韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제 3호, 2006. 9. 391-405

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20, No. 3, Sep. 2006. 391-405

중학교 전일제 계발활동에서 수학반 운영에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)
김 현 정 (하동중앙중학교)

국민 공통 기본 교육과정은 교과, 재량활동, 특별활동으로 편성된다. 본 연구에서는 중학교에서 특별활동 수학반을 전일제로 운영하는 사례를 중심으로, 수학반의 운영 방법, 연간 프로그램 구성 및 구체적인 자료의 개발, 학생들의 수학반 활동을 구체적으로 고찰하였다. 이를 통해, 현재 중학교에서 널리 운영중인 전일제 형태의 수학반 운영의 개선 및 체계화를 위한 기초자료를 제공하고, 교육과정 운영의 내실화를 위한 시사점을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서 론

제 7차 교육과정(교육부, 1998)에 의하면, 국민 공통 기본 교육과정은 교과, 재량활동, 특별활동으로 편성된다. 이들 중에서 특별활동은 자치활동, 적응활동, 계발활동, 봉사활동, 행사활동으로 편성되는데, 특별활동에서 학생들은 바람직한 집단활동에 참여하며, 자신의 개성과 소질을 계발・신장할 수 있는 기회를 가지게 된다.

계발활동의 성격에 관련하여, 경상남도 교육청(2003, p.11)에서는 '계발활동은 특별활동의 한 영역으로서 교과와 상호 보완적 관계를 갖고 전인교육의 일환으로 실시되는 교과 이외의 교육 활동을 말한다. 공통된 흥미, 관심, 소질 또는 적성이 비슷한 학생들로 구성된 집단에 자발적으로 참여하여 심신의 조화로운 발달과 개성의 신장 및 자아 정체감 확립을 도모함으로써 인생 전반에 흥미나 특기를 활용하여 풍요로운 삶을 영위할 수 있도록 조장하는 자율적인 활동'이라고 규정하고 있다. 일반적으로, 계발활동은 클럽활동(CA)이라고 불리며, 계발활동에서는 학생들의 흥미, 관심, 소질에 따라 정규 교육과정에서 규정하는 교과내용 밖의 학습활동을 진행하게 된다. 본 연구에서는 계발활동의 하나로 수학에 흥미와 소질이 있는 중학생들을 대상으로 수학반을 운영하여, 이를 바탕으로 수학반 운영의 틀, 수학반의 활동내용 등을 고찰할 것이다.

중등학교에서 수학반 운영에 대해, 국내의 수학교육학 관련 학술지들에 보고된 연구 결과들은 그리 많지 않다. 박혜숙(2001)은 제 7차 교육과정에서 특별활동의 성격과 운영에 대해 고찰하고, 수학교사들에게 설문 조사하여 특별활동 수학반의 개선 및 활성화 방안을 모색하였으며, 신현용・유익

* ZDM 분류 : D43
* MSC2000분류 : 97B99
* 주제어 : 전일제 계발활동, 수학반 운영, 교사 강의, 문제해결

승 · 한인기(2000)는 과학고등학교에서 수학반 운영을 통해 수학 영재교육의 개선 방안을 모색하였고, 한인기 · 이지은(2004)은 고등학교 수학반에서 활용할 수 있는 간학문적인 교수-학습 자료를 개발하여 제시하였다. 한편, 단행본으로 박제남(1999)은 방과후에 운영되는 수학반의 학습 자료들을 정리하였고, Formin, Genkin & Itenberg(1996)는 수학동아리에서 활용할 수 있는 다양한 수준의 학습 주제들과 문제들을 제시하였다. 이들 연구를 통해, 특별활동 수학반 운영의 개선 방안, 구체적 운영을 위한 다양한 학습 주제들 및 자료들이 제시되어, 중등학교에서의 효율적인 수학반 운영을 위한 기초자료로 활용되고 있다는 점에서 커다란 의미를 둘 수 있다. 그러나, 중학교에서 수학반을 전일제로 시행하는 경우에, 수학반을 구체적으로 어떻게 운영해야 하는지, 학습 주제들 및 자료들은 어떻게 선정하여 제시해야 하는지 등에 대한 구체적인 수준의 연구는 없었다.

본 연구에서는 중학교에서 특별활동 수학반을 전일제로 운영하는 사례를 중심으로, 수학반의 운영방법, 연간 프로그램 구성 및 구체적인 자료의 개발, 학생들의 수학반 활동을 구체적으로 고찰할 것이다. 이를 통해, 현재 중학교에서 널리 운영중인 전일제 형태의 수학반 운영의 개선 및 체계화를 위한 기초자료를 제공하고, 교육과정 운영의 내실화를 위한 시사점을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

2. 수학반 운영의 틀 및 프로그램 개발

(1) 수학반 운영의 틀

수학반 운영은 한인기(2004)의 연구에 제시된 모스크바대학교 수학동아리의 운영 틀을 바탕으로 하였다. 모스크바대학교 수학동아리의 운영은 전체강연과 분과활동으로 이루어지는데, 전체강연에서는 수학분야의 흥미로운 연구 결과들, 중요한 탐구방법들을 중심으로 교수의 강의가 진행되며, 분과활동에서는 리더를 중심으로 학생 주도의 문제해결 활동이 이루어진다.

본 연구에서 수학반 운영은 교사 강의와 문제해결 활동으로 구성된다. 교사 강의는 전일제 활동(매달 마지막 주의 토요일)에서 3~4교시에 이루어진다. 이때, 수학의 중요한 개념들, 성공적인 수학 탐구활동을 위해 필요한 수학적 방법들 및 아이디어들이 중학교 수학과 교육과정에 바탕을 두고 간결하고 흥미로운 형태로 진술되었다. 교사 강의의 끝부분에는 강의주제에 관련된 구체적인 문제들이 학생들에게 과제로 제시된다. 본 연구에서 교사 강의에 다루어진 주제들은 다음과 같다.

- 합성수의 약수 개수에 대한 성질(합성수 n은 $\sqrt{n}$보다 많지 않은 개수의 약수를 가짐);
- 합성수와 소수 찾기;
- 페르마의 방법에 의한 합성수의 인수분해;
- 7, 9, 11, 13 등으로 나누어떨어짐의 조건 및 성질들;
- 소수의 무한성의 증명에 관련된 사실들;
- 삼각형과 사면체에서 넓이에 관련된 성질들의 유추 관계;

- 삼각형과 사면체에서 내접원에 관련된 성질들의 유추 관계;
- 삼각형과 사면체에서 높이 및 내접원에 관련된 성질들의 유추 관계;
- 삼각형과 사면체에서 내접원 및 방접원에 관련된 성질들의 유추 관계;
- 삼각형과 사면체에서 체바선에 관련된 성질들의 유추 관계(Gergaune 정리 등);
- tromino로 격자판 채우기;
- tetromino로 격자판 채우기;
- 다양한 polyomino들로 격자판 채우기.

한편, 문제해결 활동은 전일제 활동에서 1~2교시에 이루어진다. 학생들은 교사 강의의 끝부분에 제시되는 문제들, 매달 두 번째 주에 제시되는 문제들을 중심으로 문제해결 활동을 수행한다. 본 연구에서는 이들 문제를 학습지의 형태로 미리 준비하여 학생들에게 제공하였고, 이와 함께 문제해결의 기록을 위한 활동지도 제공하였다. 활동지는 문제기술, 풀이 기술, 반성의 세 항목으로 구성하였으며(표 1), 반성활동에서는 문제해결로부터 알게 된 것, 문제해결에 사용한 공식, 문제해결 과정의 도식화, 유사한 문제 만들기 등을 수행하도록 요구하였다.

전일제 계발의 1~2교시에 학생들은 자신의 문제해결 결과를 발표하고, 문제해결에서의 어려움, 문제해결의 주된 생각들, 탐색 방법, 문제해결의 반성 수행 등에 대해 발표하고 다른 학생들과 토론한다.

<표 1> 문제해결의 기록을 위한 활동지

수학동아리반 3학년 (   )반 (   )번 이름 (   )
문제
풀이
반성 ① 알게 된 사실 ② 사용한 공식 ③ 문제에 대한 마인드맵 ④ 유사한 문제만들기

(2) 수학반의 프로그램 개발

본 연구에서 수학반은 경남 진주지역의 J중학교 3학년 학생들 중에서 수학영역에서 높은 성취를 보이며, 수학반 참여를 원하는 9명의 학생들로 구성되었다. 프로그램 개발에서는 새로운 개념을 도입, 설명하는 것보다는 이미 학습한 내용을 바탕으로 수학적 개념들, 문제해결 방법들을 심화시키는 데 중점을 두었다.

프로그램을 구성하는 심화학습의 주제 선정에서 Kolmogorov가 주장한 수학적 영재성의 알고리즘적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면을 고려하였다. 그리하여, 수와 연산, 함수, 방정식과 부등식, 확률 및 통계, 도형 등의 영역들 중에서 수학적 영재성의 알고리즘적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면이 확연히 드러나며 심화학습 자료의 개발이 비교적 용이한 주제들을 선정하였다.

한인기(2006)에 의하면, 수학적 영재성의 알고리즘적 측면은 어떤 알고리즘의 효율성을 평가하기, 알려진 알고리즘이나 방법들을 문제 상황에 적용하기, 문제를 좀더 단순하고 간단한 유한번의 조작을 통해 해결할 수 있도록 변형시키기, 문제해결을 위한 새로운 알고리즘을 찾기 등에 관련된다. 본 연구에서 수학적 영재성의 알고리즘적 측면에 관련하여 합성수와 소수, 합성수와 인수분해, 7, 9, 11, 13으로 나누어 떨어짐의 성질, 소수의 성질 등의 주제를 선정하였다. 예를 들어, 다음과 같은 문제들이 수학반에서 알고리즘적 측면과 관련되어 제시되었다.

문제 1. 6^5-1은 합성수인지, 소수인지를 확인하여라.

문제 2. $6^{22}-1$, $4^{21}-1$, $4^{21}+1$이 합성수인지, 소수인지를 각각 확인하여라.

문제 3. 수 2077을 페르마의 방법으로 인수분해 하여라.

수학적 영재성의 기하학적 측면은 기하학적 상상력이라고도 할 수 있으며, 주어진 도형을 머릿속으로 생생하게 상상하기, 기하학문제로부터 문제해결을 위해 필요한 정보들을 분석하기, 주어진 문제를 기하학적인 형태로 표현하고 기하학의 언어로 번역하기 등에 관련된다(한인기, 2006). 본 연구에서는 사면체의 다양한 성질 탐구가 이에 직접 관련된 주제이다. 예를 들어, 다음과 같은 문제들이 기하학적인 측면과 관련하여 수학반에서 제시되었다.

문제 4. 사면체 DABC의 내부에 임의의 점 O를 잡았다. 점 O를 사면체의 각 꼭지점과 연결하면, 사면체 DABC는 어떤 도형들로 분할되는가? 얻어진 도형들을 작도하여라.

문제 5. 사면체 DABC에서 꼭지점 D, A, B, C의 마주보는 면의 넓이를 각각 d, a, b, c라 하자. 임의의 내부점 O로부터 넓이가 d, a, b, c인 면까지의 거리를 K_d, K_a, K_b, K_c라 할 때, 등식 $aK_a+bK_b+cK_c+dK_d=3V$을 증명하여라.

문제 5는 수학적 영재성의 기하학적 측면에 주로 관련하여 생각할 수 있지만, 논리적인 측면도 약간 관련된다. 본 연구의 프로그램 개발에는 사면체의 다양한 성질에 대한 논증이 포함되었는데, 이것

은 수학적 영재성의 기하학적 측면, 논리적 측면을 고려한 것이다.

수학적 영재성의 논리적 측면은 순차적인 논리적 고찰을 수행하는 것에 관련되는데, 본 연구에서는 polyomino를 활용한 다양한 탐구 활동이 이에 직접 관련된 주제이다. 예를 들어, 다음과 같은 문제들이 논리적인 측면과 관련하여 수학반에서 제시되었다.

문제 6. L-Tromino 세 개로 3×3인 격자판을 채울 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

문제 7. a×b인 격자판을 O자형 tetromino를 채울 수 있을 필요충분조건은 a와 b가 짝수라는 것을 증명하여라.

본 연구에서는 Kolmogorov의 수학적 영재성에 대한 문헌연구를 바탕으로 개괄적인 수학반 프로그램을 개발하였으며, 개발된 프로그램은 수학반을 직접 운영하면서 수집된 학생들의 수학적 탐구에 대한 다양한 자료를 바탕으로 수정, 보완하여 <표 2>와 같은 연간 프로그램을 얻었다.

<표 2> 수학반의 연간 프로그램

년 월	수학반의 연간 프로그램
2005년 3월	수학반 모집 및 운영에 대한 안내
2005년 4월	합성수와 소수의 분류, 합성수와 인수분해, 합성수의 인수분해, 페르마 방법으로 합성수를 인수분해하기, 문제해결, 문제만들기
2005년 5월	정수에서 배수, 9로 나누어 떨어짐의 성질, 소수의 무한성, 문제해결, 문제만들기
2005년 6월	7로 나누어떨어짐, 11로 나누어 떨어짐, 13으로 나누어 떨어짐, 법(mod)에 관한 개념 및 성질, 문제해결, 문제만들기
2005년 7월	11로 나누어 떨어짐, 13으로 나누어 떨어짐, 소수의 성질, 소수를 찾는 다양한 방법, 컴퓨터를 활용한 소수 찾기, 문제해결, 문제만들기
2005년 9월	삼각형에서 내접원, 내접원의 반지름, 사각형의 내접원, n각형의 내접원, 삼각형에서 넓이에 관련된 성질들을 사면체로 유추하기, 문제해결, 문제만들기
2005년10월	polyomino의 설명, monomino로 바둑판 채우기, domino로 바둑판 채우기, tromino로 바둑판 채우기, 삼각형에서 높이 및 내접원에 관련된 성질들을 사면체로 유추하기, 문제해결, 문제만들기
2005년11월	8×8인 바둑판을 domino, tromino, monomino, tetromino로 채우기, 삼각형에서 내접원 및 방접원에 관련된 성질들을 사면체로 유추하기, 문제해결, 문제만들기
2005년12월	삼각형에서 체바선에 관련된 성질들을 사면체로 유추하기, 문제해결, 문제만들기

(3) 수학반의 교수-학습 자료 개발

수학반의 연간 프로그램에 근거하여, 구체적인 교수-학습 자료의 개발에 있어, 다음과 같은 측면

을 고려하였다. 첫째, 수학의 탐구방법을 학생들이 경험할 수 있도록 하였다. 수학분야의 탐구에서는 관찰과 귀납, 연역, 유추, 모델링, 일반화 등이 포함된다. 본 연구에서는 유추를 통해 명제 또는 풀이 방법을 추측하고, 이를 바탕으로 연역 및 일반화로 접근할 수 있도록 구체적인 자료를 개발하였다. 예를 들어, 삼각형의 성질로부터 사각형, 오각형, …, n각형, 사면체의 성질을 유추하고, 이를 연역적으로 증명하도록 하였다.

둘째, 학생들이 혼자힘으로 수학탐구의 경험을 가질 수 있도록 충분한 과제를 제공하였다. 혼자힘으로 의미있는 수학 내용을 탐구하는 경험은 학생들의 인지적인 적극성과 자립성의 형성에 있어서 중요한 역할을 한다(한인기, 2006). 본 연구에서는 전일제 계발활동의 교사 강의 끝부분에 강의에 관련된 탐구과제를 2주 분량으로 제공하였고, 그리고 나서 2주 후에는 또 다른 탐구과제를 제공하여 학생들이 적당한 양의 과제를 스스로 탐구할 수 있도록 하였다. 그리고, 학생들에게 제시되는 과제나 학생들의 문제해결 토론에서 학생들이 문제를 스스로 변형시키거나 만들어보도록 하였다.

셋째, 교수-학습 자료들은 순차적인 형태로 계열성을 가지도록 구성되었다. 교수-학습 자료들은 쉬운 것으로부터 어려운 것으로, 단순한 것으로부터 복잡한 것으로, 알려진 것으로부터 알려지지 않은 것으로 진행하도록 조직되었다. 이를 통해, 학생들은 이전의 문제해결 경험을 후속적인 탐구활동의 도구로 사용하며, 스스로의 힘으로 어려움을 극복하며 문제를 해결하는 경험을 가질 수 있었다.

넷째, 문제를 통한 탐구 중심의 교수-학습 자료들을 개발한다. 교사와 학생의 교수-학습 활동에서 가장 기본적이고 중요한 매개체가 바로 수학 문제들이다. 이미 획득된 수학적 지식이나 능력들을 활용하여 다양한 문제를 탐구하고, 문제를 통해 여러 요소들 사이의 관계를 탐구하는 경험이 강조된 자료의 개발은 매우 중요하다. 학생들이 수학 문제를 풀어가면서 수학적 대상들 사이의 관계나 규칙성을 찾고, 이미 알고 있는 수학적 지식을 새로운 문제 상황에 적용하는 탐구 활동 중심의 자료를 개발해야 한다.

본 연구에서 활용한 구체적인 교수-학습 자료들, 문제들을 주제별로 정리하면 개략적으로 다음과 같다(모든 문제들을 나열하지는 않았음).

◇ 합성수와 인수분해

ㅇ 60~105사이의 소수를 찾으시오.

ㅇ $6^{22}-1$, $4^{21}-1$, $4^{21}+1$이 합성수인가를 확인하여라.

ㅇ 수 $2^{106}+1$을 2^{50}보다 큰 두 인수로 분해하여라.

ㅇ 수 2077, 1333, 1517, 9271을 페르마의 방법으로 인수분해 하여라.

◇ 정수에서 배수

ㅇ 정수 a, b가 정수 m으로 나누어떨어지면, a+b는 m으로 나누어떨어진다는 것을 증명하여라.

ㅇ $a=a_1+a_2+\cdots+a_n$이 m으로 나누어떨어지며, a_1, a_2, …, a_{n-1}도 m으로 나누어 떨어진다. 이때, a_n이 m으로 나누어떨어진다는 것을 증명하여라.

○ 어떤 정수 a, b, c에 대해 3a+4b+5c가 11로 나누어떨어지면, 그러한 정수 a, b, c에 대해 9a+b+4c도 11로 나누어떨어진다는 것을 증명하여라.

○ 어떤 수가 2, 3으로 나누어떨어진다. 그러면, 이 수는 반드시 6으로 나누어떨어지는가?

◇ 9로 나누어떨어짐

○ 수 83** 이 90으로 나누어 떨어진다. 이때, ** 에 적당한 숫자를 구하여라.

○ 수 13의 오른쪽과 왼쪽에 숫자를 각각 하나씩 써서 36의 배수가 되도록 하려 한다. 수 13에 어떤 숫자를 덧붙여 써야 하는가?

○ 수 x의 숫자의 합을 y, 수 y의 숫자의 합을 z라 할 때, x+y+z=60을 만족하는 수 x를 구하여라.

○ 수 n의 숫자의 합을 s(n)이라 할 때, 다음 방정식을 풀어라.

(a) x+s(x)=100000000;

(b) x+s(x)+s(s(x))+s(s(s(x)))=1993.

◇ 7로 나누어 떨어짐

○ 수 983746523을 7로 나눈 나머지를 구하여라.

○ 7의 배수인 두 자리 수 k가 주어졌다. k의 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자를 바꾸어 k'을 얻었다고 하자. 이때, k'에 k의 십의 자리 숫자를 더하면, 얻어진 합은 7로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

○ 7의 배수인 세 자리 수 k가 주어졌다. k에서 숫자들의 순서를 거꾸로 하여 얻어진 수를 k'이라 하자. k의 일의 자리 숫자에서 백의 자리 숫자를 뺀 값을 d라 하면, k'-d는 7로 나누어떨어진다는 것을 증명하여라.

◇ 11, 13으로 나누어 떨어짐

○ 수 5423791을 11로 나눈 나머지를 구하여라.

○ 수 n=abcdef에서 1, 10^2, 10^4, 10^6의 자리에 있는 숫자들의 합과 10, 10^3, 10^5의 자리에 있는 숫자들의 합의 차를 11로 나눈 나머지는 수 n을 11로 나눈 나머지와 같다는 것을 증명하여라.

○ 수 632x46을 11로 나눈 나머지가 5가 되도록 x값을 구하여라.

○ 등식 $121(492+x)^2=37a10201$을 만족시키는 a, x를 각각 구하여라(단, a는 숫자이고, x는 어떤 수이다).

◇ 소수에 대해

○ 소수의 개수가 무한하다는 것, 즉 가장 큰 소수는 존재하지 않는다는 것을 증명하여라.

○ q_1, q_2, …, q_n은 소수라 할 때, $(q_1\times q_2\times\cdots\times q_n)+1$이 소수인가 합성수인가를 확인하고, 그 이유를 설명하여라.

○ $(q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n)+1$와 $(q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n)-1$인 꼴의 수들을 이용하여 만들어 낼 수 있는 쌍둥이 소수들을 찾아라.

○ 임의의 자연수 k에 대해, k의 약수들 중에서 1이 아닌 가장 작은 약수는 소수라는 것을 증명하여라.

○ 4k-1꼴의 소수가 무한하다는 것을 증명하여라.

○ 식 $N=\frac{2^p+1}{3}$에서 p에 소수를 대입하면, 연속적으로 소수를 생성하다가 합성수가 얻어진다. 연속적으로 소수를 생성하는 p값을 구하려 한다. 17이하의 p값에 대해 N값이 소수인지를 조사하여라.

◇ 다각형의 내접원

○ 삼각형 ABC에서 내접원의 반지름을 r, 둘레의 길이를 2p라 하면, $r=\frac{S_{ABC}}{p}$임을 증명하여라.

○ 내접원을 가지는 사각형 ABCD에서 내접원의 반지름을 r, 둘레의 길이를 2p라 하면, $r=\frac{S_{ABCD}}{p}$임을 증명하여라.

○ 내접원을 가지는 n각형 $A_1A_2\cdots A_n$에서 내접원의 반지름을 r, 둘레의 길이를 2p라 하면, $r=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_n}}{p}$임을 증명하여라.

◇ 삼각형과 사면체의 유추

○ 삼각형의 임의의 내부점으로부터 길이가 a, b, c인 변까지의 거리를 K_a, K_b, K_c라 하면, $aK_a+bK_b+cK_c=2S$임을 증명하여라(단, S는 삼각형의 넓이).

○ 사면체의 임의의 내부점으로부터 넓이가 a, b, c, d인 면까지의 거리를 K_a, K_b, K_c, K_d라 하면, $aK_a+bK_b+cK_c+dK_d=3V$임을 증명하여라(단, V는 사면체의 부피).

○ 삼각형에서 내접원의 반지름을 r, 최대높이와 최소높이를 각각 h_{min}, h_{max}라 하면, $h_{min} \le 3r \le h_{max}$임을 증명하여라.

○ 사면체에서 내접구의 반지름을 r, 최대높이와 최소높이를 각각 h_{min}, h_{max}라 하면, $h_{min} \le 4r \le h_{max}$임을 증명하여라.

○ 삼각형 ABC의 각 꼭지점으로부터 마주보는 변으로 내부점 O를 지나는 선분 AA_1, BB_1, CC_1을 긋자. 이때, $\frac{A_1O}{AA_1}+\frac{B_1O}{BB_1}+\frac{C_1O}{CC_1}=1$을 증명하여라.

○ 사면체 ABCD의 각 꼭지점으로부터 마주보는 면으로 내부점 O를 지나는 선분 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1을 긋자. 이때, $\frac{A_1O}{AA_1}+\frac{B_1O}{BB_1}+\frac{C_1O}{CC_1}+\frac{D_1O}{DD_1}=1$을 증명하여라.

○ 삼각형에서 각 높이의 역수의 합은 내접원 반지름의 역수와 같다는 것, 즉 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$임을 증명하여라.

○ 사면체에서 각 높이의 역수의 합은 내접구의 반지름의 역수와 같다는 것, 즉 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}=\frac{1}{r}$임을 증명하여라.

○ 삼각형에서 각 방접원 반지름의 역수의 합은 내접원 반지름의 역수와 같다는 것, 즉 $\frac{1}{r}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}$임을 증명하여라.

○ 사면체에서 각 방접구 반지름의 역수의 합은 내접구 반지름의 역수의 2배와 같다는 것, 즉 $\frac{2}{r}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}+\frac{1}{R_d}$임을 증명하여라.

◇ tromino로 격자판 채우기

○ L-tromino 세 개로 3×3인 격자판을 채울 수 있을까?

○ 5×6인 바둑판을 I-tromino로 전부 채울 수 있는가?

○ b>5이고, b가 3으로 나누어떨어지면, 5×b인 바둑판을 L-tromino로 전부 채울 수 있다는 것을 증명하여라.

○ b가 3으로 나누어떨어지고 a×b인 바둑판이 L-tromino로 전부 채워지면, (a+2)×b인 바둑판은 L-tromino로 전부 채워질 수 있다는 것을 증명하여라.

○ a≥4, b≥3인 정수 a, b에 대해, a는 짝수이고, b는 3으로 나누어떨어진다고 하자. 이 때, a×b인 바둑판이 L-tromino로 전부 채워질 수 있다는 것을 증명하여라.

◇ tetromino로 격자판 채우기

○ L-tetromino로 직사각형을 만들어라.

○ 4×5인 바둑판을 L-tetromino를 이용해서 전부 채울 수 있을까?

○ a×b인 바둑판을 O-tetromino로 전부 채울 필요충분조건은 a와 b가 짝수라는 것을 증명하여라.

○ Z-tetromino로 전부 덮을 수 있는 직사각형 모양의 바둑판은 존재하지 않는다는 것을 증명하여라.

○ 3×8인 바둑판을 L-tetromino로 덮을 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

◇ monomino로 격자판 채우기

○ monomino를 4×4인 격자판에 놓은 다음, 이 판에 monomino와 포개지지 않게 domino를 놓을 수 있는가를 생각한다. domino를 하나도 놓을 수 없도록 격자판에 monomino를 놓자. 이때, 4×4인 격자판에 놓을 수 있는 monomino의 최소 개수를 구하여라.

ㅇ monomino를 8×8인 격자판에 놓은 다음, 이 판에 monomino와 포개지지 않게 I-tromino를 놓을 수 있는가를 생각한다. I-tromino를 하나도 놓을 수 없도록 격자판에 monomino를 놓자. 이때, 8×8인 격자판에 놓을 수 있는 *monomino*의 최소 개수를 구하여라.

ㅇ 2×4인 바둑판에 monomino를 하나 놓으면 포개지지 않도록 Y-pentromino를 놓을 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

3. 연구 절차 및 방법

본 연구는 2004년 12월에서 2005년 12월에 걸쳐 진행되었다. 2004년 12월에서 2005년 3월까지는 심화학습 중심의 수학반 운영을 위한 자료 분석 및 선행연구 분석이 이루어졌으며, 이를 바탕으로 본 연구에 적합한 수학반 운영의 틀 및 연간 프로그램을 개발하였다.

2005년 3월에는 경남 진주지역의 J중학교 3학년 학생들 중에서 수학영역에서 높은 성취를 보이며, 수학반 참여를 원하는 학생 9명을 대상으로 수학반을 구성하였다. 경남 진주시는 고등학교 평준화 지역이며, J중학교가 속한 배후지역은 대단위 아파트 단지를 기반으로 하며, 진주시내의 다른 지역에 비해 생활수준이 뒤쳐진다고는 할 수 없는 평범한 거주지역이다.

수학반은 매달 같은 패턴으로 운영되었다. 2005년 4월의 예를 자세히 살펴보자. 2005년 4월 둘째 주에 학생들에게 학습지와 활동지를 제시하였다. 학생들은 학습지에 제시된 과제물을 각자 탐구하여 4월 말의 토요일에 있는 전일제 계발활동 시간에 탐구 결과를 활동지에 기록하여 제출하였고, 과제물에 대한 탐구 과정, 탐구에서 발생하는 어려움들, 탐구의 결과들을 발표하고 토론하였다. 교사는 학생들의 토론활동 및 질문 등을 관찰, 분석하여 이후의 과제물을 준비하거나 개발된 자료들을 수정, 보완하는 기초자료로 사용하였다.

토요일의 전일제 계발이 끝날 때에, 교사는 학생들에게 새로운 학습지와 활동지를 제공하였고, 다시금 두 주 후에 학생들에게 새로운 학습지와 활동지를 제공하였다. 결국, 학생들은 매달 두 번씩 학습지와 활동지를 받았고, 매달 말의 토요일에 있는 전일제 계발활동 시간에 활동지를 제출하였다.

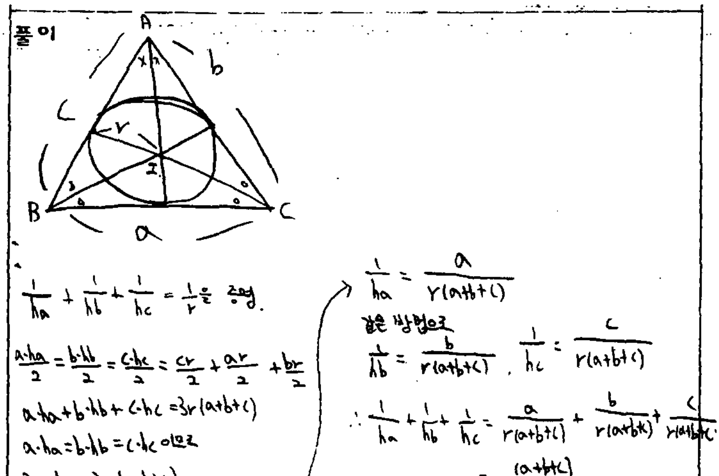
본 연구에서는 두 가지 방법으로 학생들의 수학반 활동 자료를 모았으며, 이들 자료는 문헌연구를 통해 개발된 수학반 운영의 프로그램, 구체적인 자료들을 수정, 보완하는 기초자료로 활용되었다. 첫 번째 자료 수집 방법으로는, 학생들의 활동지이다. 학생들이 제출하는 활동지를 통해, 문제해결 탐색 수행 방법, 문제해결 기술 방법, 수학적 반성활동 수행 등과 같은 수학적 탐구활동에 대한 직접적인 정보를 얻을 수 있다. 두 번째 자료 수집 방법으로는, 전일제 계발활동에서 학생들이 수행한 발표 및 토론활동, 교사에게 제시한 다양한 질문을 통해 학생들의 수학 탐구에 대한 간접적인 정보를 얻을 수 있었으며, 교사는 이들 간접적인 정보들을 메모하여 기록으로 남겼다.

4. 학생의 수학반 활동(활동지를 중심으로)

학습지에 과제로 제시된 문제들에 대해, 학생들은 활동지에 풀이, 반성활동을 기록하여 교사에게 제출하였고, 전일제 활동의 문제해결 시간에 발표하고, 문제해결 및 반성활동에 관련하여 다른 학생들과 토론하였다.

학생들의 활동지를 분석해 보면, 대부분의 학생들은 활동지의 '문제풀이'란에 과제로 제시된 문제들의 풀이를 비교적 상세히 기술하여 교사에게 제출하였다. 이것은, 수학반에 참여한 학생들의 수학교과에서 높은 성취를 보였다는 것과 학생들이 문제해결 활동에 비교적 익숙해 있다는 것과 관련있을 것이다.

삼각형에서 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ 임을 증명하는 문제에 대해, 한 학생이 교사에게 제출한 활동지의 문제해결은 <그림 1>과 같다. <그림 1>에서 이 학생은 문제에서 주어진 외접원에 대한 정보를 그림으로 정확히 표현하였으며, 문제도 정확하게 풀었다.

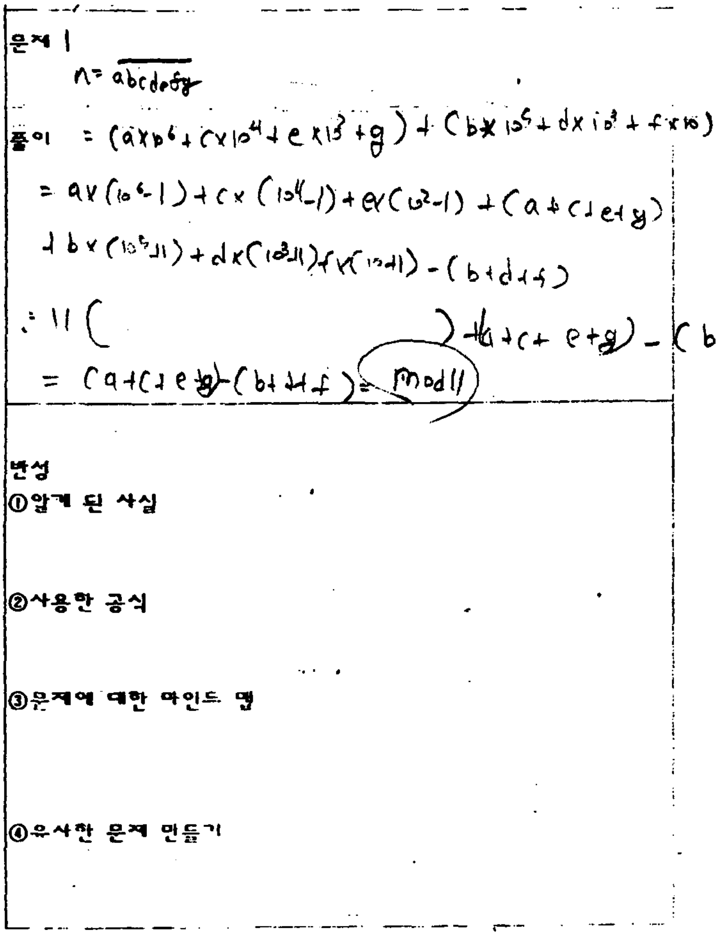


<그림 1> 활동지에 제시된 문제해결의 예

학생들은 한 달에 한 번 정해져 있는 전일제 활동시간 이외에도, 문제해결에서 어려움이 발생하면 교사에게 자문을 구하였으며, 교사의 도움과 자신의 문제해결 결과들을 종합하여 활동지에 기록하였다.

기술한 것과 같은 비교적 성공적인 문제해결 활동과는 달리, 학생들은 반성활동에서는 어려움을 호소하였으며, 실제로 활동지의 '반성'란을 비운 상태로 교사에게 활동지를 제출하는 경우도 많았다. 이러한 학생들에게 교사가 반성활동에 관련된 질문을 던지면, 이들은 자신의 생각을 나름대로 대답하는

경우가 많았지만, 실제로 그것을 활동지에 일목요연하게 기록하는데는 어려움을 보였다(그림 2).


문제 1

$n = \overline{abcdefg}$

풀이 $= (a\times10^6 + c\times10^4 + e\times10^2 + g) + (b\times10^5 + d\times10^3 + f\times10)$

$= a\times(10^6-1) + c\times(10^4-1) + e\times(10^2-1) + (a+c+e+g)$

$+ b\times(10^5+1) + d\times(10^3+1) + f\times(10+1) - (b+d+f)$

$\therefore 11(\quad) + (a+c+e+g) - (b$

$= (a+c+e+g) - (b+d+f) \equiv \bmod 11$

반성

①알게 된 사실

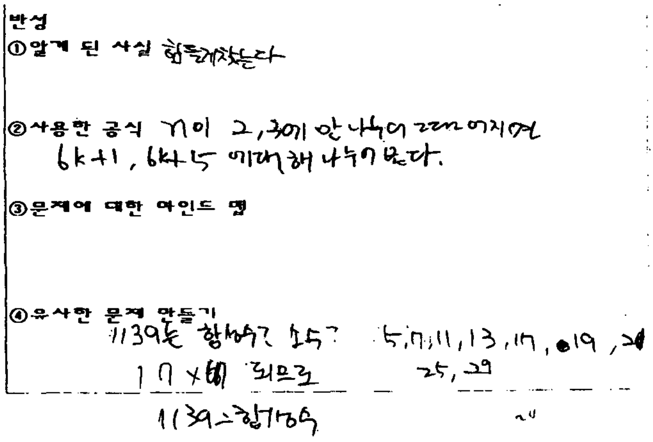
②사용한 공식

③문제에 대한 마인드 맵

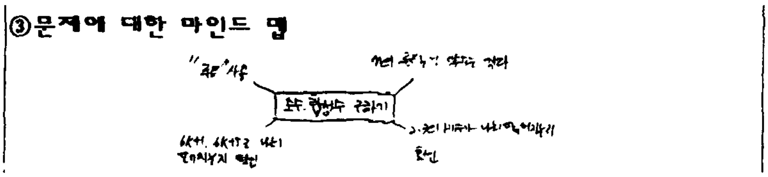
④유사한 문제 만들기

<그림 2> 반성활동을 기술하지 않은 활동지

한편, 반성활동을 기록하여 제출한 학생들 중에는 반성활동의 요소인 '알게 된 사실', '사용한 공식', '문제에 대한 마인드맵', '유사한 문제만들기' 중에서 '문제에 대한 마인드맵 만들기' 항목을 비워둔 경우가 종종 있었다(그림 3). 몇몇 학생들에게 있어, 증명과정의 흐름을 도식화하는 '문제에 대한 마인드맵' 만들기 활동이 아직은 익숙하지 않다는 것을 알 수 있다. 한 학생에 의해 기술된 '문제에 대한 마인드맵' 만들기 활동의 예를 <그림 4>에서 볼 수 있다. 한편, '유사한 문제만들기' 항목에 대해서는 많은 학생들이 적극적으로 활동지에 유사한 문제들을 기술하였다.



<그림 3> 문제에 대한 마인드맵을 기술하지 않은 활동지



<그림 4> 활동지에 기술된 '문제에 대한 마인드맵'의 예

학생들의 활동지를 분석해 보면, 문제해결보다는 반성활동에서 빈칸이 많았다. 이것은, 첫째 학생들이 반성활동 자체에 익숙해 있지 않으며, 둘째 학생들이 문제를 풀어 답을 내는 것보다는 반성활동에 대해 커다란 가치를 부여하고 있지 않다는 것을 의미할 것이다. 그러나, 한인기 · 꼴랴긴(2006)의 주장처럼, 주어진 문제에 대한 답을 얻고 난 후에 수행하는 반성은 문제해결의 중요한 부분이며, '문제로부터 무엇을 배울 수 있는가'를 진지하게 논할 수 있는 중요한 문제해결의 단계라고 할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 중학교에서 특별활동 수학반을 전일제로 운영하는 사례를 중심으로, 수학반의 운영방법, 연간 프로그램 구성 및 구체적인 자료의 개발, 학생들의 수학반 활동을 구체적으로 고찰하였다.

본 연구는 2004년 12월에서 2005년 12월에 걸쳐 진행되었다. 2004년 12월에서 2005년 3월까지는 심화학습 중심의 수학반 운영을 위한 자료 분석 및 선행연구 분석이 이루어졌으며, 2005년 4월부터 12월까지 수학반을 운영하였다. 수학반은 경남 진주지역의 J중학교 3학년 학생들 중에서 수학영역에서 높은 성취를 보이며, 수학반 참여를 원하는 학생 9명을 대상으로 수학반을 구성하였다. 이들을 대상으로 수학반을 운영하면서, 학생들의 수학적 탐구에 대한 다양한 자료를 수집하였으며, 이를 바탕

으로 문헌연구를 통해 개발된 수학반 프로그램 및 교수-학습 자료를 수정, 보완하였다.

수학반 운영은 교사 강의와 문제해결 활동으로 구성된다. 교사 강의는 전일제 활동에서 3~4교시에 이루어진다. 이때, 수학의 중요한 개념들, 성공적인 수학 탐구활동을 위해 필요한 수학적 방법들 및 아이디어들이 중학교 수학과 교육과정에 바탕을 두고 간결하고 흥미로운 형태로 진술되었다. 교사 강의의 끝부분에는 강의주제에 관련된 구체적인 문제들이 학생들에게 과제로 제시된다. 한편, 학생들의 문제해결 활동은 전일제 활동에서 1~2교시에 이루어진다. 학생들은 교사 강의의 끝부분에 제시되는 문제들, 매달 두 번째 주에 제시되는 문제들을 중심으로 문제해결 활동을 수행하였다. 학생들의 탐구활동은 미리 제공된 활동지에 기록하도록 하였다. 활동지에는 문제기술, 풀이 기술, 반성의 세 항목으로 구성하였으며, 반성활동에서는 문제해결로부터 알게 된 것, 문제해결에 사용한 공식, 문제해결 과정의 도식화, 유사한 문제 만들기 등을 수행하도록 요구하였다.

연간 프로그램의 구성에서는 Kolmogorov가 주장한 수학적 영재성의 알고리즘적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면을 고려하였다. 수학적 영재성의 알고리즘적 측면에 관련하여서는 수의 성질 탐구에 관련된 주제들을 선정하였고, 기하학적 측면에 관련하여서는 사면체의 다양한 성질 탐구에 관련된 주제들, 논리적 측면에 관련하여서는 polyomino를 활용한 탐구 활동에 관련된 주제들이 선정되었다.

구체적인 교수-학습 자료의 개발에 있어, 수학의 탐구방법을 학생들이 경험할 수 있도록 하였으며, 학생들이 혼자힘으로 수학탐구의 경험을 가질 수 있도록 충분한 과제를 제공하였으며, 교수-학습 자료들이 순차적인 형태로 계열성을 가지도록 구성하였으며, 문제를 통한 탐구 중심의 교수-학습 자료들을 개발하였다.

학생들의 탐구 활동을 활동지를 중심으로 살펴보면, 문제해결보다는 반성활동에서 빈칸이 많았다. 이로부터, 학생들이 반성활동 자체에 익숙해 있지 않으며, 학생들이 문제를 풀어 답을 내는 것보다는 반성활동에 대해 커다란 가치를 부여하고 있지 않음을 간접적으로 추측할 수 있다. 그러나, 주어진 문제에 대한 답을 얻고 난 후에 수행하는 반성은 문제해결의 중요한 부분이므로, 학생들에게 지속적인 강조와 지도가 필요할 것이다.

본 연구의 결과는 현재 중학교에서 널리 운영중인 전일제 형태의 수학반 운영의 개선 및 체계화를 위한 기초자료를 제공하고, 교육과정 운영의 내실화를 위한 시사점을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

경상남도 교육청 (2003). 특별활동 영역별 교수 · 학습 자료(III)-계발활동, 경남: 경상남도 교육청.

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

박제남 (1999). 방과후 수학 특별활동 지도 방안, 서울: 수학사랑.

박혜숙 (2001). 제 7차 교육과정에 따른 중학교 수학교과에서의 특별활동, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **40(1)**, pp.53-66.

신현용 · 유익승 · 한인기 (2000). 과학고등학교 수학 특별반의 영재교육에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육학술지> 5, pp.125-140.

한인기 (2004). 초창기(1935-1940년대) 모스크바 수학 경시대회와 영재교육, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(3)**, pp.57-72.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남: 경상대출판부.

한인기 · 꼴랴긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제, 서울: 승산.

한인기 · 이지은 (2004). 직사각형의 분할과 키르히호프의 법칙에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.277-288.

Formin, Genkin & Itenberg (1996). Mathematical Circles(Russian Experience)/ 김부윤 · 엄장일 역 (2004). 수학동아리, 서울: 보성각.

A Study of Administrating the Mathematical Circle in Whole-day Club Activities in a Middle School

Han Inki

Dept of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea

E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

Kim Hyunjeong

Hadong Joongang Middle School, hadong-eub, hadong-gun, Gyeongnam, 667-804, Korea

E-mail : nuyh-k@hanmail.net

In this paper we study on administration system and student's activities in whole-day club activities. As a result of this study we propose teaching methods, mathematical program for the year, and concreate teaching-learning materials for mathematical circle in whole-day club activities.

---

* ZDM Classification : D43

* MSC2000 Classification : 97B99

* Key words : administration system, problem solving, whole-day club activities, mathematical program for the year