

강성등가하중의 정의와 응용

Definition and Application of Equivalent Load for Stiffness

김 치 경*

Kim, Chee-Kyeong

(논문접수일 : 2006년 2월 13일 ; 심사종료일 : 2006년 8월 22일)

요 지

본 연구에서는 요소의 추가 및 제거 또는 부분적인 강성 변경이 있을 때, 이러한 강성 변경이 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 하중으로 표현한 강성등가하중을 제안한다. 강성등가하중에 의한 재해석은 초기 구조물을 대상으로 하므로 이미 계산된 강성행렬 및 역행렬을 다시 사용할 수 있어 재해석 효율을 크게 향상시킬 수 있다. 본 논문에서는 강성등가하중의 개념을 정의하고 간단한 병렬 스프링 구조물을 이용하여 강성등가하중 산정 가능성에 대하여 우선 기술한다. 다음으로 일반적인 골조 구조물에서 강성 변경에 대한 강성등가하중 산정 절차를 제안하고, 마지막으로 몇몇 강성 변경 사례에 대한 강성등가하중 산정 및 해석결과를 제시함으로써 제안된 기법을 검증한다. 강성등가하중은 향후 비선형해석, 구조물 거동 및 응력 제어 등 다양한 문제에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

핵심용어 : 강성등가하중, 정적 응축, 부구조물화, 구조해석

Abstract

This paper presents the equivalent nodal load for the element stiffness which represents the influence of the stiffness change such as the addition of elements, the deletion of elements, and/or the partial change of element stiffness. The reanalysis of structure using the equivalent load improves the efficiency very much because the inverse of the structural stiffness matrix, which needs a large amount of computation to calculate, is reused in the reanalysis. In this paper, the concept of the equivalent load for the element stiffness is described and some numerical examples are provided to verify it.

Keywords : equivalent load for element stiffness, static condensation, substructuring, structural analysis

1. 서 론

강성메트릭스법 또는 유한요소법을 이용한 구조해석 과정은 일반적으로 1) 구조물 강성 행렬의 구성, 2) 가우스 소거법 등을 이용한 강성행렬의 역행렬 계산, 3) 하중벡터 역대입에 의한 변위벡터 계산, 4) 변위벡터를 이용한 부재 응력 계산 등으로 구성된다. 구조물 내 자유도 수를 N 이라 할 때, 이론적으로 가우스 소거 또는 역행렬 계산에는 N^3 의 계산량이 필요하며 구조해석 시 소요 시간의 대부분을 차지하게 된다. 한편 하중벡터 역대입에 의한 변위벡터 계산에는 N^2 의 계산량을 필요로 하고, 강성 행렬의 구성이나 부재 응력 계산의 소요 시간도 역행렬 계산에 비교하면 매우 적다.

특히 비선형해석의 경우 점진적으로 하중을 증가시켜가

며 상기 과정을 반복하게 된다. 이 때 각 하중 단계에서는 각 요소의 응력 변화에 따른 강성 변화를 반영하기 위하여 강성 행렬 구성과 역행렬 계산이 반복되어 많은 해석 시간이 소요되곤 한다.

본 연구에서 제안하는 강성등가하중이란, 요소의 추가 및 삭제 또는 부분적인 강성 변경이 있을 때, 이러한 강성 변경이 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 하중으로 표현한 것이다. 즉 강성 변경 전 구조물에 강성등가하중을 추가하여 해석한 결과는, 강성 변경 후 구조물에 초기 하중만을 재하한 해석 결과와 동일하게 된다. 후자의 경우 강성 변경을 반영하기 위하여 강성행렬 재구성 및 역행렬 재계산이 요구되지만, 전자의 강성등가하중에 의한 재해석은 초기 구조물을 대상으로 하므로 이미 계산된 강성행렬 및 역행렬을

* 책임저자, 정회원 · 선문대학교 건축학부 교수
전화: 041-530-2321 ; Fax: 041-530-2839
E-mail: cckim@sunmoon.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

다시 사용할 수 있다. 여러 가지 이유로 부분적인 강성 변경이 반복되는 경우에도, 이를 강성등가하중으로 치환하여 해석하면, 구조물 강성행렬 구성 및 역행렬 계산이 단 한번만 요구되므로, 강성등가하중이 적은 계산으로 산정될 수 있다면, 획기적인 계산 효율 향상을 쉽게 예상할 수 있다.

본 논문에서는 강성등가하중의 개념을 정의하고 간단한 병렬 스프링 구조물을 이용하여 강성등가하중 산정 가능성에 대하여 우선 기술한다. 다음으로 일반적인 골조 구조물에서 강성 변경에 대한 강성등가하중 산정 절차를 제안하고, 마지막으로 부재 추가 및 삭제, 부재 강성 변경 등 몇몇 강성 변경 사례에 대한 강성등가하중 산정 및 해석결과를 제시함으로써 제안된 기법을 검증한다.

강성등가하중 산정에 필요한 계산량은 이를 활용한 해석 기법의 실용성을 좌우할 것이다. 이는 강성이 변경된 요소와 직접 연결된 절점변위 자유도수와 연관된다. 그러므로 강성 변경이 부분에 국한될 때 강성등가하중에 의한 강성 변경 후 재해석은 전체 구조물에 대한 재해석에 비해 매우 효율적이다.

강성등가하중은 구조해석 분야에서 난제로 알려져 왔던 여러 문제들을 해결 또는 개선하는 한 기법으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 현재 강성등가하중을 이용한 효율적인 비선형해석 기법 개발, 구조물 거동에 대한 단위 요소의 기여도 분석과 거동 제어 등의 연구가 진행 중에 있다.

2. 기본 개념

2.1 정의

메트릭스법 또는 유한요소법에 의한 정적해석에서 평형방정식은 식 (1)로 주어지고, 평형방정식이 구성되면 구조물 강성행렬 K 의 역행렬에 하중벡터 r 을 곱함으로써 변위벡터 u 를 구한다.

$$Ku = r \text{ where } K = \sum_{i=1}^m K^{(i)} \quad (1)$$

$$u = K^{-1}r \quad (2)$$

여기에서,

K : 구조물 강성행렬

$K^{(i)}$: i -번째 부재 강성행렬

m : 부재의 갯수

u : 변위벡터

r : 하중벡터

구조물 강성행렬 K 는 각 부재 강성행렬 $K^{(i)}$ 의 합으로 구성되므로 한 부재라도 추가 또는 삭제되거나 강성에 변

경이 있다면 구조물 강성행렬 구성과 역행렬 계산이 다시 수행되어야 한다. 반면 강성에는 변경이 없고 하중만 변하는 경우에는 이미 구한 구조물 강성행렬의 역행렬 K^{-1} 에 새로운 하중벡터를 곱함으로써 새로운 변위를 적은 계산량으로 구할 수 있다.

강성등가하중이란 각 부재 강성 또는 부분 강성이 구조물의 전체 거동에 미치는 영향을 등가의 절점하중으로 치환한 하중으로 정의된다. 즉 초기 구조물에 부재의 첨삭 또는 기존 부재의 단면 변경에 의한 강성 변화가 발생되어 재해석이 필요할 때, 초기 구조물의 강성행렬을 그대로 사용하되 부분적 강성 변경과 동일한 효과를 갖는 절점하중을 구하여 추가함으로써 구조물 강성행렬의 재구성 및 역행렬 재계산 없이 강성 변경의 영향을 반영할 수 있다.

2.2 강성등가하중 계산 개념

그림 1은 간단한 병렬 스프링 구조물을 통하여 강성등가하중의 기능, 즉 부재 강성을 등가의 효과를 갖는 절점하중으로 치환한 예를 보여준다.

그림 1의 (a)는 1N/mm의 탄성계수를 갖는 A, B 스프링과 2N/mm의 탄성계수를 갖는 C 스프링이 병렬로 연결된 구조물에 24N의 힘이 작용하여 6mm의 수직변위가 발생하고 A, B 스프링에는 6N의 축력이, C 스프링에는 12N의 축력이 발생하는 초기 구조물이다.

그림 1의 (b)는 A 스프링이 절단된 경우로서, 좌측 그림에서 A 스프링에 작용하던 축력이 여타 구조물로 재분배된 결과 B 스프링 8N, C 스프링 16N의 축력이 작용하고, 수직변위도 8mm로 늘어난 상태이다. 한편 우측 그림은 초기 구조물에 8N의 하중을 추가로 작용시킴으로써 A 스프링이 절단된 구조물과 동일한 변형 및 응력 분포를 보여주고 있다. 이 경우 추가로 작용시킨 8N의 힘은 A 스프링 강성에 대한 등가하중으로서, 전체 구조물의 거동에 미치는 A 스프링의 영향을 상쇄시키는 역할을 하였다. 이 때 A 스프링 강성에 대한 등가하중 8N은 표 1에 주어진 바와 같이 각 스프링 강성에 따른 분배율을 이용하여 계산된다.

표 1 삭제 부재에 대한 강성등가하중 계산 예

	A 삭제 부재	B+C 부재
강성	1N/mm	3N/mm
분배율	0.25	0.75
초기 부재응력	6N	18N
재분배 응력	-6N	+6N
강성등가하중	$P \times 0.75 = 6N, \therefore P = 8N$	

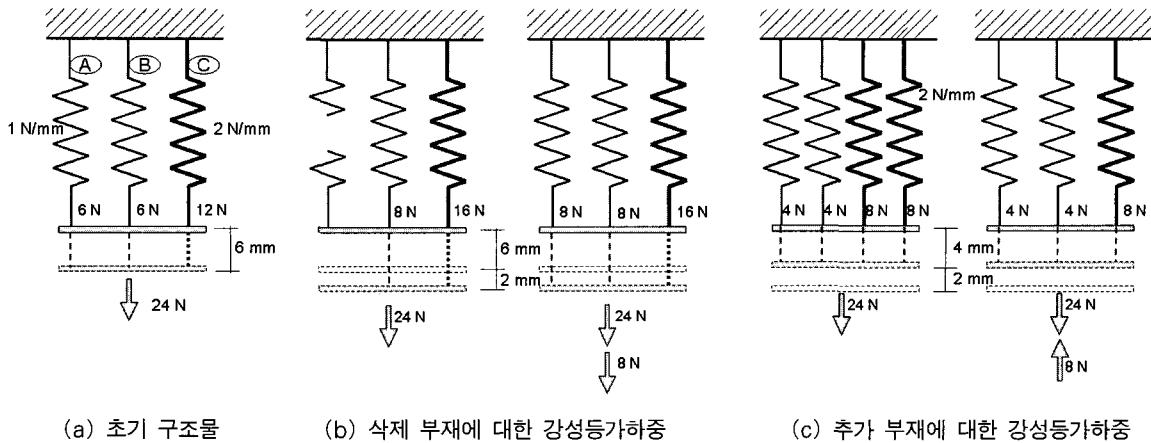


그림 1 스프링 강성에 대한 강성등가하중 산정 예

한편 그림 1(c)의 좌측 그림은 초기 구조물에 강성 2N/mm의 스프링이 추가된 경우이다. 이 경우 A, B, C 스프링에 작용하던 24N의 응력 중 일부가 추가된 스프링에 재분배 된다. 이 상태는 그림 1(c) 우측 그림에서 보듯 초기 구조물에 추가 스프링 강성에 해당하는 강성등가하중 -8N을 추가로 가함으로써 재현된다. 이 때 추가된 스프링 강성에 대한 등가하중 8N은 표 2에 주어진 바와 같이 각 스프링 강성에 따른 분배율을 이용하여 계산된다.

표 2 부재 추가 시 강성등가하중의 계산 예

	A, B, C 부재	추가 부재
강성	4N/mm	2N/mm
분배율	2/3	1/3
초기 부재응력	24N	0
강성등가하중	24×(1/3) = 8N, ∴ P = 8N	
재분배응력	-8N	+8N

이상에서 단자유도 병렬 스프링 구조물을 사용하여 추가 또는 삭제된 부재 강성을 하중으로 치환할 수 있음을 보았다. 부정정구조물의 경우 부재 침식 또는 강성 변경은 해당 부재의 응력 변화를 일으키며 이는 다시 전체 구조물의 응력 재분배로 연결된다. 그러므로 전술한 예에서 보듯 강성 변경 부재의 응력 변화량을 산정하고, 이에 의한 전체 구조물의 응력 재분배를 동일하게 유발할 수 있는 추가하중을 산정함으로써 강성등가하중을 구할 수 있다.

2.3 강성등가하중에 의한 재해석

강성매트릭스법에 의한 구조해석 시 일단 초기 해석에

의하여 구조물 강성행렬 K 와 그 역행렬 K^{-1} 이 한번 구해지면, 이후 부재의 추가, 삭제, 또는 강성 변화에 대한 강성등가하중 Δr 을 계산한 후 식 (3)과 식 (4)에 의하여 강성 변경 후 변위벡터 \tilde{u} 와 부재응력 $\tilde{f}^{(i)}$ 을 각각 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta u &= K^{-1} \Delta r \\ \tilde{u} &= u + \Delta u \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta f^{(i)} &= K^{(i)} \Delta u \quad \text{for unchanged element} \\ &= \tilde{K}^{(i)} \Delta u \quad \text{for changed element} \\ \tilde{f}^{(i)} &= f^{(i)} + \Delta f^{(i)} \end{aligned} \tag{4}$$

여기에서,

- Δr : 강성등가하중 벡터
- Δu : 강성등가하중에 의한 변위벡터
- \tilde{u} : 강성 변경 후 변위벡터
- $K^{(i)}$: i 부재의 초기 부재강성행렬
- $\tilde{K}^{(i)}$: i 부재의 강성 변경 후 부재강성행렬
- $f^{(i)}$: i 부재 초기 응력벡터
- $\Delta f^{(i)}$: 강성등가하중에 의한 i 부재 응력벡터
- $\tilde{f}^{(i)}$: 강성 변경 후 i 부재 응력벡터

이와 같이 강성등가하중을 이용하면 강성 변경 후 구조물 강성행렬 재구성 및 역행렬 재계산 없이 초기 구조물 강성행렬의 역행렬 K^{-1} 를 이용하여 강성 변경 후 거동을 해석할 수 있다.

3. 강성등가하중 계산 상세 알고리즘

단자유도 구조물이 아닌 일반 구조물의 해석에서 강성등

가하중을 계산하기 위해서는 강성 변경 부재의 응력이 우선 계산되어야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 초기 해석 후 부분적 강성 변경이 있을 때 강성 변경 부재의 응력을 효율적으로 계산할 수 있는 적응형 부구조물화 기법을 개발하였다. 본 장에서는 초기해석 결과를 이용하여 구조물 강성행렬을 임의의 잔류자유도만으로 응축할 수 있는 적응형 부구조물화 기법에 대하여 기술하고, 이를 이용하여 강성 변경 부재의 변경 응력을 효율적으로 계산할 수 있는 기법을 제시한다.

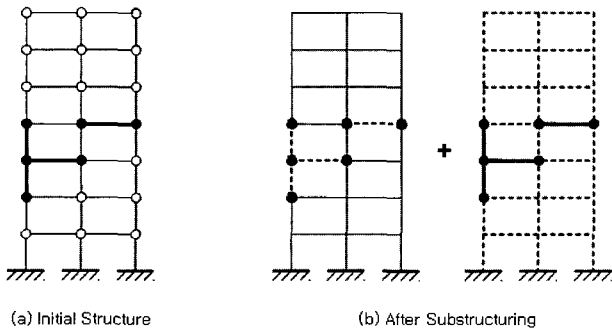


그림 2 강성 변경 부분과 강성 고정 부분의 분리

3.1 적응형 부구조물화 기법

그림 2 (a)에서 초기 구조해석이 완료된 후 일부 부재의 강성이 변경된 경우를 가정하자. 그림에서 굵은 선으로 표시된 부재들은 강성 변경 부재를 의미한다. 한편 구조물 자유도는 그림 2(a)에서 흑색점으로 표시된 강성변경부재가 연결된 잔류자유도와 같은 그림에서 백색점으로 표시된 강성고정부분 내부자유도로 분류된다. 전체 구조물은 그림 2(b)에서 보는 바와 같이 그림 왼쪽의 강성고정부분과 그림 오른쪽의 강성변경부분으로 구분 가능하며, 이 두 부분 구조는 잔류자유도에서 연결된다.

전체 구조물의 강성행렬은 강성고정부분과 강성변경부분의 강성행렬을 결합하여 구성할 수 있다. 이 때 강성고정부분의 강성행렬은 잔류자유도만 남기고 나머지 자유도는 소거한 부구조물로 만든다. 잔류자유도로 응축된 전체 구조물의 평행방정식은 식 (5)로 구성되고, 구조물 강성행렬은 식 (6)에 보는 바와 같이 강성변경부재들의 부재강성행렬의 합 K^c 와 잔류자유도로 응축된 강성고정부분 부구조물의 강성행렬 \bar{K}^a 로 구분할 수 있다.

$$\bar{K}u_a = \bar{r}_a \quad (5)$$

$$\bar{K} = \bar{K}^a + K^c \quad (6)$$

$$K^c = \sum_{i=1}^{M_c} K^{(i)} \quad (7)$$

여기에서,

\bar{K} : 잔류자유도로 응축된 구조물 강성행렬

\bar{K}^a : 잔류자유도로 응축된 강성고정부분 강성행렬

$K^{(i)}$: i 부재의 부재강성행렬

\bar{r}_a : 잔류자유도로 응축된 하중벡터

u_a : 잔류자유도로 구성되는 변위벡터

M_c : 강성 변경 부재 수

식 (5)와 같이 평행방정식을 잔류자유도로 응축시킴으로써 방정식 수를 구조물 자유도 수에서 강성 변경이 발생한 요소가 직접 연결되어 있는 자유도 수로 줄일 수 있다. 이러한 과정이 효율적으로 수행되기 위해서는 잔류자유도로 응축된 강성고정부분의 강성행렬 \bar{K}^a 를 효율적으로 계산할 수 있어야 할 것이다. 다음 절은 \bar{K}^a 를 효율적으로 계산하기 위한 절차에 대하여 기술한다.

3.2 강성고정부분 부구조물 강성행렬 \bar{K}^a

잔류자유도에 대한 유연성행렬 F_{aa} 는 다음 식에 의해 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{aa} \\ F_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{aa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기에서 아래첨자 a 는 잔류자유도를, c 는 소거자유도, 즉 강성고정부분 내부자유도를 의미하고, I_{aa} 는 각 잔류자유도에 단위하중을 갖는 벡터들로 구성된 단위행렬(identity matrix)이다.

강성 변경 전 해석에서 구조물 강성행렬의 역행렬 K^{-1} 이 계산되어 있으므로 잔류자유도에 대한 유연성행렬 F_{aa} 는 역대입만으로 계산할 수 있다.

강성행렬과 유연성행렬은 역행렬관계에 있으므로 잔류자유도에 대한 구조물 강성행렬 \bar{K} 는 다음 식과 같이 식 (8)에서 구한 잔류자유도에 대한 유연성행렬 F_{aa} 의 역행렬로서 구할 수 있으며, 이 식에서 \bar{F} 는 F_{aa} 와 동일하게 잔류자유도에 대한 유연성행렬을 의미한다.

$$\bar{K} = \bar{F}^{-1} = F_{aa}^{-1} \quad (9)$$

이상의 과정을 통하여 구조물 강성행렬을 임의의 잔류자

유도로 응축하여 부구조물화하는 기법을 “적응형 부구조물화 기법”이라 명명하였다. 이 과정은 식 (8)에서 F_{aa} 를 구하기 위한 역대입과 식 (9)에서 F_{aa} 의 역행렬 계산으로 구성된다. 이 두 과정에 소요되는 계산량은 모두 잔류자유도 수, 즉 강성변경부재가 직접 연결된 자유도 수에 관계되며, 강성변경부재 수가 적을수록 재해석 계산량은 획기적으로 감소하게 된다.

식 (9)에 의하여 계산된 \bar{K} 를 식 (6)에 대입하면, 잔류자유도로 응축된 강성고정부분 부구조물의 강성행렬 \bar{K}^u 를 다음 식과 같이 잔류자유도로 응축된 구조물 강성행렬 \bar{K} 에서 강성변경부재의 부재강성행렬을 뺀으로써 구할 수 있다.

$$\bar{K}^u = \bar{K} - K^c \tag{10}$$

3.3 강성변경부재 응력 계산

강성 변경 후 잔류자유도로 응축된 평형방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$(\tilde{K}^c + \bar{K}^u)\tilde{u}_a = \tilde{r}_a \tag{11}$$

$$\tilde{K}^c = \sum_{i=1}^{M_c} \tilde{K}^{(i)} \tag{12}$$

여기에서,

$\tilde{K}^{(i)}$: i 부재의 강성 변경 후 부재강성행렬

\tilde{r}_a : 잔류자유도로 응축된 하중벡터

\tilde{u}_a : 강성변경 후 잔류자유도 변위벡터

잔류자유도로 응축된 하중벡터 \tilde{r}_a 는, 초기해석에서 계산된 잔류자유도에 대한 변위벡터 u_a 와 식 (9)에서 계산된 잔류자유도에 대한 구조물 강성행렬 \bar{K} 를 식 (5)에 대입하여 쉽게 계산할 수 있다.

식 (11)을 이용하여 강성변경 후 잔류자유도에 대한 변위벡터 \tilde{u}_a 는 식 (13)에 의하여 계산할 수 있고, i 번째 강성변경부재의 변경 부재력 $\tilde{f}^{(i)}$ 는 식 (14)에 의하여 계산된다.

$$\tilde{u}_a = (\tilde{K}^c + \bar{K}^u)^{-1}\tilde{r}_a \tag{13}$$

$$\tilde{f}^{(i)} = \tilde{K}^{(i)}\tilde{u}_a, \quad i = 1, \dots, M_c \tag{14}$$

3.4 강성등가하중 계산

그림 3은 강성 변경 전 f^c 의 부재력이 작용하던 부재에 강성 변경이 발생하는 경우 강성등가하중을 산정하는 원리를 보여준다. 이 때 해당 부재에는 강성 변경에 따른 Δf^c 의 부재력 변화가 발생하고 그 연결부에는 작용-반작용 원리에 따라 $-\Delta f^c$ 의 응력이 발생된다. 이러한 상황은 강성 변경 전 구조물의 연결부 절점에 적절한 강성등가하중을 작용시켜 연결부에 $-\Delta f^c$ 의 응력이 분배되도록 함으로써 재현 가능하다. 이 때 강성등가하중이 추가된 강성 변경 전 구조물의 거동은 강성 변경 후 구조물의 거동과 동일하게 된다.

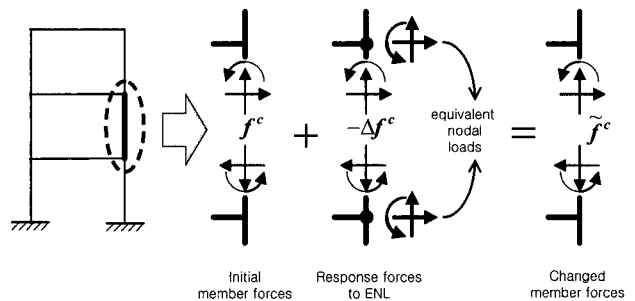


그림 3 강성등가하중 크기 산정 원리

초기해석에서 구한 부재력 $f^{(i)}$ 와 식 (14)로 계산된 강성 변경 후 부재력 $\tilde{f}^{(i)}$ 로 부터 부재력 변화량 벡터 Δf^c 를 계산한다.

$$\Delta f^c = \sum_{i=1}^{M_c} (\tilde{f}^{(i)} - f^{(i)}) \tag{15}$$

변경 전 강성고정부분의 잔류자유도에 Δf^c 의 힘이 추가로 작용되도록 하기 위한 잔류자유도 절점하중 Δr_a 는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\bar{K}^u \bar{F} \Delta r_a = -\Delta f^c \tag{16}$$

$$\Delta r_a = (\bar{K}^u \bar{F})^{-1}(-\Delta f^c) \tag{17}$$

식 (18)에서 보듯, Δr_a 를 변경 전 초기 구조물에 작용시켜 구한 강성고정부분 내부자유도에 대한 변위벡터 Δu_a 는 변경 후 내부자유도에 발생하는 변위 변화량과 동일하고, 변경 후 내부자유도 변위벡터는 식 (19)에 제시된 바와 같이 변경 전 변위벡터와 변경 후 변위 변화량 벡터의 합으로 구해진다.

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\epsilon} \\ K_{\epsilon\alpha} & K_{\epsilon\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{\alpha} \\ \Delta u_{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta r_{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\tilde{u}_{\epsilon} = u_{\epsilon} + \Delta u_{\epsilon} \quad (19)$$

이 과정에서도 초기해석 시 계산된 강성 변경 전 강성행렬의 역행렬을 이용하여 역대입만으로 Δu_{ϵ} 를 계산할 수 있다.

4. 해석에

2장에서 단자유도 병렬 스프링 구조물을 이용하여 부재 삭제 또는 추가에 대한 강성등가하중을 구하고 재해석함으로써 강성등가하중의 개념과 가능성을 제시한 바 있다. 본 장에서는 그림 4에 제시된 보다 일반적인 구조물을 대상으로 다음과 같은 경우에 대한 강성등가하중 산정 및 해석을 통하여 제시된 해석기법을 검증하고, 효율성을 검토한다.

- 1) 부재 전체 강성에 대한 강성등가하중
- 2) 부재 휨강성에 대한 강성등가하중
- 3) 추가된 경우 강성등가하중

4.1 삭제된 부재의 강성등가하중과 재해석

본 예제에서는 그림 4 건물의 4번 부재(2층 좌측 기둥)에 대한 강성등가하중을 산정하고, 이를 이용하여 해당 기둥이 제거된 경우 해석을 실시한다.

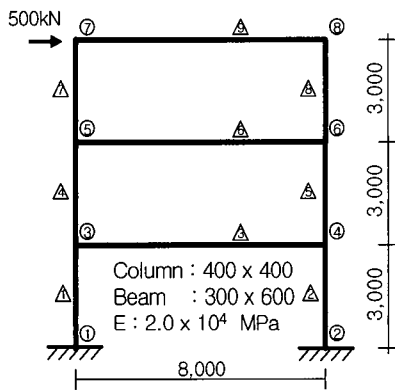


그림 4 예제 건물

이 경우 4번 기둥은 3번과 5번 절점의 6개 자유도에 연결된다. 표 3은 식 (8)에 의하여 계산된 잔류자유도에 대한 구조물 유연성행렬 \bar{F} 이다. 전술한 바 대로 이는 초기행렬에서 구한 구조물 강성행렬의 역행렬을 이용하여, 역대입만으로 계산할 수 있다. 식 (9)에 의하여 \bar{F} 의 역행렬을 구하면 이

는 잔류자유도로 응축된 구조물 강성행렬 \bar{K} (표 4 각 셀 1열)이다. 한편 4번 기둥이 제거된 후의 강성행렬 \bar{K}^* (표 4 각 셀의 3열)는 식 (10)에 의하여 응축강성행렬 \bar{K} 에서 4번 기둥의 요소강성행렬(표 4 각 셀의 2열)을 뺀으로써 계산된다.

표 3 잔류자유도로 응축된 유연성행렬 \bar{F} ($\times 10^{-7}$)

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	5-X	5-Y	5-R
3-X	374.6	1.5	-70.4	488.9	1.7	-8.4
3-Y	1.5	9.4	-1.0	4.8	9.4	-1.2
3-R	-70.4	-1.0	84.1	-150.9	-1.2	-1.7
5-X	488.9	4.8	-150.9	1119.9	6.7	-91.4
5-Y	1.7	9.4	-1.2	6.7	18.7	-2.2
5-R	-8.4	-1.2	-1.7	-91.4	-2.2	88.3

표 4 강성행렬 ($\times 10^3$)
 1) 1열 : 초기구조물 응축강성행렬
 2) 2열 : 4번기둥 요소 강성행렬
 3) 3열 : 4번기둥 삭제 후 응축강성행렬

DOF	DOF					
	3-X	3-Y	3-R	5-X	5-Y	5-R
3-X	67.2 ¹⁾	-0.4	-1.0	-31.6	2.2	-26.3
	18.9 ²⁾	0.0	-28.4	-18.9	0.0	-28.4
	48.2 ³⁾	-0.4	27.4	-12.7	2.2	2.1
3-Y	-0.4	2135.2	8.4	-1.4	-1066.5	0.1
	0.0	1066.7	0.0	0.0	-1066.7	0.0
	-0.4	1068.6	8.4	-1.4	0.1	0.1
3-R	-1.0	8.4	163.0	24.7	0.4	28.7
	-28.4	0.0	56.8	28.4	0.0	28.4
	27.4	8.4	106.2	-3.7	0.4	0.3
5-X	-31.6	-1.4	24.7	28.3	-1.9	26.6
	-18.9	0.0	28.4	18.9	0.0	28.4
	-12.7	-1.4	-3.7	9.3	-1.9	-1.8
5-Y	2.2	-1066.5	0.4	-1.9	1068.6	10.8
	0.0	-1066.7	0.0	0.0	1066.7	0.0
	2.2	0.1	0.4	-1.9	1.9	10.8
5-R	-26.3	0.1	28.7	26.6	10.8	139.2
	-28.4	0.0	28.4	28.4	0.0	56.8
	2.1	0.1	0.3	-1.8	10.8	82.4

표 5 4번 기둥의 초기 부재력과 강성등가하중 (kN)

f^c	-249.1	-278.9	383.8	249.1	278.9	363.5
Δr_{α}	-986.632	-1791634	4536.488	986.632	1791634	-1576.59

제거된 부재의 변경 후 부재력은 0이므로, 변경 후 부재력을 구하기 위한 식 (11)에서 (14)에 이르는 과정은 생략할 수 있다. 즉 초기해석 시 계산된 4번 기둥 부재력 전체가 식 (15)에서 계산되는 부재력 변화량 $-\Delta r_{\alpha}$ 이고, 이를 식 (17)에 대입하여 4번 기둥 부재에 대한 강성등가하중 Δr_{α} 가 계산된다. 표 5에 초기부재력과 강성등가하중이 제시되어 있다.

식 (18) 및 (19)에 의하여, 이상에서 구한 4번 기둥 부재에 대한 강성등가하중을 추가한 후 초기해석 시 계산된

강성행렬의 역행렬에 역대입만하면 4번 기둥이 제거된 구조물의 해석 결과를 얻을 수 있다. 그림 5에서 10은 4번 기둥을 제거한 구조물과 초기구조물에 강성등가하중을 추가한 구조물의 하중조건과 해석결과를 비교한 것으로서 그 결과는 수치연산 오차 이외에는 완전히 동일함을 확인할 수 있었다. 다만 강성등가하중을 이용한 해석 시 제거된 4번 기둥에 부재력이 발생하였으나 이는 무시할 수 있다.

4.2 부재 휨강성에 대한 강성등가하중

본 예제에서는 4번 기둥(2층 좌측 기둥) 휨강성에 대한 강성등가하중을 산정하고, 초기 구조물에 이를 작용시켜 기둥 상하단에 소성힌지가 발생하여 휨강성이 상실된 상태를 재현, 해석한다.

식 (8)에서 식 (10)에 이르는 과정은 앞 예와 동일하며,

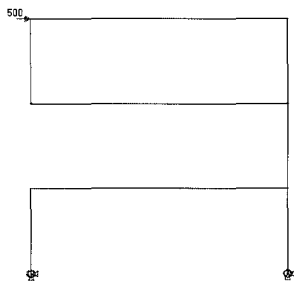


그림 5 4번기둥 삭제 예

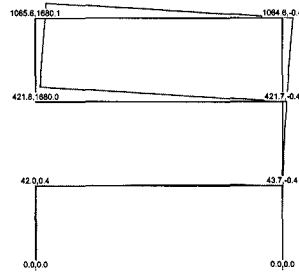


그림 6 변형도

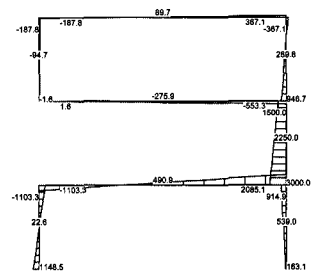


그림 7 휨모멘트도

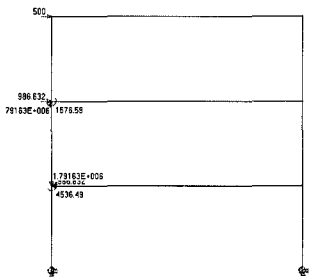


그림 8 4번기둥 강성등가하중

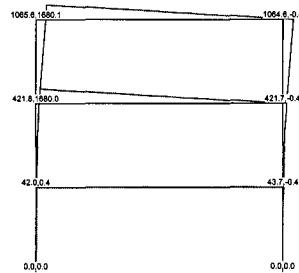


그림 9 변형도

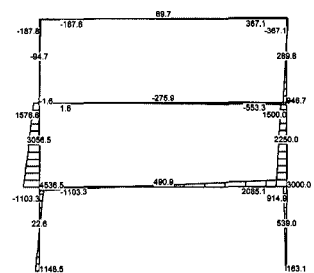


그림 10 휨모멘트도

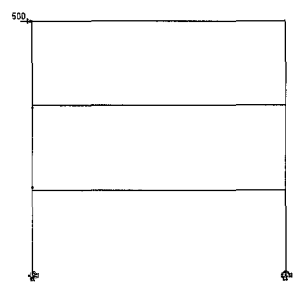


그림 11 4번기둥 소성힌지 발생 예

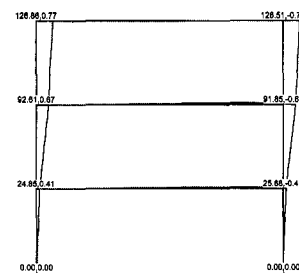


그림 12 변형도

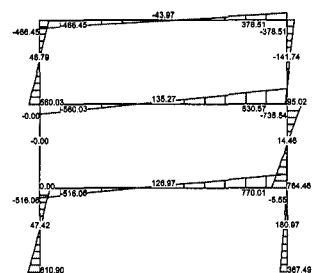


그림 13 휨모멘트도

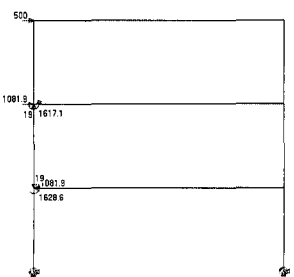


그림 14 4번기둥 휨강성 강성등가하중

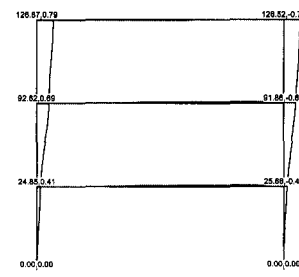


그림 15 변형도

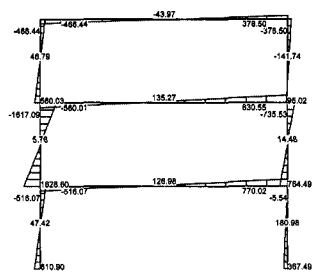


그림 16 휨모멘트도

주요 계산 결과는 표 3과 4에 제시된 바 있다. 휨강성 상실 후 4번 기둥의 요소 강성행렬은 축강성만 갖는 트리스 요소와 같으며, 식 (11)에 제시된 대로 4번 기둥 삭제 후 응축 강성행렬 \bar{k}^* 에 새로운 요소 강성행렬을 더하면 휨강성 상실 후 잔류자유도로 응축된 구조물 강성행렬이 구성된다. 이후 식 (13)~(15), (17)을 이용하여 휨강성 상실 후 잔류자유도 변위벡터 \tilde{u}_n , 4번 기둥의 변경 부재력 $\tilde{f}^{(4)}$, 부재력 변화량 Δf^e , 그리고 4번 기둥 휨강성에 대한 강성등가하중 Δr_n 을 계산할 수 있으며, 표 6에 이들 값들이 제시되어 있다.

표 6 4번 기둥 휨강성 상실 후 주요 해석 값

DOF	3-X	3-Y	3-R	5-X	5-Y	5-R
\tilde{u}_n ($\times 10^{-3}$ mm)	24.845	0.413	-3.339	92.614	0.675	-3.743
$\tilde{f}^{(4)}$ (kN)	0	-279.4	0	0	279.4	0
Δf^e (kN)	-249.12	0.55	383.80	249.12	-0.55	363.54
Δr_n (kN)	-1081.9	-19.0	1628.6	1081.9	19.0	1617.1

그림 11에서 16은 4번 기둥 상하단에 소성힌지가 발생한 구조물과 초기구조물에 강성등가하중을 추가한 구조물의 하중조건과 해석결과를 비교한 것으로 전 예와 마찬가지로 두 해석이 동일한 거동을 보여준다. 또한 4번 기둥의 부재력은 전 단계에서 식 (14)에 의해 이미 계산된 바 있으며, 강성등가하중에 의한 해석에서 구한 부재력은 무시할 수 있다.

4.3 추가된 부재의 강성등가하중과 재해석

본 절에서는 초기 해석 후 추가된 부재의 강성등가하중을 산정하고 재해석한다. 본 예는 그림 4의 골조 2층에 그림 17에서 보듯 단면 크기 200×200의 가새가 추가된 골조이다. 이 경우 잔류자유도는 총 4개로서 3번 및 6번 절점의 X, Y방향 변위 자유도이다.

식 (8)에 의하여 잔류자유도에 대한 구조물 유연성행렬 \bar{F} 를 계산하고, 식 (9)에 의하여 \bar{F} 의 역행렬을 구하면 잔류

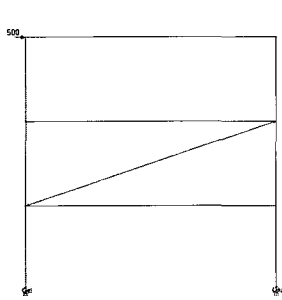


그림 17 가새 추가 예

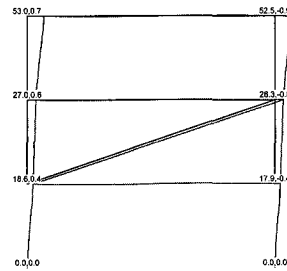


그림 18 변형도

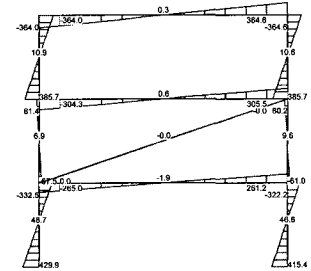


그림 19 휨모멘트도

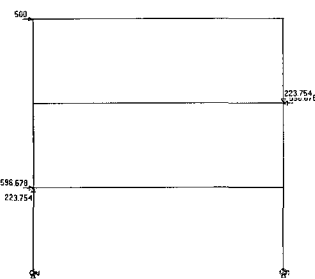


그림 20 추가 가새 강성등가하중

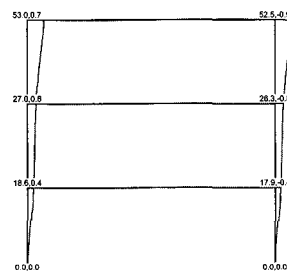


그림 21 변형도

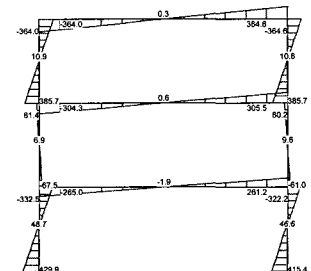


그림 22 휨모멘트도

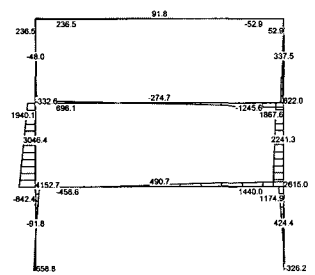


그림 23 강성등가하중 응력기여도 1

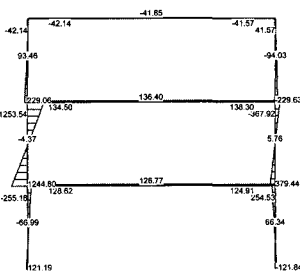


그림 23 강성등가하중 응력기여도 3

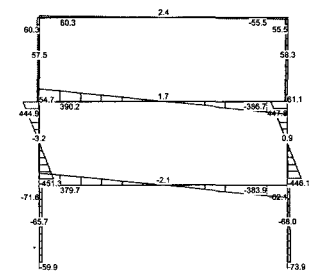


그림 25 강성등가하중 응력기여도 3

자유도로 응축된 구조물 강성행렬 \bar{K} 가 계산된다. 부재 추가의 경우 초기 구조물에서 삭제되거나 강성이 변경된 부재가 없으므로 식 (10)에 의하여 계산되는 강성고정부분 부구조물의 강성행렬 \bar{k}^* 는 곧 \bar{K} 이다. 여기에 식 (11)에 의하여 추가된 가새 부재의 요소 강성행렬을 더하여 부재 추가 후 응축된 구조물 강성행렬을 구성하고 해석하면 식 (14)에 의하여 추가 부재의 부재력을 구할 수 있다. 이 경우 추가된 부재의 초기 부재력은 0이라 할 수 있으므로 식 (15)로 구하는 부재력 변화량 Δr^* 은 곧 추가 부재의 부재력이 되고, 전술한 바대로 \bar{k}^* 와 \bar{K} 가 동일하고 \bar{K} 는 \bar{F} 의 역행렬이므로 식 (17)에 의해 $-\Delta r^*$ 가 곧 강성등가하중 Δr_e 가 된다.

표 7 잔류자유도로 응축된 유연성행렬 $\bar{F} (\times 10^{-7})$

DOF DOF	3-X	3-Y	6-X	6-Y
3-X	374.6	1.5	488.7	-1.7
3-Y	1.5	9.4	4.8	0.0
6-X	488.7	4.8	1119.9	-6.7
6-Y	-1.7	0.0	-6.7	18.7

표 8 강성행렬 $\bar{K} (\times 10^3)$

3-X	62.0	3.7	-27.1	-4.0
3-Y	3.7	1069.6	-6.2	-2.1
6-X	-27.1	-6.2	20.8	5.0
6-Y	-4.0	-2.1	5.0	535.0

표 9 강성등가하중 (kN)

Δr_e	596.7	223.8	-596.7	-223.8
--------------	-------	-------	--------	--------

이상의 과정에서 표 7은 잔류자유도에 대한 구조물 유연성행렬 \bar{F} , 표 8은 잔류자유도로 응축된 구조물 강성행렬 \bar{K} (\bar{k}^* 와 동일)이고, 표 9는 추가된 가새 부재에 대한 강성등가하중 Δr_e ($-\Delta r^*$ 과 동일)이다. 한편 그림 17에서 22는 가새 부재가 추가된 구조물과 초기구조물에 강성등가하중을 추가한 구조물의 하중조건과 해석결과를 비교한 것이다.

4.4 강성등가하중의 응력기여도

그림 23, 24, 25는 앞의 3개 예에서 구한 각각의 강성등가하중에 의하여 초기 구조물에 발생하는 휨모멘트 분포를 그린 것이다. 이는 해당 강성등가하중에 대응하는 부재 또는 부재 강성이 전체 구조물의 휨모멘트 응력 분포에 미치는 영향이라 할 수 있다. 이와 같이 강성등가하중을 이용

하여 각 부재 또는 부분 강성이 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 분석함으로써 보다 정량적으로 구조물의 거동이나 응력 분포를 제어할 수 있을 것으로 기대된다.

5. 결 론

본 연구를 통한 결론을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 구조물을 구성하는 강성 일부를 하중으로 표현한 강성등가하중을 제안하였다.
- 2) 부재의 추가, 제거, 강성 변경 등 초기 해석 후 부분 변경이 있을 때, 이러한 강성 변경을 강성등가하중으로 치환하면 전체 구조물을 재해석하지 않고 초기 구조물을 대상으로 강성 변경 후 해석을 수행할 수 있으며, 이 과정에서 초기 해석 시 계산된 강성행렬의 역행렬을 사용함으로써 계산 효율을 크게 향상시킨다.
- 3) 강성등가하중에 의한 재해석은 강성 변경 요소의 수가 적을수록 효율적이다.
- 4) 강성등가하중에 의한 해석은 계산과정에서의 수치 오차 이외에는 근사화가 없는, 전체 구조물에 대한 재해석과 동일한 결과를 갖는 정해법이다.
- 5) 강성등가하중은 재료비선형해석, 구조물 거동 및 응력 분포 제어 등 다양한 구조해석 및 설계 문제에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 김치경 (2004), 부분적 강성 변화에 따른 효율적 부분 재해석 알고리즘, 한국전산구조공학회 논문집, 17(4), pp.459~467.
- 박효선, 서지현 (2004), 부재력 특성을 고려한 설계변수를 사용한 고층건물 변위조절설계법 개발, 한국전산구조공학회 논문집, 17(2), pp.215~222.
- 서지현, 박효선 (2004), 횡하중과 연직하중을 받는 고층건물의 변위설계를 위한 재분배기법 개발, 한국전산구조공학회 논문집, 17(1), pp.49~58.
- 이한주, 김치경, 김호수 (2002), 횡강성 영향행렬을 이용한 고층건물의 횡변위 제어 및 단면 재산정 방안, 한국전산구조공학회 논문집, 16(2), pp.271~279.
- Bathe, K.J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Chen, H., Archer, G.C. (2005), New Domain Decomposition Algorithm for Nonlinear Substructures, *J. of Computing in Civil Engineering*

ASCE, 19(2), pp.148~159.

Fafitis, A., Nonlinear Truss Analysis by One Matrix Inversion, *J of Structural Engineering*,

ASCE, 131(5), pp.701~705.

Leon, S.J. (1980), *Linear Algebra with Applications*, Macmillan Publishing Co., New York.