韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제 3호, 2006. 9. 469-482

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20, No. 3, Sep. 2006. 469-482

종이학을 접고 펼친 흔적을 통한 수학탐구활동

권 영 인 (경상대학교)
서 보 억 (계성중학교)

종이접기를 하고 그 종이를 다시 펼치면 그 흔적이 남는다. 이러한 흔적을 통해 얻을 수 있는 수학적인 사실에 대해 생각해 보았다. 펼친 흔적에서 삼각형과 사각형의 다양한 종류에 대해 살펴보고, 이러한 평면도형의 각의 크기, 변의 길이, 도형의 넓이를 구하는 활동을 통해 수학적 사실을 탐구하였다. 또한, 닮음인 삼각형을 찾는 활동을 통해 닮음인 삼각형 사이의 관계를 탐구하였다. 마지막으로, 도형의 성질을 탐구하였는데 그 중에서도, 피타고라스의 정리를 창의적인 방법으로 증명하여 보았다. 이러한 활동이 수학교육과정과 수학프로그램 개발에 시사점을 주리라 생각된다.

I. 서 론

종이로 무엇을 접는다는 것은 누구에게나 자연스러운 활동중의 하나이다. 실제로 종이가 중국에서 1세기 경 만들어진 후, 사람들은 여러 가지 모양으로 종이접기를 해 왔고, 21세기 최첨단시대인 지금도 계속 종이를 접으면서 생활하고 있다. 많은 수학자들과 수학교육학자들은 수학의 대중화에 많은 관심을 가지고 있으며 대중화를 위해 부단히 노력하고 있다. 수학의 태동은 우리의 생활의 중심에서 출발하였다. 하지만, 수학이 급속히 발전하면서 수학이 우리의 생활에서 조금씩 멀어지고 있다는 생각을 하고 있다. 이제 많은 수학교육학자들에 의해 수학이 우리의 생활속으로 들어오기를 기대하고 있다. 이것이 수학을 살리는 길이라고 생각하기 때문이다.

우리의 생활 속에 들어있는 수학 중 한 가지가 본 연구에서 시도하는 종이접기이다. 종이접기는 우리의 일상이다. 어디에나 존재하는 종이 위에 우리는 수많은 작업들을 시도하고 그것을 가지고 생활하고 있다. 하지만 그 속에 들어있는 수학적인 의미를 발견하려고 노력하는 사람은 드물다. 종이를 접는 활동에서 수학적인 의미로 나아가는 것은 수학교육의 흥미유발과 수학화에 아주 큰 시사점을 줄 수 있다고 생각된다. 따라서, 본 연구에서는 종이접기의 대명사인 종이학을 통해 수학적인 사실을 탐색하고 연구하고자 한다. 이를 통해 종이학 속에 담긴 수학적인 의미를 발견하고 발전시키는 것은 의미있는 연구라고 생각되어진다.

종이접기에 대한 선행연구를 살펴보면, 다음 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 종이접기를 통한 교

---

* ZDM 분류 : A23
* MSC2000분류 : 97A20
* 주제어 : 종이접기, 종이학, 피타고라스의 정리

과서에 제시된 정리의 증명을 보조하고 연계하려는 연구이다. 신현용·한인기(2002)은 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계가능성에 관한 연구를 통해 이러한 가능성을 보여주고 있다. 둘째, 종이접기에 담긴 대수학적 의미를 파악하는 연구이다. 신현용·한인기·서봉건·최선희(2002)은 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용에 대해 연구를 수행하였다. 셋째, 종이접기를 이용한 기하학 혹은 대수적인 수업자료 개발에 대한 연구이다 . 김향숙(2006), 최선희(2002), 방지연(2002), 김소연(2002), 김은희(2003),김석룡(1989) 등은 기하학적인 학습자료개발을 장지현(2004), 강면진(2002) 등은 대수적인 학습자료를 개발하였다. 이러한 연구들은 학생들이 어려워하는 논증을 쉽게 지도하는데 기여하고 있으며, 대수 및 기하 자료 개발을 통해 다양한 수학적 활동이 가능하게 만들었다.

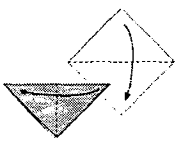
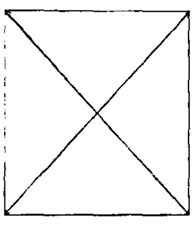
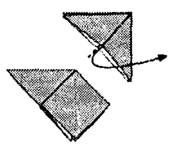
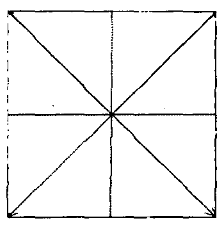
앞의 선행연구들은 종이접기를 통해 이루고자 하는 수학적인 결과들 예를들면, 각의 삼등분, 정다각형의 작도, 삼각형의 수심과 무게중심의 논증 등 종이를 접는 활동을 통해 이루고자 하는 한가지 수학적 사실에만 관심이 있다. 하지만, 본 연구에서는 접기 활동을 통해 얻어진 종이를 펼쳐서 접힌 흔적을 추적하고 그 속에 담긴 여러 가지 수학적인 사실을 탐색하는데 목적이 있다. 여기서는 종이학 접기를 통해 얻을 수 있는 다양한 수학적인 의미를 탐구하고자 한다. 이러한 탐구활동을 통해 수학교육과정과 수학영재교육프로그램에 의미있는 시사점을 주고자 한다.

II. 종이학 접기 절차와 펼친 흔적 탐색

1. 종이학 접기 절차의 탐색

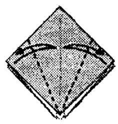
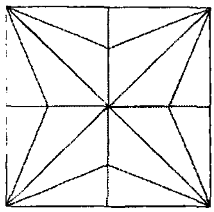
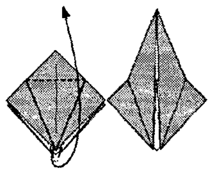
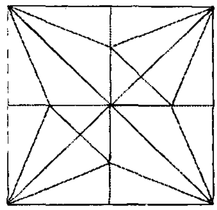
가. 1단계 : 정사각형을 두 대각선 방향으로 각각 접는다. 정사각형의 성질에 의해서 두 대각선은 수직이등분으로 만나게 되고, 각은 이등분되어진다.

나. 2단계 : 정사각형의 두 쌍의 대변을 연결하여 접는다. 정사각형이 성질에 의해서 합동이 되는 8개의 직각이등변삼각형이 형성되어진다.

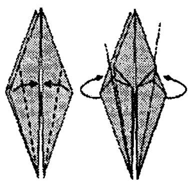
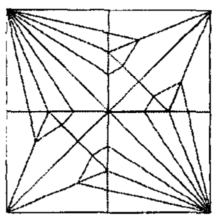
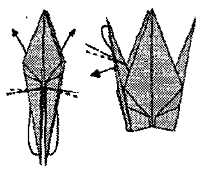
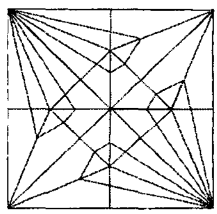
1단계		2단계	
종이접기	종이펼치기	종이접기	종이펼치기
 1단계		 2단계	
두 대각선이 작도되어진다. 주어진 도형이 정사각형이므로 두 대각선은 서로 수직이등분한다.		두 쌍의 대변의 중점을 연결한 선분이 작도되어진다. 두 선분은 서로 수직이다.	

다. 3단계 : 각을 이등분하여 종이접기를 하였으므로 정사각형의 각 꼭지점을 4등분하는 즉, 각각의 각의 크기가 $\frac{\pi}{8}$가 되는 각의 4등분선이 형성되어진다.

라. 4단계 : 이 단계에서 위쪽 방향으로 종이접기를 실시하면 정사각형의 중앙부분에 작은 정사각형이 형성되어진다.

3단계		4단계	
종이접기	종이펼치기	종이접기	종이펼치기
 3단계		 4단계	
각각의 꼭지점에서 각을 4등분하는 선분이 작도되어진다. 각각의 각의 크기는 $\frac{\pi}{8}$라디안이다.		3단계에서 얻은 각의 이등분선들의 교점을 이은 두 선분을 작도한다.	

마. 5단계와 6단계

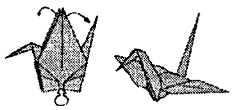
5단계		6단계	
종이접기	종이펼치기	종이접기	종이펼치기
 5단계		 6단계	
좌상단와 우하단의 각의 이분선을 작도하고, 다른 작은 선분을 작도한다.		4단계에서 그은 선분과 동일한 방법으로 나머지 두 선분이 작도되어진다.	

2. 펼친 흔적의 탐색

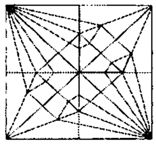
가. 최종완성 종이학과 펼친 그림

아래 <그림 1>은 앞의 절차에 따라 종이학을 완성한 그림을 보여주고 있고, <그림 2>는 이 종이학을 펼쳤을 때 나타나는 흔적을 작도한 것이다. 그림2에서 보는 것과 같이 두 대각선의 교점을 원

점으로 하는 좌표평면으로 본다면 제 1사분면과 제 3사분면이 서로 대칭을 이루고 있고, 제 2사분면과 제 4사분면이 서로 대칭을 이루고 있다.



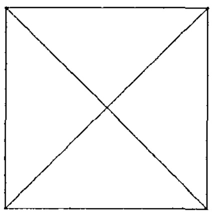
<그림 1>



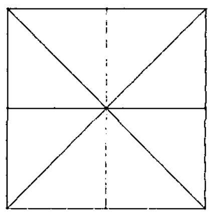
<그림 2>

나. 펼친 그림의 결정을 위한 컴퓨터 프로그램의 이용

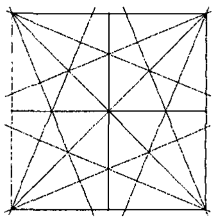
Cabri Geometry라는 프로그램을 이용하여 종이학의 펼친 흔적을 이용하여 작도하고 그 결과를 이용하여 펼친 그림을 결정하도록 하자.



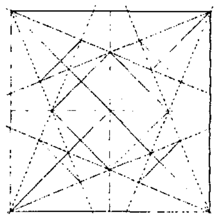
<그림 3>



<그림 4>



<그림 5>



<그림 6>

그림1에서 얻은 그림2와 같은 이러한 비대칭구조는 종이학이 만들어지는 과정을 보면 쉽게 이해되어진다. 종이학이 한쪽 방향 그림2에서는 대각선 방향으로 만들어지기 때문이다. 이러한 비대칭구조를 대칭구조로 변환하여 탐구활동을 진행하는 것이 규칙의 발견이나 흥미 유발에 더 효과적일 것으로 생각되어 종이학 접기 절차 제 5단계가 비대칭구조를 결정하고 있으므로 이 단계를 생략하도록 한다. <그림 3>~<그림 6>은 각각의 단계를 프로그램을 이용하여 그린 결과이다.

수학탐구활동을 위해 결정되어진 도면은 제 1사분면부터 제 4사분면까지 x축대칭, y축대칭, 원점대칭을 이루고 있고, 이 대칭구조를 바탕으로 수학탐구활동을 다양한 주제를 중심으로 학생주도적으로 어떻게 진행하여 질 수 있는지에 대해 살펴보기로 한다.

III. 펼친 흔적을 통한 수학탐구활동

이제 구체적으로 펼친 흔적을 통한 여러 가지 수학적인 내용들을 탐색해 보도록 하자. 중등학교 수학교육과정에 입각하여 여러 가지 평면도의 유형, 평면도형의 측정과 삼각형의 합동, 삼각형의 닮음, 도형의 성질 탐색이라는 네 가지 소주제로 나누어 살펴보기로 하자.

1. 여러 가지 평면도형의 유형

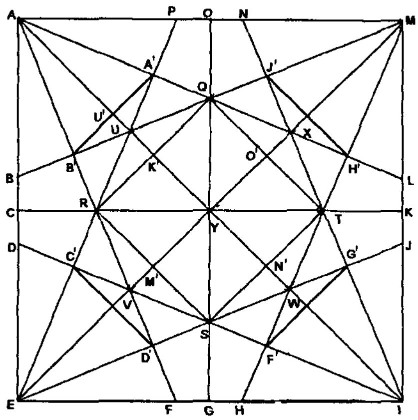
앞에서 살펴본 종이접기 절차와 펼친 흔적을 이용하면 직관적으로 다음과 같은 여러 가지 평면도형을 찾을 수 있다.

가. 여러 가지 삼각형 찾기

(1) 이등변삼각형을 찾아보자. 삼각형ARQ, 삼각형QAB, 삼각형ABU, 삼각형APU, 삼각형URQ, 삼각형UA′B′ 등이 있다.

(2) 직각삼각형을 찾아보자. 삼각형ABB′, 삼각형AUB′, 삼각형AB′U′, 삼각형AU′A′, 삼각형APA′, 삼각형AOQ, 삼각형URK′, 삼각형UQK′, 삼각형UU′B′, 삼각형UU′A′ 등이 있다.

(3) 직각이등변삼각형을 찾아보자. 삼각형YQR, 삼각형RYK′, 삼각형URB′, 삼각형UQB′ 등이 있다.



<그림 7>

나. 여러 가지 사각형 찾기

(1) 사다리꼴을 찾아보자. 사각형RVYK′, 사각형RUU′B′ 등이 있고, 사각형REIT, 사각형RSC′D′ 등은 등변사다리꼴이 된다.

(2) 평행사변형을 찾아보자. 사각형REHT, 사각형PRTM 등이 있다.

(3) 마름모을 찾아보자. 사각형AVIX, 사각형MUEW 는 마름모이다.

(4) 직사각형을 찾아보자. 사각형ACKM, 사각형RSN′K′ 등은 직사각형이다.

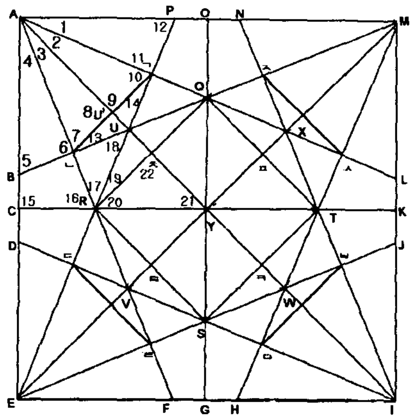
(5) 정사각형을 찾아보자. 사각형AEIM, 사각형A′C′F′H′, 사각형RSTQ 등은 정사각형이다.

2. 평면도형의 측정[1]과 삼각형의 합동

여기에서는 종이접기를 통해 얻어지는 도형들의 각의 크기와 흔적들의 변의 길이, 평면도형의 넓이를 구해 보도록 하자.

가. 각의 크기 : 종이학을 접는 경우 모든 접기 활동이 각을 이등분하는 활동으로만 이루어져 있다. 따라서, $\frac{\pi}{2}$ 라디안을 이등분하거나 사등분하여 만들어지는 각의 크기로 나타내어질 것이다.

1) 측정의 편의를 위해서 흔적의 중심에 있는 점 Y를 좌표평면의 중심으로 생각하고 제 2사분면에 있는 흔적들 위주로 측정활동을 진행한다.



<그림 8>

(1) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{4}\angle R = \frac{\pi}{8}$

(2) $\angle 5 = \angle 12 = \angle 16 = \angle R - \angle 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$

(3) $\angle 6 = \angle 8 = \angle 9 = \angle 11 = \angle 15 = \angle 22 = \angle R = \frac{\pi}{2}$

(4) $\angle 7 = \angle 10 = \angle R - \angle 3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$

(5) $\angle 13 = \angle 14 = \angle R - \angle 7 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{8}$

(6) $\angle 17 = (\angle 10 + \angle 14) - (\angle 2 + \angle 3)$

$$= \angle R - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(7) $\angle 18 = \angle R - \angle 17 = \frac{\pi}{4}$

(8) 평행선의 성질에 의해서 $\angle 19 = \angle 14 = \frac{\pi}{8}$

(9) $\angle 20 = \angle 21 = \pi - (\angle 16 + \angle 17 + \angle 19) = \frac{\pi}{4}$

나. 변의 길이 : 종이의 한 변의 길이를 단위길이라고 하자.(즉, $\overline{AM} = 1$)

(1) 가장 긴 변의 길이의 측정 : 가장 긴 변은 선분 AI이다. 즉, $\overline{AI} = \sqrt{2}$

(2) $\overline{AO} = \overline{OM} = \overline{MK} = \overline{KY} = \overline{YC} = \overline{AC} = \overline{OY} = \overline{CY} = \overline{AK'} = \frac{1}{2}$

(3) $\overline{AY} = \overline{YM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $QY = \overline{YR} = \overline{YU} = a$라 하면, $\overline{CR} = \overline{OQ} = \overline{QK'} = \overline{RK'} = \overline{OY} - QY = \frac{1}{2} - a$ 이다. 삼각형AOY에서 $\overline{AQ}$는 $\angle OAY$의 이등분선이므로,

$$\overline{AY} : \overline{AO} = \overline{YQ} : \overline{OQ}$$

이 성립한다. 따라서,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2} = a : \frac{1}{2} - a$$

이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

즉, $\overline{QY} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 이다.

(5) $\overline{AQ}=\overline{AR}=b$ 라고 하자. 삼각형AQO가 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의해서,

$$\overline{AO}^2+\overline{OQ}^2=\overline{AQ}^2$$

이므로, $(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^2=b^2$이다. 따라서, $b=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$ 이다.

(6) $\overline{AP}=\overline{AB}=\overline{AU}=c$라 하자. $\triangle AEP \backsim \triangle CER$이고, 닮음비가 $2:1$이므로, $\overline{AP}=2\cdot\overline{CR}$ 이다. 즉, $c=2\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}-1$ 이다.

(7) $\overline{AA'}=\overline{AB'}=d$라고 하면, 삼각형APA′ 은 직각삼각형이므로 피타고라스정리와 앞의 결과로부터

$$d^2+\overline{A'P^2}=(\sqrt{2}-1)^2 \qquad ---①$$

$$\overline{A'P^2}=\frac{1}{2}\overline{PU} \qquad ---②$$

이고, 삼각형AUP에서 코사인 제2법칙에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\overline{PU^2}=\overline{AU}^2+\overline{AP}^2-2\overline{AU}\cdot\overline{AP}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\overline{PU^2}=(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-1)^2-2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{PU^2}=10-7\sqrt{2}$$

따라서, 이 결과와 ①, ②로부터 $d=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ 를 얻는다.

(8) $\overline{PO}=\overline{BC}=\overline{AO}-\overline{AP}=\frac{1}{2}-(\sqrt{2}-1)=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(9) $\overline{A'Q}=\overline{B'R}=\overline{A'U}=\overline{A'P}=\overline{B'U}=\overline{B'B}=\frac{1}{2}\overline{UP}=\frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2}$ 이다.

(10) $\overline{UK'}=\overline{UY}-\overline{K'Y}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}-\overline{K'Y}=e$ 라고 두자. 여기서, $\overline{K'Y}$는 다음과 같다.

$$\overline{K'Y}=\overline{RK'}=\overline{QK'}=\frac{1}{2}\overline{RQ}=\frac{1}{2}\overline{RY}\sqrt{2}$$

따라서, $\overline{K'Y}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$이고, $e=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(11) $\overline{UQ}=\overline{UR}=f$ 라고 두면, 삼각형UK′Q가 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의해서 $f=\frac{\sqrt{20-14\sqrt{2}}}{2}$ 를 얻는다.

(12) $\overline{A'B'}=g$ 라고 두면, $\overline{A'U'}=\frac{1}{2}\overline{A'B'}=\frac{1}{2}g$ 이다. 따라서, 삼각형의 닮음비에 의해서,

$$\overline{A'B'}:\overline{RQ}=\overline{A'U}:\overline{UR}$$

이 성립하므로, $g=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 이다. 따라서, $\overline{A'U'}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ 이다.

(13) $\overline{UU'}=h$ 라고 두면, 삼각형A'UU' 이 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리와 (9), (12)의 결과로부터 $h=\dfrac{\sqrt{18}-4}{4}$ 를 얻는다.

(14) $\overline{AU'}=i$ 라고 두면, 삼각형AA'U' 이 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리와 (7), (12)의 결과로부터 $i=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 를 얻는다.

다. 삼각형의 합동과 도형의 넓이 : 지금까지의 측정결과로부터 흔적에 의해서 얻어진 삼각형 사이의 합동관계와 그 넓이를 구해보자.

(1) $\triangle ABB' \equiv \triangle APA' \equiv \triangle EDC' \equiv \triangle EFD' \equiv \triangle IHF' \equiv \triangle IJG' \equiv \triangle LMH' \equiv \triangle NMJ'$ 이다.

$$\triangle ABB' = \frac{1}{2}\overline{BB'}\cdot\overline{B'A} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{2}-4}{8}$$

(2) $\triangle AA'B' \equiv \triangle EC'D' \equiv \triangle IF'G' \equiv \triangle MH'J'$ 이다.

$$\triangle AA'B' = \frac{1}{2}\overline{A'B'}\cdot\overline{AU'} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{8}$$

(3) $\triangle AA'B' \equiv \triangle UC'D' \equiv \triangle WF'G' \equiv \triangle XH'J'$ 이다.

$$\triangle UA'B' = \frac{1}{2}\overline{A'B'}\cdot\overline{UU'} = \frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{18}-4}{4} = \frac{5\sqrt{2}-7}{8}$$

(4) $\triangle BRU \equiv \triangle DRV \equiv \triangle SVF \equiv \triangle SHW \equiv \triangle TWJ \equiv \triangle TLX \equiv \triangle QXN \equiv \triangle QRU$ 이다.

$$\triangle BRU = \frac{1}{2}\overline{BU}\cdot\overline{LR} = \overline{BL}\times\overline{LR} = \overline{BL}^2 = \frac{10-7\sqrt{2}}{4}$$

(5) $\triangle BRC \equiv \triangle CRD \equiv \triangle RVM' \equiv \triangle VSM' \equiv \cdots \equiv \triangle URK'$ 이다.

$$\triangle BCR = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CR} = \frac{1}{2}\times\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-7}{8}$$

(6) $\triangle RYK' \equiv \triangle QYK' \equiv \triangle QYO' \equiv \cdots \equiv \triangle YTO'$ 이다.

$$\triangle RYK' = \frac{1}{2}\overline{RK'}\cdot\overline{K'Y} = \frac{1}{2}\times\overline{RK'}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}$$

3. 삼각형의 닮음

각의 크기의 측정을 바탕으로 닮음의 관계가 성립하는 삼각형들의 모임들을 찾고 그들 사이의 닮음비를 탐구해 보자.

가. 삼각형ABL과 닮음인 관계가 있는 삼각형 찾기

(1) $\triangle ABL \backsim \triangle ALU' \backsim \triangle RUK' \backsim \triangle A'UU'$ 이다. 이들의 닮음비를 구해 보자.

$$\overline{AB} : \overline{AL} : \overline{RU} : \overline{A'U} = \sqrt{2}-1 : \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} : \frac{\sqrt{20-14\sqrt{2}}}{2} : \frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2}$$

따라서, 다음과 같은 닮음비를 얻을 수 있다.

$\overline{AB}: \overline{AL}: \overline{RU}: \overline{A'U} = 1: \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}: \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}: \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(2) $\triangle ABL \backsim \triangle ARC \backsim \triangle AVY \backsim \triangle AFE$ 이다. 이들의 닮음비를 구해 보자.

$\overline{AB}: \overline{AR}: \overline{AV}: \overline{AF} = \sqrt{2}-1: \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}: \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{20-14\sqrt{2}}}{2}: \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

따라서, 다음과 같은 닮음비를 얻을 수 있다.

$\overline{AB}: \overline{AR}: \overline{AV}: \overline{AF} = 1: \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}: \frac{3\sqrt{2}+1}{4}: \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

위의 (1)과 (2)의 결과로부터 $\triangle ALU'$, $\triangle ARC$, $\triangle AVY$의 닮음비가 $1 : \sqrt{2} : 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있고, 또한 이로부터 $\triangle AA'B'$, $\triangle ARQ$, $\triangle AVX$의 닮음비가 $1 : \sqrt{2} : 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

나. 삼각형RUL과 닮음인 관계가 있는 삼각형 찾기

$\triangle RUL \backsim \triangle RYK' \backsim \triangle RQY \backsim \triangle RTQ \backsim \triangle EIY \backsim \triangle IAE$이다. 이들의 닮음비를 구해 보자.

$\overline{RU}: \overline{RY}: \overline{RQ}: \overline{RT}: \overline{EI}: \overline{AI} = \frac{\sqrt{20-14\sqrt{2}}}{2}: \frac{2-\sqrt{2}}{2}: \sqrt{2}-1: 2-\sqrt{2}: 1: \sqrt{2}$

이로부터, $\triangle RYK'$, $\triangle RQY$, $\triangle RTQ$의 닮음비가 $1: \sqrt{2}: 2$임을 알 수 있다.

다. 삼각형MQX와 닮음인 관계가 있는 삼각형 찾기

$\triangle MQX \backsim \triangle YMQ \backsim \triangle MBE$ 이다. 이들의 닮음비를 구해 보자.

$\overline{MQ}: \overline{MY}: \overline{ME} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}: \frac{\sqrt{2}}{2}: \sqrt{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}: 1: 2$

이로부터, $\triangle YMQ$, $\triangle MBE$의 닮음비가 $1 : 2$임을 알 수 있다.

4. 도형의 성질 탐색

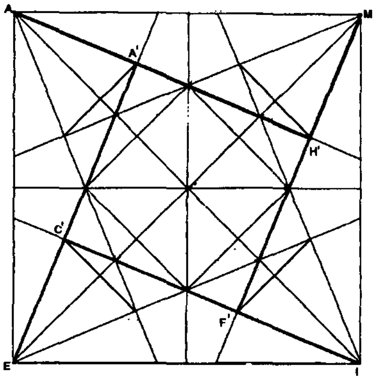
가. 피타고라스의 정리

(1) 그림9에서 정사각형AEIM은 세 개의 합동인 직각삼각형과 한 개의 정사각형으로 나눌 수 있다. 삼각형AEA'에서 $\overline{AA'} = a$, $\overline{A'E} = b$, $\overline{AE} = c$ 라 하면, 다음과 같이 피타고라스 정리를 증명할 수 있다.

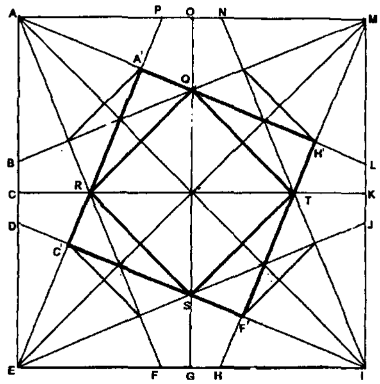
$$\begin{aligned} \square AEIM &= 4\times\triangle AA'E + \square A'C'F'H' \\ c^2 &= 4\times\frac{1}{2}\times ab + (b-a)^2 \\ c^2 &= a^2+b^2 \end{aligned}$$

(2) <그림 10>에서 정사각형A'C'F'H' 은 세 개의 합동인 직각삼각형과 한 개의 정사각형으로 나눌 수 있다. 여기서, $\overline{A'R}=a$, $\overline{A'Q}=b$, $\overline{RQ}=c$ 라 하면, 다음과 같이 피타고라스 정리를 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} \square A'C'F'H' &= 4\times\triangle A'QR + \square QRST \\ (a+b)^2 &= 4\times\frac{1}{2}\times ab + c^2 \\ a^2+b^2 &= c^2 \end{aligned}$$



<그림 9>



<그림 10>

(3) <그림 11>에서와 같은 방법으로 다음과 같은 단계로 종이학 접기 흔적을 잘라내면 피타고라스 정리를 증명할 수 있다. 이 때, 직각삼각형AEA'에서 $\overline{AE}=c$, $\overline{EA'}=b$, $\overline{AA'}=a$ 라고 하자.

1단계 : 정사각형AEIM 은 c^2 이다.

2단계 : 직각삼각형 AMH'을 직각삼각형AIE''로 평행이동한다.

3단계 : 직각삼각형 MLH'을 직각삼각형ABB''으로 평행이동한다.

4단계 : 직각삼각형 BER을 직각삼각형 ILL''으로 평행이동한다.

따라서, 정사각형 AB'RA' 은 a^2 이고, 정사각형EE''L''A' 은 b^2이다. 즉, c^2이 a^2과 b^2의 합으로 분리되었으므로 피타고라스 정리가 증명된다.

나. 직각삼각형의 닮음의 활용

삼각형ABM은 ∠A가 ∠R인 직각삼각형이다. ∠A에서 대변 $\overline{BM}$에 내린 수선의 발을 B'이라고 하면, $\triangle ABB' \backsim \triangle AMB' \backsim \triangle ABM$ 이고, 다음 세 식을 얻을 수 있다.

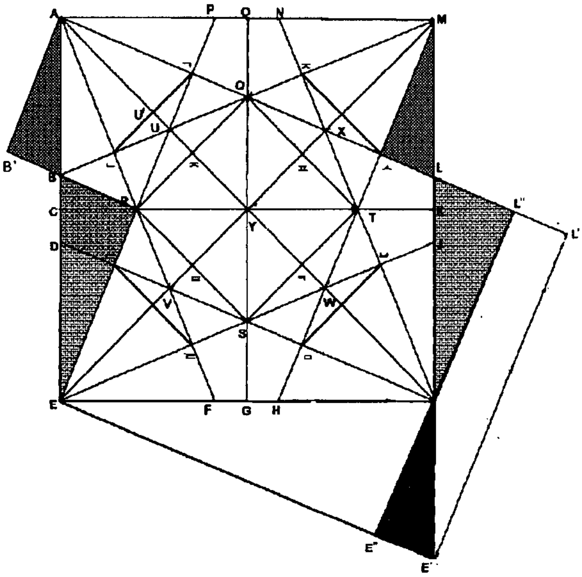
$$\overline{AB}^2=\overline{BB'}\times\overline{BM}\ ,\quad \overline{AM}^2=\overline{MB'}\times\overline{BM}\ ,\quad \overline{AB'}^2=\overline{BB'}\times\overline{MB'}$$

그런데, 이 결과를 앞의 <그림 11>에 적용하여 보자.

(1) $\overline{AE}^2=\overline{AM}^2=\overline{MB'}\times\overline{BM}=\overline{EA'}\times\overline{EE'}$ 이다.

즉, 정사각형AEIM = 직사각형$A'EE'L'$이다.

(2) $\overline{AA'}^2 = \overline{AB'}^2 = \overline{BB'} \times \overline{MB'} = \overline{L'L''} \times \overline{E'L'}$이다. 즉, $\overline{AA'}^2$ 은 직사각형L'L''E'E''이다.



<그림 11>

다. 삼각형의 내심과 수심

(1) 삼각형의 내심 : 삼각형의 세 각의 이등분선의 교점을 찾아보자.

(가) 삼각형AEI 의 내심은 점 V이다.

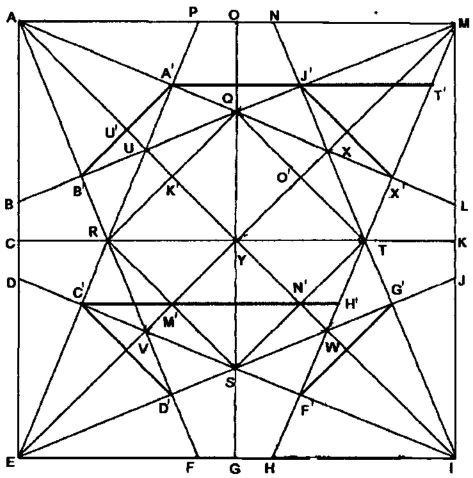
(나) 삼각형EIY 의 내심은 점 S이다.

(2) 삼각형의 수심 : 세 수선의 교점을 찾아보자.

(가) 예각 삼각형ARQ의 수심은 점 U인데 삼각형의 내부에 있다.

(나) 직각 삼각형RTQ의 수심은 점 Y인데 삼각형의 빗변에 있다.

(다) 둔각 삼각형SWT의 수심은 점 I인데 삼각형의 외부에 있다.



<그림 12>

라. 도형의 변환 : 평행사변형 REHT의 넓이는 정사각형A'C'F'X' 과 같다. 왜냐하면, 평행사변형REHT를 <그림 12>와 같이 직선 $\overline{PE}$와 평행하도록

선분 $\overline{RA'}$만큼 평행이동시키자. 그러면, 평행사변형REHT는 평행사변형A'C'H'T'는 서로 합동이다. 그런데, 평행사변형A'C'H'T'과 정사각형A'C'F'X' 은 $\overline{A'C'}$을 같은 밑변으로 가지고 높이가 같으므로 넓이가 같다. 따라서, 평행사변형REHT 과 정사각형A'C'F'X'은 같은 넓이를 가진다.

V. 결 론

지금까지 종이학을 접고 펼친 흔적을 통해 얻을 수 있는 여러 가지 수학적인 사실을 탐색하였다. 종이학의 펼친 흔적을 결정하기 위해서 6가지 단계를 설정하여 구체적으로 펼친 흔적을 결정하였다. 결정된 흔적을 바탕으로 다음 네 가지 주제로 나누어 그 결과를 연구하였다.

첫째, 펼친 흔적에 나타난 평면도형의 가장 대표적인 삼각형과 사각형의 유형을 찾아 보았다. 삼각형은 이등변삼각형, 직각삼각형, 직각이등변삼각형, 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형 등 정삼각형을 제외한 모든 유형이 발견되어졌다. 사각형은 사다리꼴, 등변사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형 등 모든 분류가능한 유형이 발견되어졌다.

둘째, 평면도형과 관련된 측정활동으로 각의 측정, 변의 길이의 측정, 넓이의 측정을 통해 발견할 수 있는 수학적 사실과 이용된 수학적 사실을 탐구하였다. 이러한 측정을 위해 삼각형의 합동과 닮음의 성질, 코사인 제2법칙, 피타고라스의 정리등 많은 수학적인 내용을 사용할 수 있었다.

셋째, 닮음인 관계가 있는 삼각형을 찾아보았다. 그리고 이들 사이의 닮음비를 탐구하여 닮음인 삼각형 사이의 관계를 탐구하였다.

넷째, 도형의 여러 가지 성질을 탐색하였다. 펼친 흔적을 통해 피타고라스의 정리를 창의적인 방법으로 증명하였다. 또한, 직각삼각형의 닮음의 성질을 활용을 통해 피타고라스의 정리를 재확인하였다. 그리고, 삼각형의 내심과 외심, 도형의 넓이의 변환에 대한 수학적 사실도 추출하여 보았다.

본 연구에서는 종이학을 접는 활동을 통해 접힌 흔적을 추적하고 그 속에 담긴 여러 가지 수학적인 사실을 탐색하였다. 종이학의 흔적을 탐구하는 활동을 통해 수학교육과정과 수학영재교육프로그램에 의미있는 시사점을 줄 것으로 기대된다. 또한, 이와 유사한 활동을 통해 일상 생활속에 수학적인 의미를 부여하고 탐색하는 계기가 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

강면진 (2002). 구성주의 활동에 의한 이차곡선 지도에 관한 연구, 단국대 교육대학원 석사학위 논문.

김석룡 (1989). 종이접기에 의한 정다각형의 작도, 경상대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김소연 (2002). 공간능력 시장을 위한 종이접기 활용 사례연구, 순천대 교육대학원 석사학위 논문.

김은희 (2003). 종이접기를 활용한 수학과 교수-학습에 관한 연구, 부산대 교육대학원 석사학위 논문.

김향숙 · 박진석 · 윤삼열 · 전제동 · 방승진 · 김영미 · 박정미 (2006). 종이접기를 활용한 도형의 이해, 서울 : 경문사

방지연 (2002). 종이접기를 활용한 중학교 수학심화학습 자료에 관하여, 연세대 교육대학원 석사학위 논문.

신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희 (2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> **제13(2)집**, pp.457-475. 서울 : 한국수학교육학회

장지현 (2004). 종이접기를 통한 이차방정식의 지도에 관한 연구, 순천대 교육대학원 석사학위 논문.

최선희 (2002). 평면도형의 성질 탐구를 위한 종이접기 활동 수업 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

한인기 · 신현용 (2002). 삼각형의 접기활동과 논증의 연계가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **제41권 1호**, pp.79-90. 서울 : 한국수학교육학회

Mathematical investigation activity through folding and unfolding paper crane

Kwon young-in
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University,
900 Gajwa-dong, Jinju, Korea
E-mail : yikwon@nongae.gsnu.ac.kr

Suh bo-euk
Keisung middle school, 277, Dae-shin dong, Juong-gu, Daegu, Korea
E-mail : eukeuk@tgedu.net

It will give much interest both to the teacher and student that paper crane makes interesting mathematical investment possible. It is really possible for the middle school students to invest mathematical activity such as the things about triangle and square, resemblance, Pythagorean theorem. I reserched how this mathematical investment possible through folding and unfolding paper crane and analyzed the mathematical meaning.

* ZDM Classification : A23
* MSC2000 Classification : 97A20
* Key words : paper folding, paper crane, Pythagorean Theorem