	1.573	0.679	2.212
	FEM	0.152	0.499	0.310	1.019	0.481	1.596	0.679	2.259
0.7	Anal.	0.118	0.384	0.246	0.802	0.393	1.280	0.566	1.843
	FEM	0.116	0.380	0.242	0.796	0.388	1.282	0.563	1.869
0.8	Anal.	0.079	0.258	0.171	0.556	0.282	0.917	0.419	1.365
	FEM	0.079	0.257	0.169	0.553	0.279	0.919	0.420	1.389
0.9	Anal.	0.040	0.131	0.089	0.290	0.154	0.503	0.243	0.792
	FEM	0.040	0.131	0.088	0.289	0.153	0.501	0.242	0.797

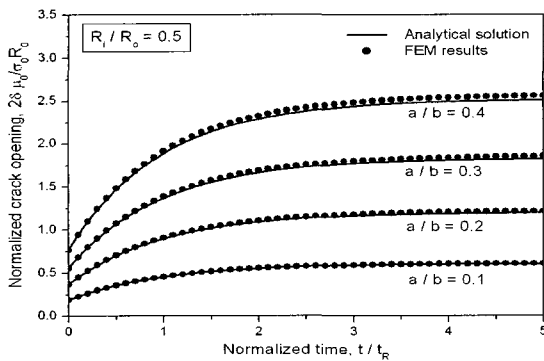


그림 16 내경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통에서 시간의 경과에 따른 무차원화된 균열개구변위

그림 16은 내외경비가 $R_i/R_o = 0.5$ 인 점탄성 원통의 내경에서의 균열개구변위의 수치해와 이론해를 비교 도시한 것으로서, $t/t_R = 5$ 에서의 수치해(식 (7))는 이론해(식 (12))와 비교하여 $a/R_o = 0.1$ 에서 -0.36% 의 최소오차를, $a/R_o = 0.4$ 에서 -1.86% 의 최대오차를 보이고 있다.

표 3에는 내외경비가 $R_i/R_o = 0.1 \sim 0.9$ 인 각 경우에, 균열길이의 비가 $a/b = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 일 때, $t=0$ 와 $t=\infty$ 에서 내경에서의 점탄성 균열개구변위 수치결과와 이론해를 비교하여 나타내었다. 전반적으로 원통의 두께가 두

껍고 균열길이가 클수록 균열개구변위는 커지는데 내외경비가 $a/b = 0.1, 0.2, 0.3$ 인 경우는 $R_i/R_o = 0.2$ 에서, $a/b = 0.4$ 인 경우에는 $R_i/R_o = 0.3$ 에서 최대의 균열개구변위를 가짐을 알 수 있다. 그러나, 두께가 더 두꺼운 $R_i/R_o = 0.1$ 인 점탄성 원통은 $R_i/R_o = 0.2$ 인 경우보다 균열개구변위가 작아지는 결과를 보이고 있다. 표 3에서 수치결과는 이론해와 비교하여 최대 -2.65% 의 오차를 보이고 있는데, 이는 요소를 세분화함으로써 그 크기를 줄일 수 있다. 대부분의 수치결과는 1% 미만의 오차를 보이고 있다.

4.4 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 중공축

그림 17(a)에서와 같이 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통이 균일한 인장하중 $\sigma_0 H(t)$ 를 받고 있다. 이 문제를 해석하기 위해 그림 17(b)와 같은 유한요소모델을 사용하였으며, 이 때의 메쉬 형상은 그림 12(b)와 중심축에 대해 대칭이다. 또한 점탄성 에너지방출률 $G_I(t)$ 를 계산하기 위한 가상균열의 크기도 앞 예제(4.3절)와 동일하게 가정하였다.

외경에서 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 외경상의 균열개구변위는 점탄성 이론해(식 (12))로 표현될 수 있으며, 이때 형상과 관련된 상수 δ_0 는 다음과 같다.

$$\delta_0 = \frac{\sigma_0 a}{\mu_0(3k_0 + \mu_0)} D_4 \left(\frac{a}{b}, \frac{R_i}{R_o} \right) \quad (16)$$

여기서, D_4 는 Tada 등(2000)에 그림으로 주어져 있으나, 표 4와 같이 재 정리하였다.

수치결과와 정확도를 알기 위해서, 그림 18과 19는 $t=0$ 에서 내외경비 (R_i/R_o), 균열길이와 두께의 비 (a/b)에 따른 응력확대계수와 균열개구변위를 무차원화시켜 탄성해 (Tada 등, 2000)와 비교 도시한 것이다.

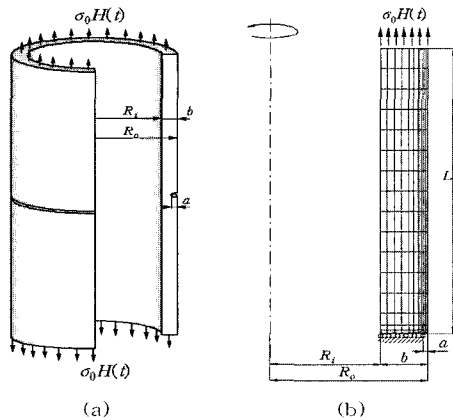


그림 17 (a) 균일한 인장하중을 받으며 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통 (b) 유한요소모델

그림 18에서 무차원화된 응력확대계수는 원통의 내외경비 $R_i/R_o = 0.1 \sim 0.7$ 에서는 균열길이의 변화에 대해 거의 일정한 값을 가짐을 알 수 있으나, 두께가 상대적으로 얇은 $R_i/R_o = 0.9$ 에서는 두께에 대한 균열의 비가 증가함에 따라 서서히 증가함을 알 수 있다. 즉, 원통의 외경에 비해 두께가 아주 얇은 경우는 균열 길이가 파괴에 큰 영향을 끼침을 알 수 있다.

그림 19에서 무차원화된 균열개구변위는 동일한 균열비에 대하여 점탄성 원통의 두께가 얇아수록 증가하며, 두께

에 대한 균열길이의 비가 작을수록 증가하고 있음을 알 수 있다.

그림 20은 내외경비가 $R_i/R_o = 0.5$ 인 점탄성 원통의 점탄성 에너지방출률의 수치해(식 (3))와 이론해(식 (11))를 비교 도시한 것으로서, $t/t_R = 5$ (정상상태)의 수치결과 중에서 $a/R_o = 0.1$ 은 0.35%의 최소오차를, $a/R_o = 0.4$ 은 2.08%의 최대오차를 보이고 있다.

표 5에는 $R_i/R_o = 0.1 \sim 0.9$ 인 각 경우에, 균열길이의 비가 $a/t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 일 때, $t=0$ 와 $t=\infty$ 에서의 점탄성 에너지방출률의 수치결과와 이론해를 비교한 것이다. 전반적으로 중심축의 두께가 두껍고 두께에 대한 균열의 비가 균열길이가 클수록, 점탄성 에너지방출률이 커짐을 알 수 있다. 표 5에서 수치결과는 이론해와 비교하여 최대 3.22%의 오차를 보이고 있는데, 이는 요소를 세분화함으로써 그 크기를 줄일 수 있다. 특히 균열길이에 따른 오차의 비교로부터 $a/b = 0.4$ 에서 매우 큰 오차의 진폭을 보이고 있으나 대부분의 수치결과는 1%미만의 오차를 보이고 있다.

표 4 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 균열개구변위를 계산하기 위한 형상과 관련된 보정계수

Values of R_i/R_o	$D_4(a/b, R_i/R_o)$			
	$a/b=0.1$	$a/b=0.2$	$a/b=0.3$	$a/b=0.4$
0.1	1.50361	1.57607	1.64911	1.75073
0.2	1.49608	1.56753	1.64789	1.74764
0.3	1.50297	1.57279	1.64518	1.73207
0.4	1.50344	1.58376	1.66216	1.76905
0.5	1.49984	1.59836	1.69654	1.81600
0.6	1.50756	1.61201	1.72730	1.87413
0.7	1.50240	1.63545	1.79842	1.98536
0.8	1.50069	1.65104	1.85805	2.14537
0.9	1.50747	1.69474	1.97186	2.36082

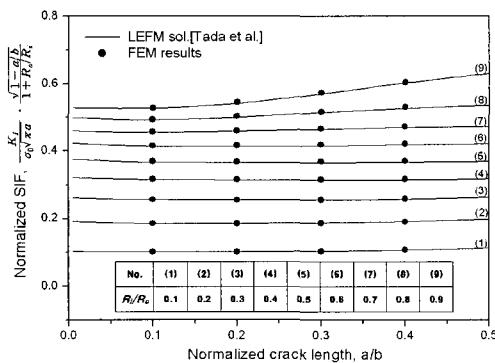


그림 18 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 $t=0$ 에서 균열 길이와 내외경비에 따른 무차원화된 응력확대계수

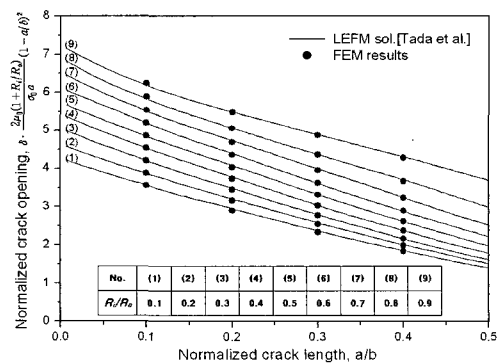


그림 19 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 $t=0$ 에서 균열 길이와 내외경비에 따른 무차원화된 균열개구변위

표 5 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 에너지방출률

Values of R_i/R_o		Energy release rate, $G_I(t)$							
		a/b=0.1		a/b=0.2		a/b=0.3		a/b=0.4	
		G(0)	G(∞)	G(0)	G(∞)	G(0)	G(∞)	G(0)	G(∞)
0.1	Anal.	0.269	0.877	0.611	1.991	1.077	3.508	1.802	5.869
	FEM	0.271	0.876	0.609	1.967	1.079	3.493	1.815	5.897
0.2	Anal.	0.239	0.780	0.540	1.759	0.945	3.079	1.533	4.993
	FEM	0.239	0.774	0.533	1.726	0.928	3.010	1.511	4.926
0.3	Anal.	0.210	0.684	0.467	1.523	0.806	2.625	1.271	4.139
	FEM	0.209	0.675	0.463	1.501	0.797	2.593	1.272	4.161
0.4	Anal.	0.178	0.578	0.396	1.290	0.677	2.205	1.058	3.446
	FEM	0.178	0.577	0.396	1.287	0.680	2.215	1.072	3.515
0.5	Anal.	0.147	0.479	0.328	1.068	0.563	1.833	0.884	2.878
	FEM	0.148	0.481	0.332	1.078	0.570	1.860	0.894	2.940
0.6	Anal.	0.118	0.385	0.265	0.863	0.459	1.494	0.725	2.360
	FEM	0.119	0.385	0.267	0.870	0.464	1.516	0.731	2.405
0.7	Anal.	0.089	0.290	0.203	0.662	0.357	1.163	0.569	1.855
	FEM	0.089	0.289	0.203	0.663	0.358	1.173	0.572	1.886
0.8	Anal.	0.060	0.194	0.138	0.450	0.250	0.815	0.409	1.332
	FEM	0.059	0.193	0.139	0.452	0.251	0.822	0.412	1.356
0.9	Anal.	0.031	0.098	0.071	0.233	0.135	0.441	0.236	0.769
	FEM	0.030	0.097	0.072	0.235	0.138	0.449	0.235	0.775

그림 21은 내외경비가 $R_i/R_o=0.5$ 인 점탄성 원통의 외경에서 균열개구변위를 도시한 것으로서, $t/t_R=5$ 에서의 수치해(식 (7))는 이론해(식 (12))와 비교하여 $a/R_o=0.4$ 에서 -0.016% 의 최소오차를, $a/R_o=0.2$ 에서 1.83% 의 최대오차를 보이고 있다.

표 6에는 내외경비가 $R_i/R_o=0.1\sim 0.9$ 인 각 경우에, 균열길이의 비가 $a/b=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 일 때, $t=0$ 와 $t=\infty$ 에서 원통의 외경에서의 균열개구변위 수치결과와 점탄성 이론해를 비교하여 나타내었다. 전반적으로 중실축의 두께가 두꺼울수록, 그리고 두께에 대한 균열길이의 비가

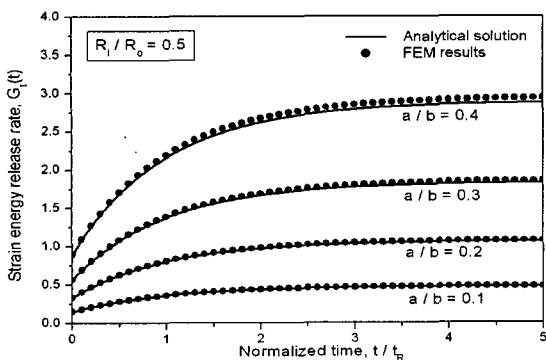


그림 20 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 시간의 경과에 따른 에너지방출률

표 6 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 균열개구변위

Values of R_i/R_o		Normalized COD, $2\delta\mu_0/\sigma_0 R_o$							
		a/b=0.1		a/b=0.2		a/b=0.3		a/b=0.4	
		$\delta(0)$	$\delta(\infty)$	$\delta(0)$	$\delta(\infty)$	$\delta(0)$	$\delta(\infty)$	$\delta(0)$	$\delta(\infty)$
0.1	Anal.	0.361	1.176	0.757	2.464	1.187	3.868	1.681	5.475
	FEM	0.359	1.160	0.741	2.387	1.164	3.747	1.658	5.348
0.2	Anal.	0.319	1.040	0.669	2.179	1.055	3.436	1.491	4.858
	FEM	0.319	1.032	0.660	2.127	1.034	3.338	1.467	4.742
0.3	Anal.	0.281	0.914	0.587	1.913	0.921	3.001	1.293	4.213
	FEM	0.280	0.904	0.580	1.872	0.912	2.949	1.294	4.196
0.4	Anal.	0.241	0.784	0.507	1.651	0.798	2.599	1.132	3.688
	FEM	0.240	0.776	0.500	1.619	0.793	2.568	1.131	3.674
0.5	Anal.	0.200	0.651	0.426	1.388	0.679	2.211	0.969	3.155
	FEM	0.200	0.648	0.421	1.363	0.673	2.184	0.969	3.156
0.6	Anal.	0.161	0.524	0.344	1.120	0.553	1.801	0.800	2.605
	FEM	0.160	0.520	0.340	1.104	0.552	1.793	0.805	2.627
0.7	Anal.	0.120	0.392	0.262	0.852	0.432	1.406	0.635	2.070
	FEM	0.121	0.391	0.259	0.841	0.427	1.390	0.635	2.074
0.8	Anal.	0.080	0.261	0.176	0.574	0.298	0.968	0.458	1.491
	FEM	0.081	0.262	0.176	0.572	0.296	0.966	0.453	1.482
0.9	Anal.	0.040	0.131	0.090	0.294	0.158	0.514	0.252	0.820
	FEM	0.041	0.132	0.090	0.294	0.157	0.513	0.251	0.822

클수록, 균열개구변위는 커짐을 알 수 있다. 표 6에서 보인 수치결과는 이론해와의 비교로부터 최대 2.66% 이하의 오차를 보이고 있다.

5. 결 론

원환균열과 원주균열을 지닌 원통형상의 선형 점탄성 구조물의 파괴역학 변수들(응력확대계수, 에너지방출률 그리고 균열개구변위)의 수치해를 유한요소법을 이용하여 구하고, 탄성-점탄성 상응원리를 이용하여 해석 문제들의 점탄성 이론해를 유도 제시하였다. 균열을 지닌 점탄성 원통의

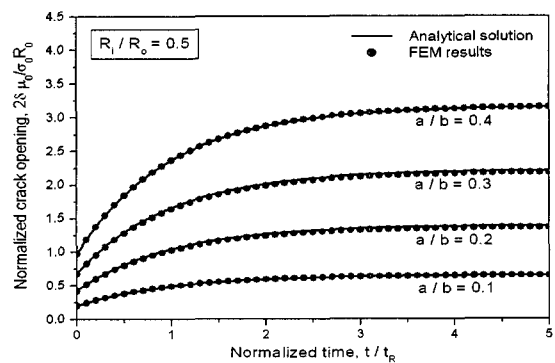


그림 21 외경에 원주균열을 지닌 점탄성 원통의 시간의 경과에 따른 무차원화된 균열개구변위

내외경비 및 두께에 대한 균열의 비가 파괴역학 변수들에 끼치는 영향들을 자세히 조사하였다. 수치해와 이론해를 비교하여 두 해가 서로 일치함을 보임으로써, 본 논문에서 제시된 수치해법과 유도식의 타당성을 보였다. 본 논문의 해석 자료들은 산업계와 교육계에 기본 자료로 활용할 수 있으며, 더 나아가서 축대칭 점탄성 문제들의 동적해석이나 비선형 문제 등으로의 응용 발전이 기대된다.

후 기

본 논문은 금오공과대학교 학술연구비(2005년도)의 지원을 받아 연구하였음.

참 고 문 헌

- 심우진, 오근 (2005), 축대칭 선형 점탄성 구조물의 정적 유한요소해석, 한국전산구조학회논문집, 18(3), pp.321~332.
- 심우진, 이성희 (2004), 충격하중을 받는 점탄성 균열의 응력확대계수 계산, 대한기계학회논문집 A권, 28(10), pp.1583~1589.
- 이강용, 양지혁 (1998), 열하중하에 있는 IC 패키지의 점탄성 파괴해석, 한국정밀공학회지, 15(1), pp.43~50.
- 이상순 (2001), 반도체 칩 접착 계면에 존재하는 모서리 균열 거동에 대한 점탄성 해석, 한국전산구조공학회논문집, 14(3), pp.309~315.
- 이상순, 박명규, 서창민 (2003), 균열이 있는 선형 점탄성체의 변형에너지 방출률 $G(t)$ 에 대한 경계요소해석, 대한기계학회논문집 A권, 27(12), pp.2072~2078.
- Anderson T.L. (1995), *Fracture Mechanics*, 2nd edn., CRC Press, Boca Raton.
- Barsoum R.S. (1976), On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10, pp.25~37.
- Chen Y.Z. (2004), Stress Intensity Factors in a Finite Cracked Cylinder Made of Functionally Graded Materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 81(12), pp.941~947.
- Christensen R.M. (1982), *Theory of Viscoelasticity*, 2nd edn., Academic Press, New York, p.364.
- Hilton P.D., Sih G.C. (1973), Method of Analysis and Solutions of Crack Problems, G.C. Sih(Ed.), *Mechanics of Fracture I: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff, Leyden, pp.426~483.
- Mackerle J. (2004), Creep and Creep Fracture/Damage Finite Element Modelling of Engineering Materials and Structures: Addendum, *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 81, pp.381~392.
- Mesquita A.D., Coda H.B. (2002), Alternative Kelvin Viscoelastic Procedure for Finite Elements, *Applied Mathematical Modelling*, 26(4), pp.501~516.
- Owen D.R.J., Fawkes A.J. (1983), *Engineering Fracture Mechanics*, Pineridge Press, p.305.
- Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. (2000), *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 3rd edn. Professional Engineering Publishing, London, p.660.