

## 얇은 접합층의 계면균열에 대한 이론적 해석

노환진<sup>†\*</sup>

과학기술부<sup>\*</sup>

### Theoretical Analysis of Interface Crack on Thin Plate

Hwan-Jin Nho<sup>†\*</sup>

Ministry of Science and Technology<sup>\*</sup>

#### Abstract

A bonded plate or a coated part can be debonded by external impact or thermal expansion. To analyse adhesive strength, the blister test is generally adopted. In this paper, a blister test is modelled theoretically and then the stability and bifurcation of the blister are studied under several different cases. The blister is simplified to consist of a pure bending plate attached elastically to the rigid substrate. Expression of the energy release rate is obtained as a form of an explicit function for a circular-type blister or tunnel-type blister grown by controlling the internal pressure or internal volume. Stability and bifurcation are also studied in the frame of the quasi-static evolution. The study shows that the circular-type blister propagates with the first mode of bifurcation and that the tunnel-type blister propagates with a regular wave. It is proved that the waves have the same form on two side lines of the tunnel and that the wave length can be obtained. When the internal pressure is controlled, the blister is unstable, but when the internal volume is controlled, it is stable.

※Keywords: Interface crack(층간균열), Blister test(블리스터 테스트), Coating(코팅), Delamination(박리), Crack stability(균열안정성), Energy release rate(에너지방출율)

#### 1. 서론

코팅(coating)되거나 또는 얇은 층으로 접합된 부위가 접합공정에서 부분적으로 접합되지 못하거

나 온도차 또는 외력에 의하여 박리(debonding)가 일어나는 경우가 있다. 이러한 문제는 복합재료 패널의 제조공정에서 종종 발생하는 문제로서 델라미네이션(delamination) 또는 계면균열(interface-crack)이라고 하며 평면균열(plane crack)의 문제에 속한다. 이러한 접합공정의 접합력을 시험하는 방법으로서 블리스터(blister) 시험

접수일: 2007년 6월 12일, 승인일: 2007년 11월 15일

† 교신저자: hjnho@most.go.kr, 02-2110-3882

방법이 있다. Malyshev and Salgnil(1965)가 처음으로 개념을 소개하였고 Jensen(1991)은 이에 대한 이론적 해석을 시도한 바 있다. 본 연구에서는 블리스터 시험에서 박리부분의 파괴역학적 안정성과 파괴의 전파모습에 대한 예측을 이론적으로 시도하였다.

원형과 터널모양의 초기 계면균열 상태에서 균열내부에 일정부피의 비율로 유체를 주입하는 경우(부피제어방식)와 일정비율로 압력을 증가시키는 경우(압력제어방식) 균열선단에서의 에너지방출률(energy release rate)을 함수로 구하고 변동률과 균열선단의 이동속도의 관계를 구하였다.

여기서 박리된 부분에 해당하는 얇은 판은 순수한 굽힘거동(pure bending)을 보이는 탄성판으로 가정하였으며 모재의 거동은 무시하였다. 균열이 퍼지는 모양예측과 안정성을 판단하기 위하여 Nguyen(1993)의 공식을 적용하였고, 균열의 거동은 Griffith의 모델을 사용하였다.

## 2. 평면균열의 에너지방출률

Fig. 1의 (A)는 블리스터시험을 나타내고 있다. 접착된 두 평판의 일부분( $\Omega$ )을 접착시키지 않고, 그 아래 모재에 작은 구멍을 낸 다음 그 구멍을 통하여 비접착된 균열내부에 일정비율로 내압( $p$ )을 가하거나 유량( $\lambda$ )을 주입하게 된다. 압력 또는 유량이 어느 임계점에 도달되면 계면균열이 전파되기 시작한다.

여기서  $A$ 는 평판전체의 면적,  $\Omega$ 는 박리된 부분의 면적,  $\Gamma$ 는 박리된 부분의 가장자리 선단을 각각 의미한다. 이 경우의 총포텐셜에너지( $E$ )는 다음과 같다.

$$E(u, \Omega, \lambda) = \int_{\Omega} \omega_1(\varepsilon(u)) da + \int_{A-\Omega} \omega_2(\varepsilon(u)) da - \int_{\Omega} p(\lambda) u da \quad (1)$$

여기서  $\omega_1$ 와  $\omega_2$ 는 비접착된 박리부분과 접착된 부분의 단위면적당 내부 변형에너지를 각각 의미하며  $u$ 는  $z$  방향의 변위를 말한다. 평형방정식은 다음의 관계식에서 얻을 수 있다.

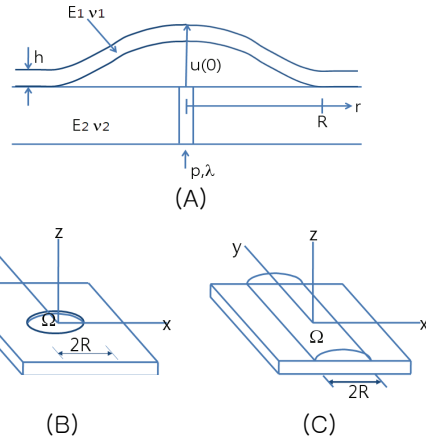


Fig. 1 Blister test(A) and circular type(B) and tunnel type(C) delamination

$$E_{,u} \cdot \delta u = 0, \quad \forall \delta u \text{ k.a.} \quad (2)$$

여기서  $\forall \delta u$  k.a.는 변위의 모든 허용가능한(kinematically admissible) 작은 변동을 의미한다. 평형상태에서의 총포텐셜에너지( $W$ )는 다음과 같다.

$$W(\Omega, \lambda) = \min_u E \quad (3)$$

에너지방출률( $G$ )은 정의에 의하여 균열의 선단( $\Gamma$ )을 따라 곡선( $s$ )의 함수로 다음과 같이 표시된다(Lemaitre and Chaboche 1988). 여기서  $\dot{\Omega}$ 는 균열선단에서 균열의 전파속도이다.

$$W_{,\Omega} \dot{\Omega} = - \int_{\Gamma} G(s) \dot{\Omega} ds \quad (4)$$

## 3. 평면균열의 안정성과 균열전파모양의 유일성 판정

준평형상태에 있는 비보존역계의 기계적 총에너지( $\Phi$ )는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi(\Omega, \lambda) = W(\Omega, \lambda) + W_d(\Omega) \quad (5)$$

여기서  $W_d$ 는 에너지감쇠(dissipation)를 나타

낸다. 임의의 계가 안정된 평형상태를 유지하기 위해서는 기계적 총에너지가 최저점에 있어야 하며 작은 변동에 대하여 다음 식이 만족되어야 한다.

$$\delta\Omega \cdot \Phi_{,\omega\omega} \cdot \delta\Omega > 0, \quad \forall \delta\Omega \geq 0 \quad (6)$$

이 계의 평형상태에서 작은 변동(perturbation)을 가하였을 때 나올 수 있는 응답(즉 균열의 전파모양)이 유일하기 위해서는 다음 조건이 만족되어야 한다.

$$\delta\Omega \cdot \Phi_{,\omega\omega} \cdot \delta\Omega > 0, \quad \forall \delta\Omega, \delta\Omega \neq 0 \quad (7)$$

식(6) 식(7)의 차이는  $\delta\Omega$ 의 범위에 있다. 식(6)과 식(7)은 시간에 독립적인 비보존역계(time independent dissipative system)가 하중을 받을 때 준평형상태의 변화에 대한 안정성과 응답의 유일성을 판정하는 식이 된다(Nguyen 1993). 식(5)로부터 이 식의 표현을 바꾸면 다음과 같다.

$$\delta\Omega \cdot \Phi_{,\omega\omega} \cdot \delta\Omega = \delta\Omega \cdot W_{,\omega\omega} \cdot \delta\Omega + \delta\Omega \cdot W_{d,\omega\omega} \cdot \delta\Omega \quad (8)$$

그리고 식(4)로부터

$$W_{,\omega} \delta\Omega = - \int_{\Gamma} G(s) \delta\Omega ds$$

를 얻어 다시  $\Omega$ 로 미분하면 다음과 같다.

$$\delta\Omega \cdot W_{,\omega\omega} \cdot \delta\Omega = - \int_{\Gamma} (\delta G + \frac{\partial G}{\partial n} \delta\Omega + \frac{G}{R} \delta\Omega) \delta\Omega ds \quad (9)$$

여기서  $R$ 은 균열선단의 곡률반경이다. 이 평 균균열이 Griffith의 모델을 따른다면 임계상태에서  $G = G_c$ 가 되므로 다음 식을 얻을 수 있다. 여기서  $G_c$ 는 균열이 시작되는 한계에너지방출율이다.

$$\delta\Omega \cdot W_{d,\omega\omega} \cdot \delta\Omega = G_c \int_{\Gamma} \frac{1}{R} \delta\Omega \delta\Omega ds \quad (10)$$

따라서 식(8)은 다음과 같이 변한다.

$$\delta\Omega \cdot \Phi_{,\omega\omega} \cdot \delta\Omega = - \int_{\Gamma} (\delta G + \frac{\partial G}{\partial n} \delta\Omega) \delta\Omega ds \quad (11)$$

식의 간단한 표현을 위하여 다음과 같이 두자.

$$\bar{G} = \delta G + \frac{\partial G}{\partial n} \delta\Omega \quad (12)$$

#### 4. 원형 계면균열의 안정성해석

Fig.1의 (B) 그림은 초기 원형 계면균열의 모습이다.  $\lambda$ 의 유량속도로 균열내부공간부피를 증가시킬 때, 균열이 퍼져나가는 모습과 안전성을 분석해 보자. 박리된 부분의 평판은 굽힘거동이 가장 크므로 순수 굽힘거동(pure bending)만을 보인다고 단순화 하자. 이 경우 내부변형에너지( $\omega$ )는 다음과 같다(Langhaar 1962).

$$\omega = \frac{D}{2} [(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)(u_{,xx}u_{,yy} - u_{,xy}^2)] \quad (13)$$

여기서  $D$ 는 굽힘강성(bending rigidity)이며  $\Delta$ 는 laplacian이다. 이계의 총포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$E = \int_{\Omega} \omega da - \int_{\Omega} p u da \quad (14)$$

이 계의 평형방정식은 식(2)로부터 얻으며 식(13)을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$E_{,u} \delta u = \int_{\Omega} [D\Delta(\Delta u) - p] \delta u da + \int_{\Gamma} [\dots] ds = 0 \quad \forall \delta u \text{ k.a.} \quad (15)$$

따라서 평형방정식은 다음과 같다.

$$D\Delta(\Delta u) - p = 0 \quad (16)$$

식(15)의 마지막 항은 균열선단( $\Gamma$ )에서의 선적분으로서 경계조건을 제시하게 되지만, 여기서의 경계 조건은 고정단(clamped edge)으로 가정하여  $u=0, \frac{\partial u}{\partial n}=0$ 으로 둔다. 그러면 식(16)은

로부터 변위( $u$ )는 주어진 내부공간의 부피( $\lambda$ )의 함수로 다음과 같이 표시된다.

$$u = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2 = \frac{3\lambda}{\pi R^6}(R^2 - r^2)^2 \quad (17)$$

에너지방출률( $G$ )은 식(14)를 미분하여 얻는다.

$$W_{,\Omega} \delta\Omega = \int_{\Omega} \delta\Omega da + \int_{\Gamma} \omega \delta\Omega ds - \int_{\Omega} (\delta pu + \delta up) da - \int_{\Gamma} pu \delta\Omega ds \quad (18)$$

식(13)은 다음과 같이 모멘트로 표현할 수 있으므로

$$\omega = -\frac{1}{2} [M_x u_{,xx} + M_y u_{,yy} + 2M_{xy} u_{,xy}] \quad (19)$$

이 결과를 식(18)에 대입하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$W_{,\Omega} \delta\Omega = - \int_{\Gamma} (\omega + u_{,m} \vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n}) \delta\Omega ds \quad (20)$$

여기서

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & M_{\theta} \end{pmatrix}$$

를 의미하며  $\vec{n}$  은 외부로 향하는 단위벡터이다. 따라서 식(4)를 적용하면 에너지방출률( $G$ )은 다음 함수로 표현된다.

$$G = -(\omega + u_{,m} \vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n}) \quad (21)$$

그리고 식(17) 및 식(19)를 적용하면 다음 결과를 얻는다.

$$G = \omega = \frac{D}{2} u_{,r}^2 \quad (22)$$

균열의 안정성을 분석하기 위하여 식(11)을 얻기 위해서는 평형상태에서의 변동률간의 관계식을 얻어야 한다. 그 관계식은 다음의 식으로 구한다.

$$\frac{\partial}{\partial\Omega} (W_{,u} \delta u^*) \delta\Omega = 0, \quad \forall \delta u^* \text{ k.a.} \quad (23)$$

즉, 외부로 부터의 에너지의 가감이 없는 경우 평형방정식은 변화가 없다는 의미이다. 식(15)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\Omega} (W_{,u} \delta u^*) \delta\Omega &= - \int_{\Omega} [D\Delta(\Delta\delta u) - \delta p] \delta u^* da \\ &+ \int_{\Gamma} [\dots] ds = 0 \quad \forall \delta u^* \text{ k.a.} \end{aligned} \quad (24)$$

따라서 변동률간의 관계식은 다음과 같다.

$$D\Delta(\Delta\delta u) - \delta p = 0 \quad (25)$$

그리고 변동된 균열선단에서의 경계조건은 변동전의 경계조건과 동일하다고 보자. 그러면 변위의 크기와 그 기울기가 다음과 같이 표현된다.

$$\delta u = 0, \quad \delta u_{,n} = -u_{,m} \delta\Omega \quad (26)$$

원형 균열선단의 변동률은 아직은 미지함수이므로 임의의 함수인 Fourier 형식으로 표현하자.

$$\delta\Omega = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [a_i \cos(\theta) + b_i \sin(\theta)] \quad (27)$$

그러면 식(25)로부터 변위의 변동률( $\delta u$ )을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\delta u = A_0(r) + \sum_{i=1}^{\infty} [A_i(r) \cos(\theta) + B_i(r) \sin(\theta)] \quad (28)$$

여기서 계수함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_0(r) &= \frac{\delta p}{64D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{pR}{16D} a_0 (R^2 - r^2) \\ A_i(r) &= \frac{pR}{16D} a_i (R^2 - r^2) \left(\frac{r}{R}\right)^i \\ B_i(r) &= \frac{pR}{16D} b_i (R^2 - r^2) \left(\frac{r}{R}\right)^i \end{aligned} \quad (29)$$

작은 변동이 가해질 동안에 전체의 부피변화가 없으므로  $\int_{\Omega} \delta u da = 0$  이다. 그러므로  $\delta p$ 를 얻는다.

$$\delta p = -\frac{6p}{R} a_0 \quad (30)$$

이제 식(22)와 식(28) 및 식(30)으로부터 식(12)의  $\bar{\delta}_G$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_G &= Du_{,n}(\delta u_{,n} + \overrightarrow{\nabla u_{,n}} \cdot \vec{n} \delta \Omega) \quad (31) \\ &= -\frac{p^2 R^3}{32D} \left[ 2a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (1-i) a_i \cos(i\theta) + b_i \sin(i\theta) \right] \end{aligned}$$

균열의 안정성을 판별하기 위하여 식(11)을 계산하면 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta \Omega \cdot \Phi_{,\infty} \cdot \delta \Omega &= -\int_0^{2\pi} \bar{\delta}_G R d\theta \quad (32) \\ &= -\frac{\pi p^2 R^4}{32D} \left[ 4a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (1-i)(a_i^2 + b_i^2) \right] \end{aligned}$$

식(32)를 고찰하면  $\delta \Omega > 0$ 의 조건에서 식(6)이 만족함을 알 수 있다. 따라서 블리스터의 내부부피를 일정 속도로 증가시키는 경우 원형 평면 균열은 안정하다고 할 수 있다. 그러나 식(7)은 만족되지 않는다. 즉  $\delta \Omega$ 의 값이  $i=1, a_0=0$ 인 경우  $\delta \Omega \cdot \Phi_{,\infty} \cdot \delta \Omega = 0$ 가 성립된다. 그러므로 계면균열의 전파모양은 2가지 이상 나온다고 볼 수 있다. 분기해(bifurcation)는 계면균열이 확대되는 경우의 조건을 적용하여 다음의 관계식을 만족한다고 볼 수 있다.

$$\begin{cases} \alpha(R) = G_c & \forall \theta \\ \bar{\delta}_G(R) = 0 & \forall \theta \end{cases} \quad (33)$$

식(31)에서 식(33)을 만족하는 경우는  $i=1, a_0=0$ 인 경우이다. 이것은 평형상태에서 작은 변동을 가할 경우에 대한 응답이므로  $\dot{\lambda}$ 의 속도로 유량을 주입하는 경우에는 다음의 모습으로 계

면균열이 전파될 것이다.

$$\dot{\Omega} = \frac{R}{4} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta) \quad (34)$$

블리스터 시험에서 압력을제어하는 경우에는 식(25)에서  $\delta p = 0$ 가 되며 식(11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta \Omega \cdot \Phi_{,\infty} \cdot \delta \Omega &= \\ &= \frac{\pi p^2 R^4}{32D} \left[ -2a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (1-i)(a_i^2 + b_i^2) \right] \quad (35) \end{aligned}$$

이 식은 첫째 모드( $i=1$ )에서 음이 된다. 따라서 식(6)의 판정식이 만족되지 않으므로 압력제어방식에서는 원형계면균열이 불안정함을 알 수 있다.

### 5. 터널모양의 계면균열에 대한 안정성 해석

Fig. 1의 (C)의 터널모양의 초기 계면균열을 가진 블리스터이다. 여기에  $\dot{\lambda}$ 의 속도로 유량을 주입하는 경우를 분석하자. 박리된 부분은 분수 굽힘거동을 보인다고 가정한다. 이 경우 내부 변형 에너지는 식(13)과 같으며, 평형방정식은 식(16)과 동일하다. 박리된 영역에서의 변위( $u$ )는 다음과 같다.

$$u = \frac{p}{24D} (R+x)^2 (R-x)^2 \quad (36)$$

에너지방출율( $G$ )은 식(21)과 같으며 식(36)을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$G = \frac{D}{2} u_{,xx}^2 \quad (37)$$

평형상태에서 작은 변동이 가해졌을 경우 터널 양측 균열선단 양변( $x = -R$ 과  $x = R$ )에서의 변동을 Fourier 형식으로 표현하자.

$$\begin{aligned} \delta\Omega(R) &= \\ & a_0 + \sum_{i=0}^{\infty} [a_i(x) \cos(my) + b_i(x) \sin(my)] \\ \delta\Omega(-R) &= \\ & c_0 + \sum_{i=0}^{\infty} [c_i(x) \cos(my) + d_i(x) \sin(my)] \quad (38) \end{aligned}$$

여기에서  $m = \frac{2\pi i}{L}$  을 의미하며  $L$  은 파장의 길이를 의미하나 아직은 미지수이다. 식(38)의 계수함수는 다음과 같다.

$$A_0(x) = \frac{\delta p}{24D} (R^2 - x^2)^2 + \frac{p}{12D} \{ (a_0 - c_0)(R^2 x - x^3) + (a_0 + c_0)(R^3 - R x^2) \}$$

$$A_i(x) = (s_1 + s_3 x) e^{mx} + (s_2 + s_4 x) e^{-mx}$$

$$B_i(x) = (t_1 + t_3 x) e^{mx} + (t_2 + t_4 x) e^{-mx}$$

여기서  $s_1, s_2, s_3, s_4$  는 다음과 같다.

$$s_1 = RC \left[ \left\{ -\frac{4mR-1}{2} e^{-3mR} + (2mR-1) e^{mR} + \frac{1}{2} e^{5mR} \right\} a_i + \left\{ -\frac{4mR+1}{2} e^{3mR} + (2mR+1) e^{-mR} - \frac{1}{2} e^{-5mR} \right\} c_i \right]$$

$$s_2 = RC \left[ \left\{ -\frac{4mR-1}{2} e^{-3mR} + (2mR-1) e^{mR} + \frac{1}{2} e^{5mR} \right\} c_i + \left\{ -\frac{4mR+1}{2} e^{3mR} + (2mR+1) e^{-mR} - \frac{1}{2} e^{-5mR} \right\} a_i \right]$$

$$s_3 = C \left[ \left\{ -\frac{4mR+1}{2} e^{-3mR} + (2mR+1) e^{mR} - \frac{1}{2} e^{5mR} \right\} a_i + \left\{ \frac{4mR-1}{2} e^{3mR} - (2mR-1) e^{-mR} - \frac{1}{2} e^{-5mR} \right\} c_i \right]$$

$$s_4 = C \left[ \left\{ \frac{4mR+1}{2} e^{-3mR} - (2mR+1) e^{mR} + \frac{1}{2} e^{5mR} \right\} c_i + \left\{ -\frac{4mR-1}{2} e^{3mR} + (2mR-1) e^{-mR} + \frac{1}{2} e^{-5mR} \right\} a_i \right]$$

$$\text{여기서 } C = \frac{pR^2}{12D \sinh(2mR) \{ \sinh^2(2mR) - 4m^2 R^2 \}}$$

이다.

$$t_1, t_2, t_3, t_4 \equiv s_1, s_2, s_3, s_4 \text{ 에서 } a_i, c_i$$

를  $b_i, d_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 로 각각 대체하여 얻는다.

변동률방정식으로 식(25)와 경계조건으로 식(26)을 적용하면  $\delta u$  를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta u &= \\ & A_0 + \sum_{i=0}^{\infty} [A_i(x) \cos(my) + B_i(x) \sin(my)] \quad (39) \end{aligned}$$

여기에서 계수함수는 식(49) 다음에 제시하였다. 이 계의 안정성을 판별하기 위하여  $\bar{\delta G}$  를 구하자.

$$\bar{\delta G} = Du_{,xx} (\delta u_{,xx} + \nabla u_{,xx} \cdot \vec{n} \delta \Omega) \quad (40)$$

따라서 균열 양측선단에서의 에너지방출율의 변동률은 식(41)로 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\delta G}(R) &= \frac{p^2 R^3}{6D} \left[ -(a_0 + c_0) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y} (\alpha a_i + \beta c_i) \cos(my) + (\alpha b_i + \beta d_i) \sin(my) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta G}(-R) &= \frac{p^2 R^3}{6D} \left[ -(a_0 + c_0) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y} (\beta a_i + \alpha c_i) \cos(my) + (\beta b_i + \alpha d_i) \sin(my) \right\} \right] \quad (41) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha &= 12 \sinh^3(2mR) - 8 mR \cosh^3(2mR) \\ &\quad - 32 m^2 R^2 \sinh(2mR) + 8 mR \cosh(2mR) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 16 m^2 R^2 \sinh(2mR) \cosh(2mR) \\ &\quad - 8 mR \sinh^2(2mR) \quad (42) \end{aligned}$$

$$y = \sinh(2mR) \sinh^2(2mR) - 4m^2 R^2$$

그리고 식(11)을 구하자. 1개의 파장( $L$ )에 대하여 적분하면 식(43)의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta\Omega \cdot \Phi_{,\infty} \cdot \delta\Omega &= - \left[ \int_0^L \bar{\delta G}(R) \delta\Omega(R) dy + \int_0^L \bar{\delta G}(-R) \delta\Omega(-R) dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho^2 R^3 L}{6D} [(a_0 + c_0)^2 \\
 &- \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \{ \alpha(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2) + 2\beta(a_i c_i + b_i d_i) \}]
 \end{aligned} \tag{43}$$

여기서 식(6)을 적용하여 안정성을 판정해보자.  $\delta\Omega > 0$  이므로 식(38)에서 다음 관계식이 만족된다고 가정할 수 있다.

$$\begin{cases} a_0 \geq \left| \sum_{i=0}^{\infty} [a_i \cos(m\gamma) + b_i \sin(m\gamma)] \right| \\ c_0 \geq \left| \sum_{i=0}^{\infty} [c_i \cos(m\gamma) + d_i \sin(m\gamma)] \right| \end{cases} \tag{44}$$

식(44)에서의 조건은 다음 식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned}
 (a_0 + c_0)^2 \geq \\
 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \{ \alpha(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2) + 2\beta(a_i c_i + b_i d_i) \} \tag{45}
 \end{aligned}$$

한편  $-\infty < \frac{\alpha}{12\gamma} < 0.170$  과  $-\infty < \frac{\beta}{6\gamma} < 0.293$

임을 고려할 때 식(6)은 항상 만족함을 알 수 있다. 따라서 블리스터의 내부부피를 일정속도로 증가시키는 경우 터널모양의 계면균열은 안정하다고 할 수 있다. 그러나 식(7)은 만족되지 않는다. 즉 적정한  $\alpha, \beta$  및  $\gamma$  의 값에서  $\delta\Omega \cdot \Phi_{\infty} \cdot \delta\Omega = 0$  이 성립될 수 있는  $\delta\Omega$  의 값이 존재함을 알 수 있다. 그러므로 계면균열의 전파모양은 2가지 이상이 나온다고 볼 수 있다. 이 경우의 분기(bifurcation)의 모습은 다음의 관계식으로 얻는다.

$$\begin{cases} \dot{G}(R) = G_c & \forall y \\ \dot{G}(-R) = G_c & \forall y \\ \delta \dot{G}(R) = 0 & \forall y \\ \delta \dot{G}(-R) = 0 & \forall y \end{cases} \tag{46}$$

따라서 식(41)으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$\begin{cases} a_0 + c_0 = 0 \\ \alpha a_i + \beta c_i = 0 \\ \beta a_i + \alpha c_i = 0 \\ \alpha b_i + \beta d_i = 0 \\ \beta b_i + \alpha d_i = 0 \end{cases} \tag{47}$$

여기에서 단순해(trivial solution)는  $a_0 = -c_0, a_i = b_i = c_i = d_i = 0$  인 경우이다. 그러나  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$  인 경우 다음과 같은 특수해(non-trivial solution)를 얻을 수 있다.

$$a_0 = -c_0, \quad a_i = c_i, \quad mR = \frac{2\pi R}{L} i = 1.718 \dots$$

$b_i = d_i$  즉, 이것은 평형상태에서 작은 변동을 가할 경우에 대한 응답이므로  $\dot{\lambda}$  의 속도로 유량을 주입하는 경우 식(48)의 모습으로 계면균열이 확대될 것이다.

$$\dot{\Omega}(R) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{1.718y}{R}\right) + b_1 \sin\left(\frac{1.718y}{R}\right) \tag{48}$$

$$\dot{\Omega}(-R) = c_0 + a_1 \cos\left(\frac{1.718y}{R}\right) + b_1 \sin\left(\frac{1.718y}{R}\right)$$

여기서  $a_0 + c_0 = \frac{2R}{3} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$  가 된다. 그리고 균열

의 전파모습은 Fig. 2의 (B)와 같이 좌우가 동일한 파형이 됨을 알 수 있다. 그리고 파장의 길이는  $L = 3.658 \dots R$  임을 얻을 수 있다. 터널형 계면균열에 압력을 제어하는 경우를 살펴보자  $\delta p = 0$  가 되며 식(11)은 식(49)과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \delta\Omega \cdot \Phi_{\infty} \cdot \delta\Omega = & -2G_c \frac{L}{R} [(a_0 + c_0)^2 \\
 & + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \{ \alpha(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2) + 2\beta(a_i c_i + b_i d_i) \}] \tag{49}
 \end{aligned}$$

여기서  $\alpha, \beta, \gamma$  는 식(42)와 같다. 식(49)는 음이되는 경우를 쉽게 찾을 수 있다. 즉 터널형 계면균열의 경우에도 압력제어의 경우 불안정하다는 것을 알 수 있다.

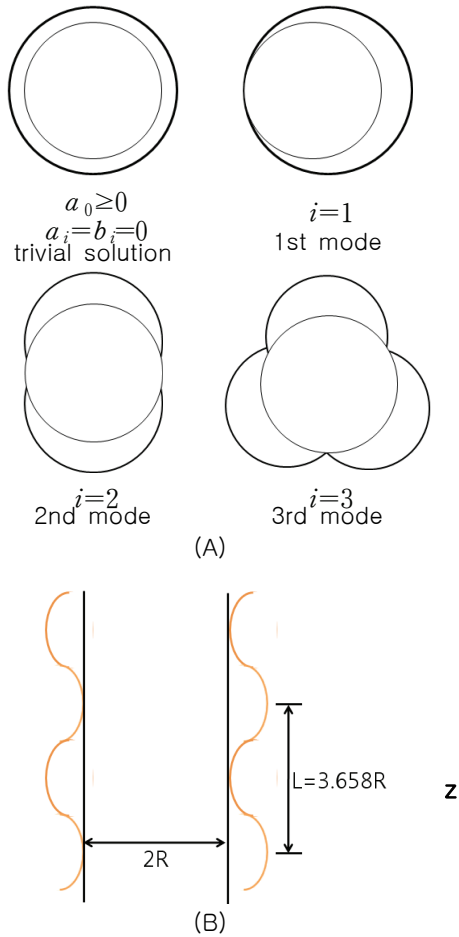


Fig. 2 Mode of bifurcation for circular type(A) and tunnel type(B) delamination

6. 토론 및 결론

블리스터시험을 이론적으로 해석하였다. 복잡한 파괴이론과 평판이론을 단순화하기 위하여 박리부분은 순수굽힘 평판으로 두고, 모재의 거동을 무시하였으며 균열선단은 고정단으로 가정하였다. 균열의 거동은 Griffith의 모형을 적용하였다. 부

피증가방식과 압력증가방식을 통하여 원형과 터널형 계면균열은 일정주기를 갖는 파형으로 전파됨을 알았다. 터널형 계면균열의 전파모습은 얇은 필름의 접착공정에서 발생하는 직선형 결함(비접착부분)이 전파되는 모습과 동일하다. 터널형 균열의 파장이 터널폭의 길이에 비례하는 것을 증명하였다. 원형과 터널형 균열은 모두 부피증가방식에서는 안정하였으나 압력증가방식에서는 불안정함을 보여 주었다.

참 고 문 헌

- Jensen H.M., 1991, "The Blister Test for Interface Toughness Measurement," Engineering Fracture Mechanics, 40(3), pp. 475-486.
- Lemaitre, J. and Chaboche J.L., 1988, "Mecanique des Materiaux Solides," Dunod, pp. 445-519.
- Langhaar, H.H., 1962, "Energy Method in Applied Mechnics," John Wiley and Son, New York-London, pp. 159-177.
- Malyshev B.M. and Salgnil R.L., 1965, "The Strength of Adhesive Joints Using the Theory of Cracks," Int. J. of Fracture Mechanics, 1, pp. 114-128.
- Nguyen, Q.S., 1993, "Bifurcation and Stability of Dissipative System," Springer Verlag, Wien-New York, pp. 45-71.



< 노 환 진 >