

VLAD 관리도의 설계

이재현¹⁾ 정상현²⁾

요약

현대 사회에서 건강관리와 공중보건 분야의 이상원인 탐지와 감시를 위하여 관리도 기법을 많이 사용하고 있다. 예를 들어, 외과의사의 수술 수행성과의 변화나 만성병과 전염병 등의 비율 변화를 탐지하는데 관리도를 사용할 수 있다. 이 논문에서는 건강관리와 공중보건 분야에서 많이 사용하는 VLAD (variable life-adjusted display) 관리도를 소개하고, 이 관리도에서 관리한계선을 설정하는 방법을 제안하였다.

주요용어: 건강관리, 공중보건, 위험도 조정 관리도, VLAD 관리도.

1. 서론

통계적 공정관리 (statistical process control: SPC)에서 관리도 (control chart)는 생산 공정에서 변동의 원인이 되는 공정 모수의 변화를 탐지하는 도구로서 널리 사용되어 왔다. 대표적인 관리도로는 Shewhart 관리도, CUSUM (cumulative sum) 관리도, 그리고 EWMA (exponentially weighted moving average) 관리도 등이 있다. 관리도는 관리통계량 (control statistic)이 미리 설정된 관리한계 (control limit)를 벗어날 경우 이상원인 (assignable cause 또는 special cause)이 발생했다는 신호 (signal)를 주게 된다.

우리나라에서는 생산의 공정관리 분야에서 관리도를 사용하는 것에 대하여 주로 연구하고 있지만, 외국에서는 건강관리 (health-care)와 공중보건 (public-health) 분야에서 탐지 및 감시를 위하여 관리도 기법을 사용하여 왔다. 건강관리 분야에서는 병원 또는 의사의 성과를 평가하기 위하여 관리도 기법을 사용하고 있는데, 예를 들어 외과의사의 수술 후 사망률, 그리고 진료 또는 수술의 대기시간 등이 그것이다. 또한 공중보건 분야에서 신생아의 기형아, 만성병, 그리고 전염병 등의 비율 변화를 탐지할 때 관리도 기법을 사용하여 왔다.

이 논문에서는 건강관리와 공중보건 분야에서 사용하는 관리도 기법이 생산 공정에서 사용하는 그것과 어떠한 차이가 있는지를 설명하고, 건강관리와 공중보건 분야에서 많이 사용하는 VLAD 관리도를 소개한다. 또한 VLAD 관리도에서 관리한계선을 설정하는 방법을 제안하고, 설정된 관리한계선의 효율성을 확인하였다.

1) (156-756) 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 수학과통계학부, 부교수

E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

2) (156-756) 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 대학원 통계학과, 석사과정

E-mail: kami1001@nate.com

2. 공중보건과 생산 공정 분야에서 관리도 적용의 차이점

공중보건 분야 (건강관리 포함)에서 사용하는 관리도 기법과 일반 생산 공정에서 사용하는 관리도 기법에는 다음과 같은 차이점이 있다. 이 내용의 많은 부분은 Woodall (2006)이 발표한 review paper를 참고하였다.

첫째, 생산 공정에서 사용하는 데이터의 형태는 연속형 데이터가 일반적이지만 반하여 공중보건에서는 이산형 데이터 형태가 대부분이다. 따라서 포아송 (Poisson), 기하 (geometric), 그리고 지수 (exponential) 모형에 기초한 관리도가 많이 사용되고 있다. 이와 관련된 참고문헌으로는 Woodall (1997), Yang 등 (2002), 그리고 Xie 등 (2002) 등이 있다.

둘째, 공중보건에서 얻어진 데이터는 데이터의 특성에 따라 관리도에 적용하기 전에 위험도 조정을 수행하는 경우가 많다. 예를 들어 심장외과 수술 후 사망률 (일정 기간 이내 사망하는 비율)을 탐지하고 관리할 경우, 연령과 건강상태 등이 서로 상이한 수술 환자들의 사망률이 동일하다고 가정하는 것은 이론적으로 타당하지 않다. 따라서 연령과 건강상태 등을 독립변수로 고려한 로지스틱 회귀 (logistic regression) 모형 등을 통하여 개별적인 환자의 사망률을 추정하고 있다. 이렇게 위험도를 조정한 사망률을 관리상태 (in-control state)에서의 확률로 사용하는 것은 생산 공정에서 모든 개체가 동일한 불량률 또는 결점률을 갖는다고 가정하는 것과 다르다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 위험도를 조정한 후 사용하는 관리도를 위험도 조정 관리도 (risk-adjusted chart)라고 한다.

셋째, 생산 공정에서 관리도 기법과는 달리 공중보건 분야에서는 일반적으로 표본의 크기와 표본추출간격 등의 표본추출에 대하여 중요하게 강조하지 않는다. 예를 들어 특정 병원이나 의사의 수술 후 사망률이나 특정 지역의 선천적 기형률 등 많은 부분에서 전수조사 (100% inspection)를 실시하고 있다.

넷째, 생산 공정에서는 관리도에서 이상상태 (out-of-control state)라는 신호가 발생하였을 경우 그 원인을 규명하고 이 이상원인을 제거하여 빨리 공정을 관리상태로 되돌리고 있다. 이와는 달리 공중보건 분야에서는 이상상태라는 것이 탐지된 경우 이를 관리상태로 빨리 되돌릴 수가 없는 경우가 대부분이다.

다섯째, 생산 공정에서 사용하는 관리도 기법에는 Phase I 단계와 Phase II 단계를 구분하고 있다. Phase I 단계에서는 예비표본을 통하여 공정의 상태를 판단하고 공정이 관리상태인 경우 공정의 모수를 추정하여 Phase II 단계에서 사용할 수 있는 관리한계를 제시하고 있으며, Phase II 단계에서 매 표본시점 마다 표본을 추출하여 공정의 상태를 판단하고 있다. 그러나 공중보건 분야에서는 Phase I 단계의 형태로만 진행되는 경우가 많으며, 또한 Phase I과 Phase II 단계를 구분하는 것이 모호한 경우가 대부분이다. Phase II 단계인 미래의 감시 (prospective surveillance)에 대한 상세한 내용은 review paper인 Sonesson과 Bock (2003)을 참고할 수 있다.

3. VLAD 관리도의 소개 및 설계

2장에서 언급한 위험도 조정 관리도 (risk-adjusted chart) 중 이 논문에서는 VLAD 관리도에 관하여 소개하고자 한다. 위험도 조정 관리도에 대한 상세한 내용은 Grigg와 Farewell

(2004)을 참고할 수 있다.

Lovegrove 등 (1997, 1999)과 Poloniecki 등 (1998)은 병원의 수술 환자에 대하여 기대 사망빈도 (expected mortality counts)에서 관측 사망빈도 (observed mortality counts)를 빼 것의 누적 그림인 VLAD 관리도를 제안하였다.

좀 더 상세한 설명을 위하여 Lovegrove 등 (1999)의 연구를 살펴보면, 저자들은 심장 외과의사의 수술 수행성과에 대하여 VLAD 관리도 기법을 적용하였다. 이 연구는 1992년 1월부터 1995년 12월까지 영국 런던의 St. George 병원에서 수행된 심장수술을 한 4318명의 환자를 대상으로 하였고 수술의 종류에 따라 크게 세 가지 집단으로 분류하였다. 이 환자들 중 70%는 위험도 (p_n)의 예측모형을 구성하기 위해 사용하였고, 나머지 30%는 예측된 모형의 타당성을 살펴볼 때 사용하였다. 집단별로 개인의 위험도 (p_n)의 예측모형을 구하기 위하여 로지스틱 회귀모형을 사용하였다. 각 집단별로 유의한 위험변수를 4개에서 5개를 사용하여 위험도의 예측모형을 설정하고, 각 집단별, 그리고 여러 외과 의사에 대하여 VLAD 관리도를 작성하였다. 다른 연구를 살펴보면, 위험변수로 Parsonnet 위험요소 (risk factor)를 사용하기도 한다 (Parsonnet 등, 1989, 참고).

VLAD 관리도의 절차는 다음과 같다. X_n 은 n 번째 환자의 결과, 즉 수술 후 일정 기간 내에 사망하면 1이고 아니면 0을 나타내는 변수이고, p_n^0 는 수술 수행성과가 안정적임을 가정할 경우, 즉 관리상태일 때 n 번째 환자의 위험도 (위험 변수들로부터 예측된 사망률)라 할 때,

$$V_n = \sum_{i=1}^n p_i^0 - \sum_{i=1}^n X_i$$

을 타점하고, 이를 연결한 선의 방향을 보거나 또는 각 점이 정해진 관리한계를 벗어날 경우 수술 수행성과에 이상이 있는 것으로 판단하는 것이다. 여기서 $\sum_{i=1}^n p_i^0$ 는 기대 누적 사망빈도를 나타낸다. VLAD 관리도는 그 선의 방향이 중요하다. 만일 증가 방향이면 예상보다 수술이 잘 수행되고 있는 경향을 나타내고, 감소 방향이면 그 반대를 나타낸다. 만일 방향이 증가와 감소를 반복할 경우 이를 해석하기가 어려우며, 이 문제를 해결하기 위하여 일반적인 관리도에서 사용하는 관리한계를 도입할 경우 이에 대한 설정이 쉽지 않은 것이 VLAD 관리도의 단점이라 할 수 있다.

관리한계 설정에 대해서는 최근 Sherlaw-Johnson (2005)이 위험도 조정 CUSUM 관리도와 동일한 효율을 나타내도록 설정하는 방법을 제안하였다. 이 방법을 간략하게 설명하면 다음과 같다. 수술 수행성과가 악화되는 것을 탐지하는 위험도 조정 CUSUM 관리도의 관리통계량을 C_n^+ 라 하고 관리한계선을 l 이라 할 때, $C_n^+ \geq l$ 이면 변화가 있다는 신호를 주게 된다. VLAD 관리도의 관리한계선 L_n^+ 를 위험도 조정 CUSUM 관리도의 C_n^+ 와 l 을 이용하여

$$L_n^+ = V_n + k(C_n^+ - l)$$

로 설정하여 $V_n \leq L_n^+$ 인 경우 신호를 주는 것이다 (k 는 적당한 양의 상수이다.). 그러나 이 방법은 VLAD 관리도와 위험도 조정 CUSUM 관리도의 효율을 동일하게 할 수 있지만, 위험도 조정 CUSUM 관리도의 관리한계선 l 을 알아야 하고 관리통계량 C_n^+ 를 매시점 마다

계산해야 하기 때문에 위험도 조정 CUSUM 관리도를 병행할 경우에만 사용할 수 있다. 수술 수행성고가 향상되는 것을 탐지하는 경우에도 유사하게 설명할 수 있다.

이 논문에서는 좀 더 쉽게 VLAD 관리도를 설계하기 위하여, 즉 관리상태에서의 평균 런 길이 (average run length; ARL)인 ARL_0 가 주어진 값을 만족하는 관리한계선을 설정하기 위하여 표준화를 사용한 방법을 제안하고자 한다.

n 번째 환자의 결과 X_n 은 위험도가 p_n 인 Bernoulli 분포를 따르며, $X_i, i = 1, 2, \dots$ 들은 서로 독립을 가정할 수 있다. 여기서 p_n 은 n 번째 환자의 실제 위험도를 나타낸다. 이 때 p_n 들이 모두 동일하지 않기 때문에 $\sum_{i=1}^n X_i$ 의 분포는 알려져 있지 않지만, 이것의 평균과 분산을 다음과 같이 계산할 수 있다 (부록 참고).

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n p_i, \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

관리상태에서의 평균과 분산은 p_i 대신 p_i^0 를 사용하여 얻을 수 있다. 따라서 관리상태를 가정한 경우 $\sum_{i=1}^n X_i$ 를 표준화하여 -1 을 곱한 통계량을 Z_n 이라 할 때, Z_n 은

$$Z_n = V_n / \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^0 - \sum_{i=1}^n (p_i^0)^2}$$

으로 표현되며 Z_n 의 평균과 분산은 각각 0과 1이 된다. 따라서 VLAD 관리도의 절차는 n 번째 환자의 결과에서 계산된 통계량 Z_n 의 절대값이 미리 설정된 관리한계선 h 를 벗어나는 경우, 즉 $|Z_n| \geq h$ 인 경우 수술 등의 수행 능력이 향상 또는 악화되었다고 판단하는 것이다. 이것을 다시 나타내면 $|V_n| \geq H_n$ 인 경우 이상신호를 주는 것이고, 여기서 관리한계선 H_n 은

$$H_n = h \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^0 - \sum_{i=1}^n (p_i^0)^2}$$

이 된다. 이 VLAD 관리도의 관리한계선 H_n 또는 h 는 ARL_0 가 주어진 값을 만족하도록 정하는데, 이 논문에서는 모의실험을 통하여 그 값을 설정하였다. 이에 대한 내용은 다음 장에서 관리도의 효율과 함께 제시하고자 한다.

4. 모의실험

p_n^1 을 수술 수행성고에 변화가 있는 이상상태에서의 n 번째 환자의 위험도라 할 때, 오즈비 (odds ratio) ρ_n 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\rho_n = \frac{p_n^1(1-p_n^0)}{p_n^0(1-p_n^1)}. \quad (4.1)$$

관리상태는 오즈비가 $\rho_n = 1$ 이고, 이상상태는 오즈비가 $\rho_n = \rho (\neq 1)$ 가 되는 것을 가정한다. 예를 들어, $\rho_n = 2$ 는 이상상태에서의 위험도 오즈가 2배 증가하는 것을 나타낸다.

표 4.1: ARL_0 를 만족하는 h 값 및 ρ 에 대한 ARL_1 값

ρ	ARL_0				
	100	200	300	400	500
0.3	6.35	7.08	7.52	7.81	8.01
0.5	11.50	13.36	14.52	15.28	15.79
0.8	34.28	45.39	52.65	57.43	60.83
1.0	100.26	200.05	300.94	398.87	498.64
1.5	19.73	24.09	27.12	28.98	30.41
2.0	11.48	13.32	14.52	15.29	15.80
3.0	7.03	7.85	8.37	8.71	8.94
h	1.165	1.232	1.271	1.294	1.312

주어진 ARL_0 를 만족하는 관리한계선을 설정하기 위하여 관리상태에서의 위험도 p_n^0 는 Uniform(0,1)에서 랜덤하게 추출하였고, X_n 은 Bernoulli(p_n^0)에서 추출하는 모의실험을 수행하였다. 반복을 500,000번 실행하여 얻어진 관리한계선의 상수 h 값을 표 4.1에 제시하였다. 이 때 사용한 방법은 주어진 ARL_0 를 만족하도록 계속 수정 및 대입을 반복하여 얻은 것이며, 런 길이가 너무 극단적으로 나오는 케이스, 즉 런 길이가 주어진 ARL_0 값의 100배 보다 크게 나오는 경우는 반복에서 제외하였다. 표 4.1에서 $\rho = 1$ 인 행의 ARL 값이 설정된 관리한계선의 상수 h 를 사용할 경우 모의실험에서 얻어진 ARL_0 값을 나타낸다.

또한 설정된 관리한계선에 이용하여 이상상태에서의 평균런 길이인 ARL_1 을 계산하여 표 4.1에 제시하였다. $\rho \neq 1$ 인 행이 설정된 h 를 사용할 경우 주어진 ρ 를 탐지하는 ARL_1 값을 나타낸다. 이상상태일 때 X_n 은 Bernoulli(p_n^1)에서 추출하였으며, 이 때 p_n^1 은 식 (4.1)을 이용하여 p_n^0 와 이상상태의 오즈비 ρ 로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$p_n^1 = \frac{\rho p_n^0}{1 + (\rho - 1) p_n^0}.$$

표 4.1의 결과를 보면 n 에 따라 VLAD 관리도 통계량의 증감이 크지 않기 때문에 주어진 ARL_0 를 만족하는 상수 h 는 크게 변하지 않음을 알 수 있으며, 이상상태인 경우 이를 효율적으로 탐지할 수 있는 것으로 나타났다.

5. 결론

생산 공정에서만 주로 사용한다고 생각되는 관리도가 외국에서는 건강관리와 공중보건 분야에서 많이 사용되고 있으며, 적용 분야의 특성 때문에 변형된 관리도 기법을 주로 사용하고 있다. 본 논문에서는 그 중 많이 사용하는 VLAD 관리도를 소개하였고, 관리상태에서의 평균런 길이가 주어진 값을 만족하는 관리한계선을 설정하는 방법을 제안하였다. VLAD 관리도는 단순하지만, 관리도를 해석하기가 쉽다는 장점 때문에 전문적인 지식이

없는 사람도 쉽게 사용할 수 있을 것이다. 생산 공정에서 사용하는 많은 공정관리 또는 관리도 절차를 건강관리와 공중보건 분야에 적용할 수 있을 것이라 판단되며, 우리나라에서도 이에 대한 연구를 수행할 경우 많은 성과를 거둘 수 있을 것이다.

부록

이산형 확률변수 X 의 r 번째 내림차순 계승적률 (r^{th} descending factorial moment)을

$$\mu'_{[r]} = E \left[\frac{X!}{(X-r)!} \right]$$

으로 정의할 때, X 의 평균과 분산은

$$E(X) = \mu'_{[1]}, \text{Var}(X) = \mu'_{[2]} + \mu'_{[1]} - \left(\mu'_{[1]}\right)^2 \quad (\text{A.1})$$

으로 나타낼 수 있다 (Johnson 등, 2005, pp. 52-53, 참고).

또한 X 의 확률생성함수 (probability generating function; pgf) $G(z)$ 는 $G(z) = E(z^X)$ 로 정의되며, $G(z)$ 를 이용하여 다음과 같이 $\mu'_{[r]}$ 을 계산할 수 있다 (Johnson 등, 2005, pp. 58-59, 참고).

$$\mu'_{[r]} = \left[\frac{d^r G(z)}{dz^r} \right]_{z=1}$$

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 가 Bernoulli(p_i)를 따른다면 pgf는 $G_i(z) = (1 - p_i + p_i z)$ 가 되며, 서로 독립인 X_i 들의 합인 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ 의 pgf는

$$G(z) = \prod_{i=1}^n G_i(z) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i + p_i z)$$

됨을 알 수 있다 (Johnson 등, 2005, p. 60, 참고). 따라서 z 에 대하여 미분을 하고 $z = 1$ 을 대입하여

$$\mu'_{[1]} = \sum_{i=1}^n p_i, \mu'_{[2]} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n p_i p_j$$

를 얻을 수 있고, 식 (A.1)에 의하여

$$E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n p_i, \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n p_i^2$$

이 된다.

참고문헌

- Grigg, O. and Farewell, V. (2004). An overview of risk-adjusted charts, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A*, **167**, 523–539.
- Johnson, N. L., Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- Lovegrove, J., Valencia, O., Treasure, T. and Sherlaw-Johnson, C. (1997). Monitoring the results of cardiac surgery by variable life-adjusted display, *The Lancet*, **350**, 1128–1130.
- Lovegrove, J., Sherlaw-Johnson, C., Valencia, O., Treasure, T. and Gallivan, S. (1999). Monitoring the performance of cardiac surgeons, *Journal of the Operational Research Society*, **50**, 684–689.
- Parsonnet, V., Dean, D. and Berstein, A. D. (1989). A method of uniform stratification of risks for evaluating the results of surgery in acquired adult heart disease, *Circulation*, **79**, 1–12.
- Poloniecki, J., Valencia, O. and Littlejohns, P. (1998). Cumulative risk adjusted mortality chart for detecting changes in death rate: Observational study of heart surgery, *British Medical Journal*, **316**, 1697–1700.
- Sherlaw-Johnson, C. (2005). A method for detecting runs of good and bad clinical outcomes on variable life-adjusted display (VLAD) charts, *Health Care Management Science*, **8**, 61–65.
- Sonesson, C. and Bock, D. (2003). A review and discussion of prospective statistical surveillance in public health, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A*, **166**, 5–21.
- Woodall, W. H. (1997). Control charting based on attribute data: Bibliography and review, *Journal of Quality Technology*, **29**, 172–183.
- Woodall, W. H. (2006). The use of control charts in health-care and public-health surveillance, *Journal of Quality Technology*, **38**, 89–104.
- Xie, M., Goh, T. N. and Kuralmani, V. (2002). *Statistical Methods and Control Charts for High Quality Processes*, Springer-Verlag, New York.
- Yang, Z., Xie, M., Kuralmani, V. and Tsui, K.-L. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits, *Journal of Quality Technology*, **34**, 448–458.

[2007년 4월 접수, 2007년 5월 채택]

Design of Variable Life-Adjusted Display (VLAD) Charts

Jaeheon Lee¹⁾ Sang Hyun Jung²⁾

ABSTRACT

There are many uses of control charts in health-care monitoring and in public-health surveillance. For example, control charts are used in monitoring and improvement of hospital performance, in monitoring chronic diseases and infectious diseases, and so on. We introduce the Variable Life-Adjusted Display (VLAD) chart and propose the method for choosing control limits of the VLAD chart to give specified in-control properties.

Keywords: Health-care, public-health, risk-adjusted chart, VLAD chart.

1) Associate Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea
E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

2) Graduate Student, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea
E-mail: kami1001@nate.com