韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 21집 제 4호. 2007. 11. 621-646

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21 No 4, Nov. 2007. 621-646

시각화를 이용한 선형대수학 교수학습모델

- R^n의 부분공간 -

김 덕 선 (성균관대학교)
이 상 구 (성균관대학교)
정 경 훈 (성균관대학교)

컴퓨터의 발전은 수학교육 특히 선형대수학 교수-학습 방법에 큰 개선의 가능성을 보여준다. 수학 교육 및 연구용으로 많이 쓰이는 프로그램은 MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE, Derive, LINPRAC 등 다양하다. 그 중 MATLAB(MATrix LABoratory)은 행렬 연산 속도가 뛰어나고 계산 수학 특히 수치적 선형대수학 연구와 교육에 잘 맞는 프로그램이다. 본 논문에서는 R^n의 부분공간 개념을 중심으로 선형대수학의 주요 개념을 시각적 이해를 통하여 효과적으로 전달하는 교수학습법을 MATLAB을 이용하여 소개한다.

I. 서 론

한국대학교육협의회의 2003년 자료에 의하면, 이미 선진국의 대학에서는 연구와 교육이 통합되어 연구가 곧 교육이며, 교육활동이 연구의 산물로 변해가고 있으며, 이런 21세기 대학에서 교수의 역할은 Innovator (혁신자 역할), Broker (중개자 역할), Mentor (사부 역할), Facilitator (촉진자 역할), Monitor (감독자 역할), Coordinator (조정자 역할), Director (지시자 역할), Producer (생산자 역할)을 수행할 수 있어야 한다고 한다. 다시 말하면 강의자는 배운 것을 잘 가르치는 것에서 멈추지 말고 학생이 스스로 배워가도록 동기를 부여하고 막힌 부분을 스스로 해결해 나갈 수 있도록 도와주는 동반자가 되는 것을 요구 받는 것이다. 이미 21세기에 우리는 lecture - memorization - tests가 아니라 visualization (intuition) - trial - error - speculation - explanation을 추구해야 하고 더구나 그것이 가능한 시점과 그것이 가능한 대학에 서 있다.

수학적 개념 특히 대수적 개념은 기하학적 이해와 동시에 이루어 질 때 정확한 의미전달이 되는 경우가 많다. 특히 선형대수학의 벡터공간(Vector Space)의 개념 중 부분공간의 이해에서 기하학적 접근은 저차원에서 고차원으로 개념을 확장할 때 도움이 된다. 현재 가용한 테크놀로지를 e+강의실[1)]

---

* ZDM 분류 : D45, M15, U51
* MSC2000 분류 : 15A03, 97C90, 97U50, 97U70
* 주제어 : Vector Space, Subspace, Basis, Matlab, ATLAST

1) 전자 펜과 타블렛 모니터를 이용한 off line 강의 중 인터넷을 포함한 모든 online 교육매체를 이용한 멀티미

수업에 적용하여 시각적 개념 전달과 상호 작용을 유도하는 경우 이해도를 높일 수 있으며 반복적인 구현으로 일반적인 개념으로의 쉬운 확장을 도와줄 수 있다. 이에 본 논문에서는 벡터공간의 개념이해를 높이고 일반화에 대한 감각을 도울 수 있는 수업모델을 제시하려고 한다. 벡터들의 1차 결합 등의 개념을 소개하면서 Matlab의 M-file들을 이용하여 동차선형연립방정식(homogeneous linear system)인 $A\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$와 비동차선형연립방정식(nonhomogeneous linear system)인 $A\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해집합사이의 중요한 차이점을 학생들이 발견하도록 유도할 것이다. 실제로 동차선형인 해집합은 부분공간이 되고, 비동차선형인 경우의 해집합은 부분공간이 아니라는 사실을 학생들로 하여금 추론하게 하며 그 후 증명을 통해 확인하도록 하는 방법을 택한다. 이러한 과정을 통하여 학생들은 R^n의 부분집합 S가 부분공간(subspace)인지 아닌지를 결정하고 R^2 또는 R^3의 부분집합 중 어떤 것이 부분공간이 되는지를 알 수 있게 될 것이다. 또한 수많은 부분공간들이 단 몇 개의 원소(spanning set 즉, basis)를 가지고 완전히 분석될 수 있다는 것을 이해하게 될 것이다. 대상 학생의 단계는 선형 연립 방정식(Linear system of Equation)의 해집합을 매개변수 방정식과 벡터방정식 형태로 구할 수 있으면 된다(이상구, 2005).

목표 : R^n의 부분공간에 대한 주요 개념들을 소개하며 부분공간의 깊은 이해를 촉진시키고 R^n의 부분집합(subset)중 어떤 것이 부분공간(subspace)이 되는지를 우선 직관적으로 이해하도록 한다.

시각화를 위해 사용할 Matlab 용 프로그램은 ATLAST 프로젝트로 개발된 아래의 주소에서 다운받은 M- 파일을 이용한다.

http://www.umassd.edu/specialprograms/atlast/

MATLAB/ATLAST[2] M-files:
drawvec: 주어진 벡터를 2차원 공간에 그려준다.
drawvec3: 주어진 벡터를 3차원 공간에 그려준다.
rref: 주어진 행렬의 기약사다리꼴(REF)을 구해준다.
spangui2: 2차원 벡터들의 임의의 부분생성(random partial span)을 그림으로 보여준다.[3]
spangui3: 3차원 벡터들의 임의의 부분 생성(random partial span)을 그림으로 보여준다.[4]

디어 교육이 가능하며 동시에 교육 활동이 녹화되어 반복학습이 가능한 강의실

2) ATLAST(Augmenting the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools) 프로젝트는 International Linear Algebra Society(ILAS)의 교육위원회 (Education Committee)에서 처음으로 시행되었으며 같은 시기에 Linear Algebra Curriculum Study Group(LACSG)이 미국 과학재단 (National Science Foundation)의 지원으로 선형대수학을 직관적인 관점에서 가르치고, 개발된 소프트웨어를 사용하여 교수학습 방법을 개선하기 위하여 생겨났다.

3) ATLAST 2판, spanview의 2차원 변형 spanview2로 대치가능

주어진 벡터공간의 부분공간에 대한 시각적 이해를 돕는 여러 수준의 다양한 시도를 제공할 것이다. 수업의 진행은 개념 이해를 돕기 위한 동기부여를 통해 시작하고 다양한 예를 통해 새로운 개념에 대한 직관적 이해를 높여 목적에 도달할 것이다. 강의자를 위한 지침 또한 제시한다. 그 과정에 등장하는 선형대수학의 개념도 소개한다.

Ⅱ. 본 론

우선 강의자는 R^n의 부분집합이 갖는 주요 성질을 발견할 수 있도록 학생들에게 다양한 질문을 하고 동차와 비동차 선형 연립방정식의 해집합의 차이점을 학생 스스로 조사하도록 요구한다.

1. 연립일차방정식을 통한 부분공간의 개념 이해

다음의 개념소개로부터 본격적인 시각화를 이용한 교수학습모델을 살펴보자.

지금부터 R^n의 부분공간에 관하여 알아보자.

· 동차와 비동차의 정의

미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 관한 m개의 일차방정식으로 이루어진 연립방정식

$$
\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & =b_m
\end{array}
$$

에서 실수 $b_1, b_2, \cdots, b_m$이 모두 0이면 이 연립방정식을 동차(homogeneous)라 하고 그렇지 않으면 비동차(non-homogeneous)라고 한다.

Project 1 : 동차연립방정식을 생각하자.

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0},\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) 가우스 소거법과 Matlab[5]의 함수 rref를 사용하여 해를 구하라.

---

4) ATLAST 2판, spanview로 대치가능

5) 우선 Matlab의 기본 사용법은 아래 주소를 참고한다.
http://matrix.skku.ac.kr/sglee/l_matlab/
http://matrix.skku.ac.kr/sglee/atlast/

```
» A=[1 -3;-1 3]
A = 1    -3
   -1     3
» rank(A)                    일차독립인 행의 수
ans = 1
» rref(A)                    행렬의 RREF를 구하는 명령어
ans = 1    -3
      0     0
```

$$x = 3t, \;\; y = t$$

(b) 벡터방정식을 사용하여 해를 설명하라.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) 해집합이 기하학적으로 표현하는바가 무엇인가?

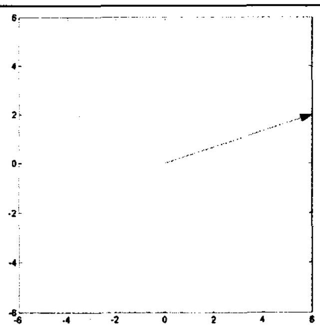
$y = \frac{1}{3}x$ 를 지나는 점들의 집합

(d) 두 개의 다른 영이 아닌 해를 구하고 그것을 **u**, **v**라 하자.

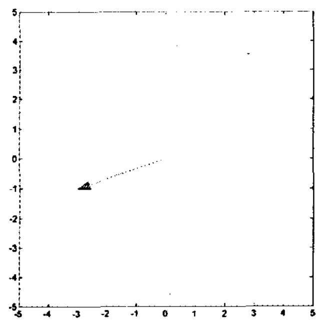
$$\mathbf{u} = (6, 2), \;\; \mathbf{v} = (-3, -1)$$

(e) 두 벡터 **u**와 **v**를 drawvec을 사용하여 그림으로 나타내어라.

```
» A=[1 -3;-1 3];          행렬 A 를 지정한다.
» u=[6;2];                벡터 u 를 설정한다.
» A*u
  ans = 0
        0
» drawvec(u,'r')          벡터 u 를 빨간색(red)으로 그린다.
```

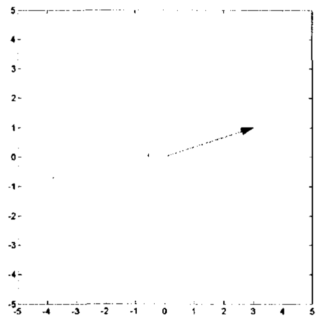


```
» v=[-3;-1];              벡터 v 를 설정한다.
» A*v
  ans = 0
        0
» drawvec(v,'c')          벡터 v 를 청록색(cyan)으로 그린다.
```



(f) 벡터의 합 $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$를 그림으로 나타내고 $\mathbf{z}$ 는 해(solution)인가?

» z=u+v	*벡터 **u** 와 **v** 를 더하여 **z** 에 지정한다.*
z = 3 　1	*벡터 **z** 의 값을 다음과 같이 얻을 수 있다.*
» drawvec(z,'b')	*벡터 **z** 를 청색(blue)으로 그린다.*



역시 해가 됨을 알 수 있다.

(g) $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 가 두 개의 해일 때 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$도 역시 해임을 보여라.

증명 : $A\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $A\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$이면

$A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\,\mathbf{u} + A\,\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$이고

$\therefore$ $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 도 해이다.

(h) 벡터 $5\,\mathbf{u}$와 $-3\,\mathbf{v}$를 나타내어라. 두 벡터가 역시 해인지 보여라.

증명 : $A(5\,\mathbf{u}) = 5A\,\mathbf{u} = 5\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$A(-3\,\mathbf{v}) = -3A\,\mathbf{v} = -3\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\therefore$ $5\,\mathbf{u}, -3\,\mathbf{v}$ 도 해이다.

(i) $\mathbf{s}$가 임의의 해이면 스칼라 α에 대하여 $\alpha\,\mathbf{s}$가 해인지 보여라.

증명 : $A(\alpha\,\mathbf{s}) = \alpha A\,\mathbf{s} = \alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\therefore$ $\alpha\,\mathbf{s}$도 해이다.

(j) $\mathbf{s}$ 와 $\mathbf{t}$가 $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 두 해이면 벡터 $\alpha\,\mathbf{s} + \beta\,\mathbf{t}$가 역시 해인가?

(이것은 두개의 해의 일차결합도 해가 된다는 것을 의미한다.)

답 : 그렇다.

$\because A(\alpha\,\mathbf{s} + \beta\,\mathbf{t}) = \alpha A\,\mathbf{s} + \beta A\,\mathbf{t} = \alpha\,\mathbf{0} + \beta\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Project 2: 비동차 선형연립방정식을 생각하자.

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) 가우스 소거법과 **rref**를 사용하여 해를 구하라.

풀이 : $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$x - 3y = -3$ 에서 $y = t$라 하면

$x = 3t - 3$ 을 얻을 수 있다.

$\therefore$ $(3t-3,\ t)$이다.

(b) 벡터방정식을 사용하여 해를 설명하라.

해는 $t\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$이다.

(c) 해집합을 그림으로 나타내고, 기하학적으로 그것이 뜻하는바(표현)가 무엇인지 설명하라.

$y = \dfrac{1}{3}x + 1$을 지나는 점들의 집합

(d) 두 개의 다른 해를 구하고 그것을 **u**, **v**라 하자.

$\mathbf{u} = (3,\ 2),\quad \mathbf{v} = (-3,\ 0)$

(e) 두 벡터 **u**와 **w**를 drawvec을 사용하여 그림으로 나타내어라.

» A=[1 -3;-1 3]; *행렬 A 를 지정한다.*

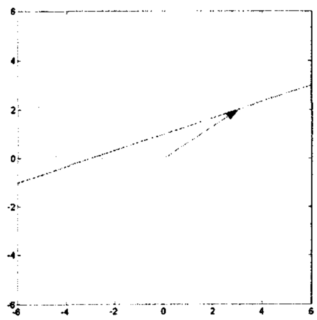
» u=[3;2]; *벡터 **u**를 설정한다.*

» A*u

ans = -3

3

» drawvec(u,'r') *벡터 **u**를 빨간선(red)으로 그린다.*



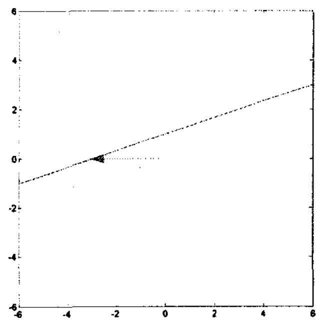
» v=[-3;0]; *벡터 **v** 를 설정한다.*

» A*v

ans = -3

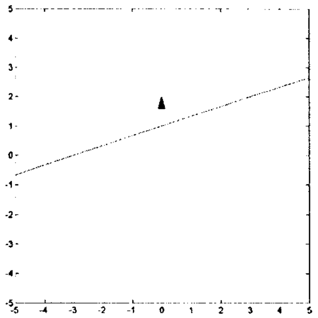
3

» drawvec(v,'c') *벡터 **v** 를 청록색(cyan)으로 그린다.*



(f) 벡터의 합 $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$를 그림으로 나타내고 여기서 $\mathbf{z}$는 해인가? 답 : 아니다

» z=u+v;	*벡터* **u** *와* **v** *를 더하여* **z***에 저장한다.*
» drawvec(z,'b')	*벡터* **v** *를 청색선(blue)으로 그린다.*



(g) $-2\mathbf{u}$와 $3\mathbf{v}$의 그림을 그리고 두 개의 벡터가 역시 해인가? 답 : 아니다

(h) $\mathbf{s}$가 해이고 $\alpha = 1$일 때 $\alpha\mathbf{s}$가 해임을 보여라.

증명: $A(\alpha\,\mathbf{s}) = \alpha A\,\mathbf{s} = \alpha\,\mathbf{b}$

$\therefore\ \alpha\,\mathbf{b} = \mathbf{b} \Rightarrow \alpha = 1$

Project 3: 앞에서 공부한 projects 1, 2의 두 해집합은 R^2의 부분집합으로 아주 비슷한 모양(단지 축 이동의 차이일 뿐)이다. 그러나 그 두 개는 서로 중요한 차이가 있는데 이 두 부분집합 중 하나만이 갖는 특별하고 좋은 성질이 무엇일까? (벡터 덧셈과 스칼라 배에 대하여 생각하라)

이 단계에서 학생들은 아직 동차 연립 일차방정식의 해집합이 벡터덧셈과 스칼라 배가 해집합에서 닫혀 있다(closed)는 두 개의 성질을 알지 못할 수도 있다. 처음에는 부분공간이 '모든 1차 결합'을 포함해야만 한다는 성질을 강조하지 않는 것이 좋다. 더구나 학생들은 좌표벡터 $t(2,\ 1)$을 점으로 생각하고 '원점에서 시작하여 그 선상의 한 점에 끝점을 가지는 방향과 크기를 갖는 벡터'라는 것을 미처 인식하지 못하는 경우도 있다. 강의자는 이러한 관찰을 할 수 있게 학생들을 도와주어야 하며, 다음과 같은 주요 개념에 대한 기본적인 이해를 갖게 할 수 있어야 한다. 첫째로 부분공간은 벡터덧셈과 스칼라 배에 대해 닫힘(closedness)이라고 불리는 두 개의 기본 성질을 갖는다. 둘째로 이러한 두 가지 성질 때문에 무수히 많은 원을 갖는 부분공간의 벡터들이 유한개의 벡터들에 의하여 표시될 수 있다. 셋째는 영공간(null space)이 부분공간이기 때문에 선형 연립 방정식의 무수히 많은 해들로 이루어진 해집합도 유한개 벡터들의 일차결합으로 표시되어 질 수도 있다.

Project 4: 아래의 동차선형연립방정식을 생각해 보자.

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\ ,\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -6 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

(a) 가우스 소거법과 **rref**를 사용하여 해를 구하라.

```
» A=[2 1 4;-6 -3 -12];
» rank(A)
ans =  1
» rref(A)
ans = 1.0000    0.5000    2.0000
         0         0         0
```

$$x + \frac{1}{2}y + 2z = 0,\ 2x + y + 4z = 0$$

$$x = t,\ y = -2t - 4s,\ z = s$$

(b) 벡터방정식[이상구, 2005. 21쪽]을 사용하여 해를 설명하라.

답. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (1)

(c) 해집합이 기하학적으로 의미하는 바가 무엇인가?

답: 원점을 지나는 평면

(d) 서로 다른 두 개의 영 아닌 해를 구하고 그것을 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 라 하자.

(1)에서 $(t = 1,\ s = 0)$, $(t = 0,\ s = 1)$인 경우 $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$, $\mathbf{v} = (0, -4, 1)$.

(e) 두 벡터 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 를 drawvec3을 사용하여 그림으로 나타내어라.

(f) 벡터의 합 $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$를 그림으로 나타내고 여기서 $\mathbf{z}$ 는 해인가? 답: 그렇다.

(g) $\mathbf{s}$ 와 $\mathbf{t}$ 가 두 개의 해 일때 $\mathbf{s} + \mathbf{t}$도 역시 해인가? 답 : 그렇다

(h) 벡터 $2\mathbf{u}$와 $-\mathbf{v}$를 구하여, 두 벡터가 역시 해인지 확인해라. 답 : 그렇다

(i) $\mathbf{s}$ 가 임의의 해이면 스칼라 α에 대하여 $\alpha\mathbf{s}$도 해인가? 답 : 그렇다. 즉, $\alpha\mathbf{s}$도 해이다.

문제 : '위에서 다룬 선형연립방정식의 예들이 단 2개의 해만을, 또는 단 3개의 해만을 또는 몇 개의 유한개의 해만을 가질 수 있을까?' 두 개의 직선을 그려 한 곳보다 더 많은 곳에서 교차점이 언제 생기는지를 보여 보도록 시키면 이해가 될 것이다. 즉 2곳 또는 3곳의 교차점이 생길 수 있을까? (답: 아니다.) 이와 같은 사실로부터 직선과 2차 연립방정식 사이의 어떤 관계를 알 수 있을까? (동차연립방식이 영이 아닌 해를 가지면, 무수히 많은 해를 가진다.)

(j) $\mathbf{s}$ 와 $\mathbf{t}$ 가 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 두 해라면 벡터 $\alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{t}$가 역시 해인가? 이것은 두 해의 일차결합으로 형성된 벡터들이 모두 해가 된다는 것을 의미하는가? 답:그렇다.

$\because A(\alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{t}) = \alpha A\mathbf{s} + \beta A\mathbf{t} = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$

학생들에게 정수 집합의 무한 진부분집합에 대한 보기를 만들도록 하면 학생들은 '홀수집합' 또는 '3으로 나누어지는 집합' 등과 같은 대답을 할 것이다. 다행히 모든 해집합은 어떤 단순한 구조를 갖기 때문에 동차 선형연립방정식의 해집합이 무한집합일지라도 이를 이해하고 다룰 수 있다는 것이다. 이러한 구조를 '부분공간'이라는 개념을 통해 이해시키려고 한다.

Project 5: 비동차 선형연립방정식을 생각하자.

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) 가우스 소거법과 **rref**를 사용하여 해를 구하라.

```
>>A=[-2 3 2; 2 1 4];
>> rank(A)
ans = 2
>> rref(A)
ans =1.0000        0    1.2500
          0   1.0000    1.5000
>> A1=[-2,3,2,3;2,1,4,4]
>> rref(A1)
ans =1.0000        0    1.2500    1.1250
          0   1.0000    1.5000    1.7500
```

(b) 벡터방정식을 사용하여 해를 설명하라.

답: $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) 해집합을 그림으로 나타내고, 기하학적으로 그것이 뜻하는바(표현)가 무엇인가? 답: 직선(두 평면의 교선)

(d) 두 개의 다른 영이 아닌 해를 구하고 그것을 $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ 라 하자.

답: $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{49}{8} \\ \frac{31}{4} \\ -4 \end{bmatrix}, \; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e) 벡터의 합 $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$를 그림으로 나타내어라. 여기서 $\mathbf{z}$는 해인가? 답: 아니다.

(f) $\mathbf{s}$와 $\mathbf{t}$가 두 개의 해이고 $\alpha + \beta = 1$ 이면 $\mathbf{z} = \alpha\,\mathbf{s} + \beta\,\mathbf{t}$도 역시 해임을 보여라. 그리고

벡터 **z**는 어떤 도형인가?

증명: $A\mathbf{s}=\mathbf{b},\ A\mathbf{t}=\mathbf{b}$

$A(\alpha\mathbf{s}+\beta\mathbf{t})=\alpha A\mathbf{s}+\beta A\mathbf{t}=(\alpha+\beta)\mathbf{b}=\mathbf{b}$

벡터 **z**는 **s**와 **t**를 연결하는 직선을 나타낸다.

(g) 벡터 $-2\mathbf{u}$와 $3\mathbf{w}$를 나타내어라. 두 벡터는 해인가? 답: 아니다.

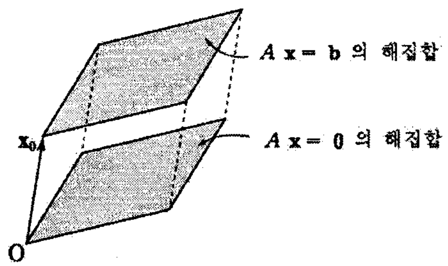
(h) **s**가 임의의 해이면 $\alpha=1$일 때 αs가 해임을 보여라.

증명: $A(\alpha\mathbf{s})=\alpha A\mathbf{s}=\alpha\mathbf{b}=\mathbf{b}$

Project 6: 앞의 projects 4, 5에서 본 두개의 해집합은 모두 R^3의 부분집합이며 서로 중요한 차이점을 가지고 있다. 이 둘의 차이를 구별할 수 있는 성질을 찾아 낼 수 있는가? (힌트 : 벡터 덧셈과 스칼라 배를 생각하게 한다.)

대부분의 학생들은 이 과정을 거치며 아마 동차 선형연립방정식의 해집합이 "(1)벡터덧셈에 대하여 닫혀있으며. (2)스칼라 배에 대해 닫혀 있다."라는 두 개의 특징적 성질을 알게 될 것이다. 교사들은 예제를 추가하면서 학생들이 두 개의 특징적 성질을 발견할 수 있도록 도와준다.

Project 1과 2, project 4와 5는 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 또는 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$의 해집합으로서의 부분집합들이 나타내는 특성에 대한 시각적 표현이다. 이 해집합들은 좀더 엄밀하게 설명하면 Affine 공간의 개념으로 이해할 수 있다. 만약 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$이면 $A(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)=A\mathbf{x}+A\mathbf{x}_0=\mathbf{0}+\mathbf{b}=\mathbf{b}$이다. 그러므로 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$의 해가 존재한다면 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해공간 W에 대해서 $\mathbf{x}_0+W=\{\mathbf{x}_0+\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in W\}$는 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$의 해집합이다. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$의 해집합 $\mathbf{x}_0+W$의 기하학적 의미는 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해공간 W에 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$의 특수해 $\mathbf{x}_0$를 더한 평행이동집합으로 생각할 수 있다.



<그림 1> 선형연립방정식과 수반동차연립방정식의 해집합 사이의 관계

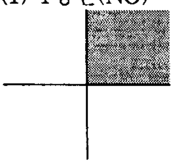
따라서 $\mathbf{x}_0+W$는 영벡터를 안 가지므로 R^n의 부분공간은 아니지만 Affine공간이라고 부른다 (이상구, 2005).

2. 예를 통하여 부분공간의 개념을 강조하자

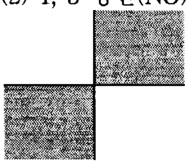
아래의 Project 7의 보기는 부분공간과 부분공간이 되지 않는 R^2와 R^3의 부분집합들의 예들이다. 강의자는 R^n의 부분집합에서 벡터들의 집합들이 부분공간을 이루는 가 아닌가에 대한 사실을 강조할 필요가 있다. 이러한 예를 통하여 학생들은 R^n의 부분공간을 이루는 것이 무엇인지를 확실하게 이해하게 되는 것이다. 특히 학생들이 R^2와 R^3의 모든 부분공간을 이해할 수 있도록 해 주어야 한다.

Project 7: 아래 그림(1~12)에서 직선과 색이 칠해진 부분은 R^2의 부분집합이다. 어떤 부분집합이 부분공간인지를 결정하라. 또 어떤 부분집합이 부분공간이 되지 않는지 그 이유를 설명하라. 부분공간의 중요한 특성인 벡터덧셈과 스칼라배의 단힘성을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

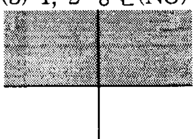
(1) 1상한(NO)



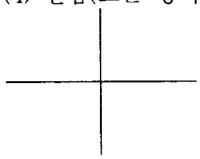
(2) 1, 3 상한(NO)



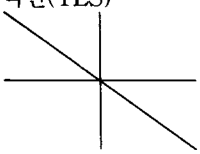
(3) 1, 2 상한(NO)



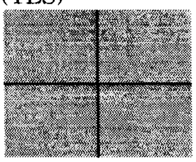
(4) 원점(또는 영벡터)(YES)



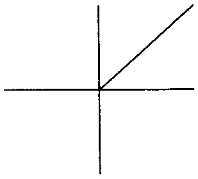
(5) 원점을 통과하는 직선(YES)



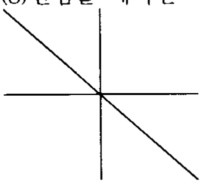
(6) 전체 평면 (R^2 전체) (YES)



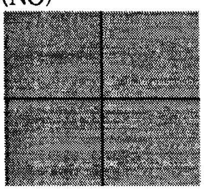
(7) 반 직선(NO)



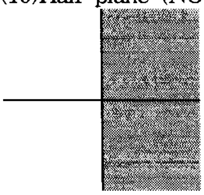
(8)원점을 제외한 직선(NO)



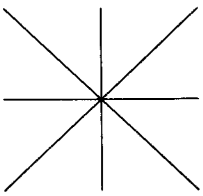
(9)원점을 제외한 평면 (NO)



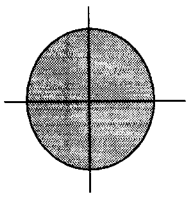
(10)Half-plane (NO)



(11) 원점에서 교차하는 두 직선(NO)



(12) 원의 내부 (NO)



Project 8: 위의 보기를 통하여 아래의 질문의 답을 예상해보아라.

1) R^2의 3가지 종류의 부분공간을 열거하라.

답 : ϕ, R , R^2

2) R^3의 4가지 종류의 부분공간을 열거하라.

답 : ϕ, R , $R^2 \cdot R^3$

3) R^2는 R^2의 부분공간중 하나이다. R^2은 R^3의 부분공간인가?

답: $R^2 \cong \{(a,b,0) | a,b \in R\} \le R^3$

Project 9: 부분공간의 개념을 통해 다음의 성질에 대해서 생각해보자.

1) 두 개의 부분공간의 합집합이 언제나 부분공간인가? 설명하라. (답 :아니다, 반 예 제시)

2) R^n에서 U와 W가 부분공간이면 $U \cap W$는 부분공간이다.

3) R^n에서 U와 W가 부분공간이고 $U \cup W$이 부분공간이면, 이때 U가 W의 부분공간이거나 W가 U의 부분공간이다.

3. 행렬과 관계된 그 외의 중요한 부분 공간

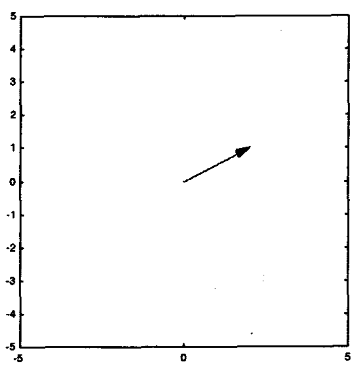
앞에서 언급한 바와 같이 대수학은 기하학의 이해에 있어서 매우 중요한 역할을 한다. 즉 학생들은 부분공간의 기하학적 표현으로부터 부분공간의 대수적 표현으로 관점을 바꾸는 것이 요구된다. 그럼에도 불구하고 부분공간을 공부함에 있어 위의 두 개의 관점은 불가분의 관계가 있다. 이제부터 여러 프로젝트를 통해서 행렬과 관계된 중요한 부분공간(영공간, 열공간, 행공간 등)을 Matlab의 임의의 생성(Span) M-file을 이용해서 시각적으로 이해하도록 하자.

Project 10: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$라 하자. 우리는 이 행렬에 벡터를 곱하는 것을 R^2 에서 R^2로 가는 사상으로 생각할 수 있다. 즉, A: $R^2 \to R^2$로 나타낼 수 있다.

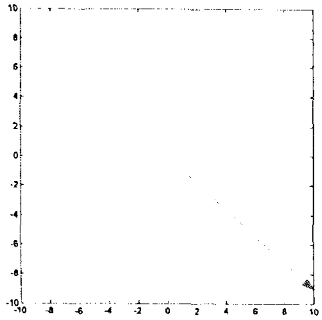
(i) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$에 대하여

a)벡터 $\mathbf{x}$ 로부터 $A\mathbf{x}$ 를 계산하고 $\mathbf{x}$ 와 $A\mathbf{x}$ 의 그림을 그려라. M-file **drawvec**을 아래와 같이 이용하여 이것을 얻을 수 있다.

» A=[3 4;-2 -5];	*A 행렬을 지정한다.*
» x=[2;1];	*아래의 벡터(i)을 입력한다.*
» drawvec(x,'r')	*벡터* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$*를 빨간색(red)으로 그린다.*



» drawvec(A*x,'c') *벡터 $A\mathbf{x}$ 를 청록색으로 그린다.*



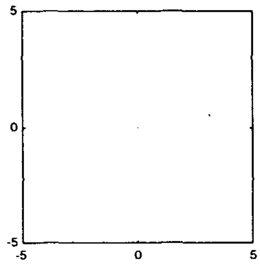
이번에는 (ii)의 과정을 실행하여보자.

» A=[3 4;-2 -5]; *A 행렬을 지정한다.*

» x=[0;0]; *위의 벡터(ii)을 입력한다.*

» drawvec(x,'r') *벡터 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 를 빨간색으로 그린다.*

» drawvec(A*x,'c') *벡터 $A\mathbf{x}$ 를 하늘색으로 그린다. 점이라 거의 보이지 않음*



벡터(ii)의 예는 영벡터(zero vector)들의 상벡터(image vector) $A\mathbf{x}$ 도 R^2 상에서의 영벡터가 됨을 말한다. 어떤 2×2 행렬도 영벡터는 R^2 상의 영벡터로 보낸다.

b) **Nullspaces(영공간)** : $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ 이라 하자. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 이면 $B\mathbf{x}$ 는 무엇인가? 벡터 $\mathbf{x}$ 에 대하여 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 이 만들어짐을 확인할 수 있다.

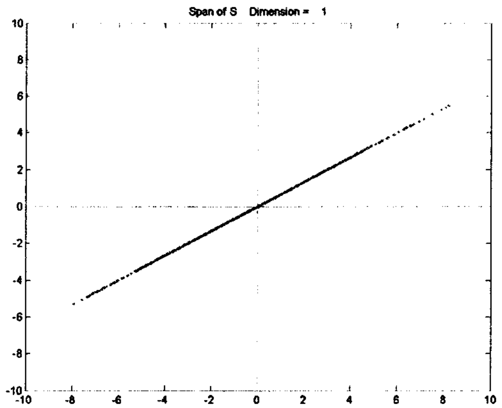
$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = (-3)\,\mathbf{x}$ 일 때, $B\mathbf{t} = \mathbf{0}$ 임을 확인하고 이 과정을 설명하라.

답: 만일 k가 실수이면

$$B(k\,\mathbf{x}) = k(B\,\mathbf{x}) = k(\,\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ 이다.}$$

c) $\mathbf{v} = k\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 인 벡터 $\mathbf{v}$ 의 집합은 정의역 R^2 에서 무슨 모양인가? M-파일 **spangui2**를 사용하여 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 의 배수인 벡터를 그려보자. Matlab의 spangui2는 행벡터 [3 2]처럼 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 을 입력받은 후에 임의의 500개 이상의 스칼라 배를 수행하여 그려준다.

» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 1
1차원을 의미
Enter a 2-vector [x y]: [3 2]
How many linear combinations do you want to see (n>=500)? 1000



위의 프로젝트를 통해서 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 을 만족하는 R^2의 부분공간인 영공간(Nullspaces)에 대해 시각적으로 이해할 수 있다. $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 를 만족하는 R^2의 부분공간 $W=\{\mathbf{x}\mid B\mathbf{x}=\mathbf{0},\ \mathbf{x}\in\mathrm{R}^2\}$는 그림에서 보듯이 원점을 지나는 직선 $-2x+3y=0$이다. 실제로, R^2의 부분공간은 $\{\mathbf{0}\}$, R^2 그리고 원점을 지나는 직선 이외에는 존재하지 않는다. [이상구, 2005]

Project 11: 위의 2차 행렬에서 보았듯이 3×3 행렬은 R^3에서 R^3로의 사상이다.

a) 행렬 $C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ 2 & -4 & -8\end{bmatrix}$ (rank 1)을 생각하자.

M-file **drawvec3**를 이용해서 아래 보기의 경우에 $\mathbf{x}$와 $C\mathbf{x}$의 그래프를 생각해 보자.

(i) $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ (iii) $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$

b) 벡터 (i) (ii) (iii)의 관계는 무엇이고, 행렬 C와 관련해서 생각해 보자.

답 : $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $C\mathbf{x}+C\mathbf{y}=C\mathbf{z}$

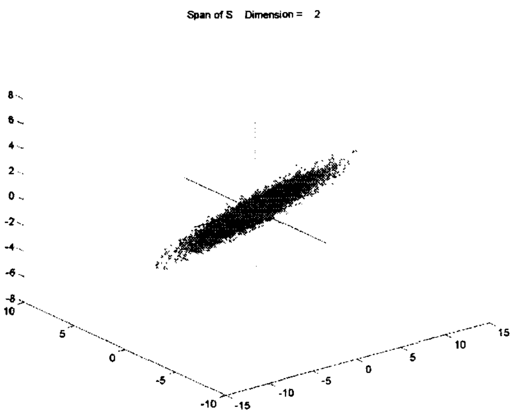
만일 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 이고 $C\mathbf{y}=\mathbf{0}$인 벡터이면 $C(\mathbf{x}+\mathbf{y})=C\mathbf{x}+C\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 이다.

만일 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 이고 $C\mathbf{y}=\mathbf{0}$인 벡터이면 스칼라 a, b에 대하여

$C(a\ \mathbf{x}+b\ \mathbf{y})=aC\ \mathbf{x}+bC\ \mathbf{y}=\mathbf{0}$이다.

c) 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$의 1차 결합을 M-file **spangui3**을 이용하여 그려 보자.

```
» spangui3
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 2
Enter a 3-vector [x y z]: [2 -1 1]
Enter a 3-vector [x y z]: [2 1 0]
How many linear combinations do you want to see (n>=500)? 10000(수치를 높여가며 평면임을 확인)
```



위 그림은 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$를 만족하는 해인 두 벡터의 1차결합 벡터들을 그린 것으로서 해공간의 임의의 생성된 벡터들을 의미한다. 기하학적으로 해석하면

$$-x+2y+4z=0$$

을 만족하는 원점을 지나는 평면을 나타낸다. 실제로 R^3의 모든 부분공간은 아래 4종류 중 하나이다.

1. 영부분공간 $\{\mathbf{0}\}$
2. 원점을 지나는 직선
3. 원점을 지나는 평면
4. R^3 전체 [이상구, 2005]

Project 12:

이제 3×5행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&3&2\\-1&1&0&-2&1\\0&2&2&0&0\end{bmatrix}$에 대해서 생각해보자. 행렬 A는 R^5에서 R^3으로의 함수를 의미한다.

벡터 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-5\\-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$에 대하여 $A\mathbf{x}$를 구하고 k가 실수일 때, $A(k\,\mathbf{x})=\mathbf{0}$임을 확인하라.

$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\3\\3\\0\\2\end{bmatrix}$에 대해서도 $A\mathbf{y}$를 계산하면 $\mathbf{0}$임을 알 수 있다. 실제로, 위 식의 해를 매개변수방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\{ \mathbf{x} \in R^5 \mid A\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$는 위 식 $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 해공간을 나타낸다. 실제로 이 해공간은 위 벡터 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 일차결합으로 표현될 수 있다. 벡터공간 R^m에서 R^n으로의 선형변환에 대응하는 행렬을 $A \in M_{m\times n}$이라 하자. 이 문제로부터 R^n의 부분집합 $\{ \mathbf{x} \in R^n \mid A\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$이 부분공간이 되는 것을 확인할 수 있다. 다시 말해서,

(1) 위 집합 안의 원소의 스칼라배도 부분집합 안에 있다. (즉, 스칼라 배에 대하여 닫혀있다.)
(2) 위 집합 안의 두 벡터의 합이 다시 부분 집합 안에 있다(즉, 벡터 합에 대하여 닫혀있다.).

그러므로 A가 $m\times n$행렬이면 $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 모든 $\mathbf{x}$의 집합은 R^n의 부분공간이다. 이 부분공간을 특히 행렬 A의 영공간(null space)라고 부른다. 특히 특성 (1)과 (2)는 다음과 같이 요약할 수 있다. '부분공간(subspace)은 그 안의 원소의 1차 결합에 대하여 닫혀있는 집합이다.'

Project 13 : 상공간(Image Spaces)

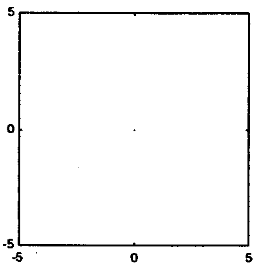
A가 $m \times n$행렬 일 때 사상 A: $R^n \to R^m$을 정의할 수 있다. 다음의 예를 통하여 R^n에서 R^m으로 보내는 사상으로서의 행렬의 역할에 대해서 알아보자.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$일 때, 벡터 $\mathbf{x}$와 $A\,\mathbf{x}$를 그려라.

(i) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

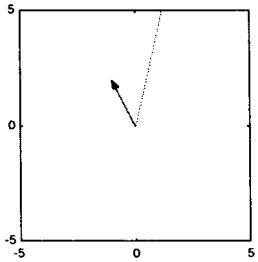
(i)

```
» A=[1 2 ;-3 5];
» x=[0;0];
» drawvec(x,'r')
» hold on
» drawvec(A*x,'c')
```



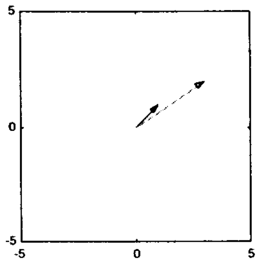
(ii)

```
» A=[1 2 ;-3 5];
» x=[-1;2];
» drawvec(x,'r');
» hold on
» drawvec(A*x,'c')
```



(v)

```
» A=[1 2 ;-3 5];
» x=[1;1];
» drawvec(x,'r');
» hold on
» drawvec(A*x,'c')
```



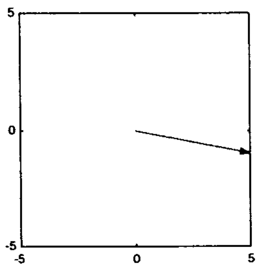
A가 R^2에서 R^2로 가는 사상일 때, 부분집합 $T = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^n\}$을 생각해보자. 이 부분집합은 스칼라 배에 대하여 닫혀있는가? (답: 그렇다.) 이 부분집합은 벡터합에 대하여 닫혀있는가? (답: 그렇다.) 이 집합 T는 R^2의 부분공간인가? (답: 그렇다).

b) rank 2인 행렬 $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$에 대하여 각 벡터 $\mathbf{x}$의 $D\mathbf{x}$를 구하고 **spangui2**를 사용하여 상(image)벡터 $D\mathbf{x}$들의 임의의 1차 결합을 그려라.

$$(\text{i})\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ii})\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{iii})\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

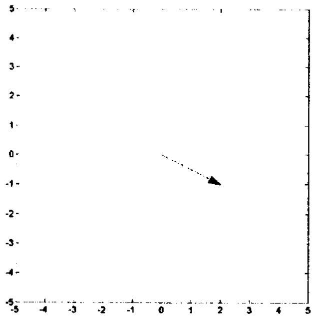
(i)

```
» D=[1 2 1;-1 1 0];
» x=[1;0;4];
» H=D*x
H = 5
   -1
» drawvec(H,'r')
```



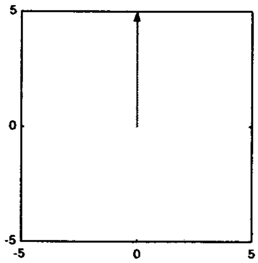
(ii)

```
» D=[1 2 1;-1 1 0];
» x=[2;1;-2];
» H=D*x
H = 2
   -1
» drawvec(H,'r')
```



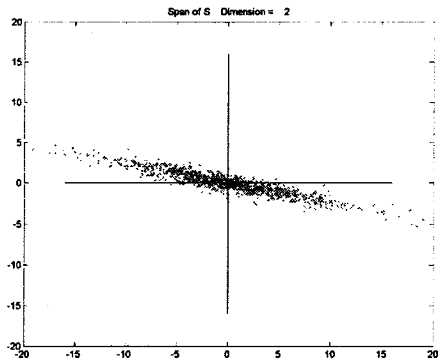
(iii)

```
» D=[1 2 1;-1 1 0];
» x=[-3;2;-1];
» H=D*x
H = 0
    5
» drawvec(H,'r')
```

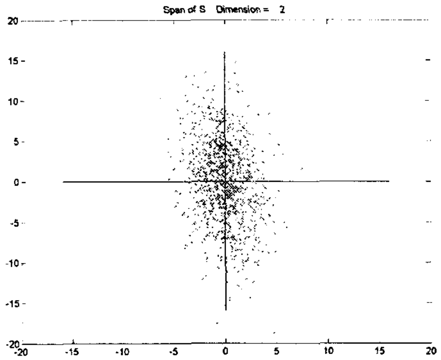


위 계산에서 구한 상벡터 [5, -1], [2 -1], [0, 5] 의 일차결합을 시각적으로 표현해 보자.

```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 2
Enter a 2-vector [x y]:  [5 -1]
Enter a 2-vector [x y]:  [2 -1]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```

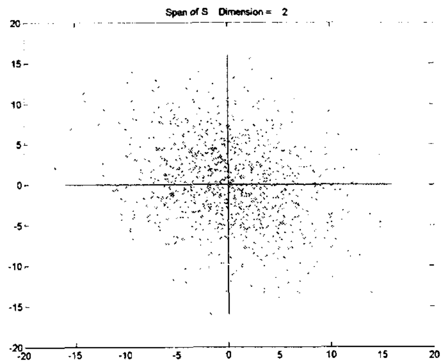


```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 2
Enter a 2-vector [x y]:  [2 -1]
Enter a 2-vector [x y]:  [0 5]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```



각각의 쌍들의 일차결합을 통해 상(imae)벡터들의 집합 $\{D\,\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathrm{R}^2\}$이 R^2의 부분공간으로 이해될 수 있음을 시각적으로 확인하였다.

```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 2
Enter a 2-vector [x y]:  [5 -1]
Enter a 2-vector [x y]:  [0 5]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```



c) 다음의 벡터 $E\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$를 살펴보자. 다음과 같은 과정으로

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 3\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$+ 0\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + (-1)\cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

이미지 $E\,\mathbf{x}$은 E의 열들의 1차 결합임을 알 수 있다. 이점에 대하여 학생들이 모든 상(image)벡터들이 이루는 부분공간을 이해하도록 지도해야 한다. 사실 모든 행렬의 열들의 1차 결합이 사상을

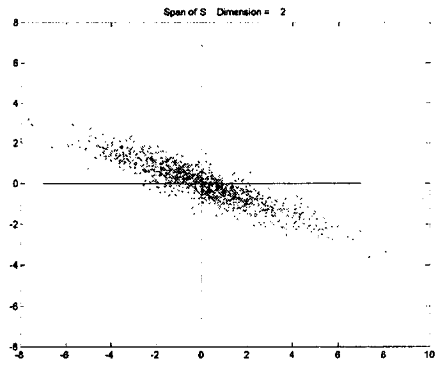
정의하게 되는 것이다.

Project 14: 열공간(Column Space)

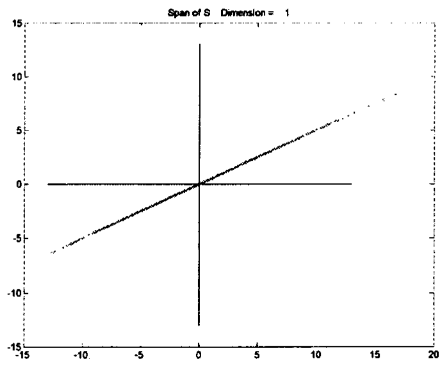
열공간의 개념을 소개하기 위해 행렬 $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$(rank 2)와 $G = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$(rank 1)를 생각하자.

a) R^2의 열공간을 **spangui2** 를 사용하여 구하자. (F의 열벡터의 1차결합을 구하여 보자.) 행렬 G로부터 같은 문제를 풀어보자. 그리고 2×2 행렬의 열벡터들로 이뤄진 부분공간에 대해서 이해해 보자.

```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1 to 5)? 2
Enter a 2-vector [x y]:  [2 -1]
Enter a 2-vector [x y]:  [1 0]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```




```
Enter a 2-vector [x y]:  [2 1]
Enter a 2-vector [x y]:  [-4 -2]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```

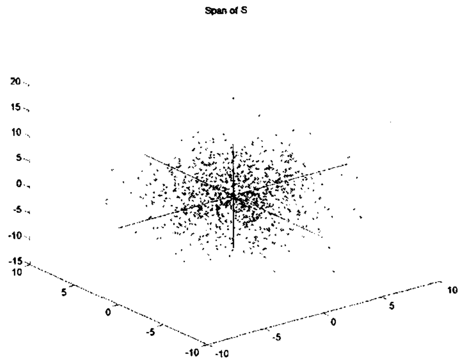


행렬 F의 열공간은 R^2 평면을 행렬 G의 열공간은 원점을 지나는 직선을 나타냄을 시각적으로 확인할 수 있다.

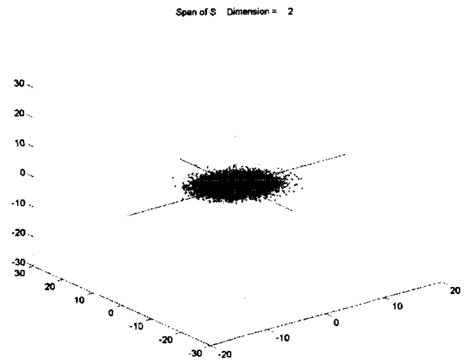
b) 다음 행렬 $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$(rank 3)와

$K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$(rank2), $L = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$(rank1)의 열공간을 생각해 보자. **spangui3**을 사용하여 열공간의 1차 선형결합에 대하여 강화시키자. $n \times n$ and $m \times n$ 행렬(공간)에 대하여 일반화하자.

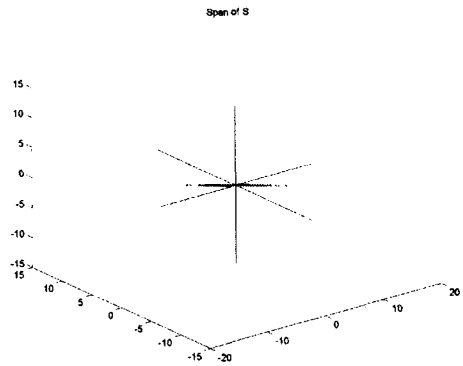
```
» spangui3
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 3-vector [x y z]:  [2 -1 0]
Enter a 3-vector [x y z]:  [1 0 3]
Enter a 3-vector [x y z]:  [1 -1 -3]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```




```
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 3-vector [x y z]: [3 6 -6]
Enter a 3-vector [x y z]: [-1 -2 2]
Enter a 3-vector [x y z]: [-2 -4 0]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)? 10000(수치를 높여 평면임을 확인)
```




```
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 3-vector [x y z]: [2 1 -1]
Enter a 3-vector [x y z]: [-4 -2 2]
Enter a 3-vector [x y z]: [-2 -1 1]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```

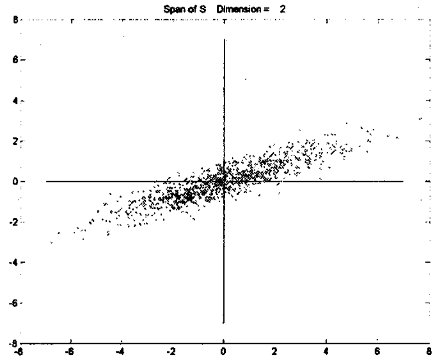


위 행렬들의 열계수(column rank)는 각각 3, 2, 1로서 일차독립인 열벡터의 개수를 의미하며 대응하는 임의의 생성벡터들의 모양을 보면 각각 3차원 공간, 원점을 지나는 평면과 직선을 나타낸다.

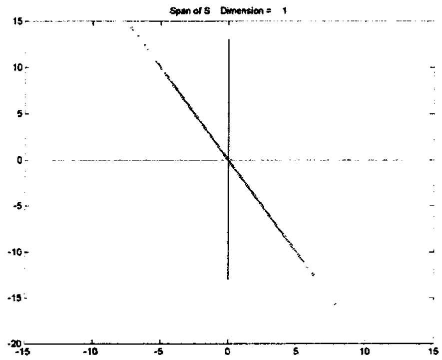
Project 15: 행공간(Row Space)

a) 이 시점에서 학생은 열공간에 이어서 행벡터의 모든 일차결합의 집합에 대해서 궁금해 할 것이다. **spangui2** 와 **spangui3**을 이용하여 각 행렬 *F*, *G*, *H*, K, L의 행공간을 구하자.

```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 2
Enter a 2-vector [x y]:  [2 1]
Enter a 2-vector [x y]:  [-1 0]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```

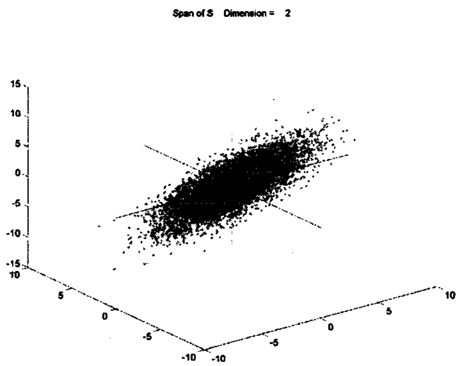



```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 2
Enter a 2-vector [x y]:  [2 -4]
Enter a 2-vector [x y]:  [1 -2]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```

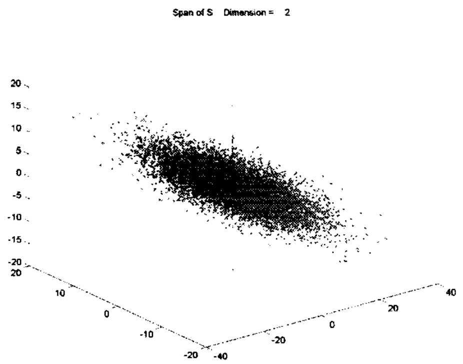


역시 R^2의 부분공간인 R^2 전체 평면과 원점을 지나는 직선을 시각적으로 보여준다. 이번에는 3차원의 실행을 해보자.

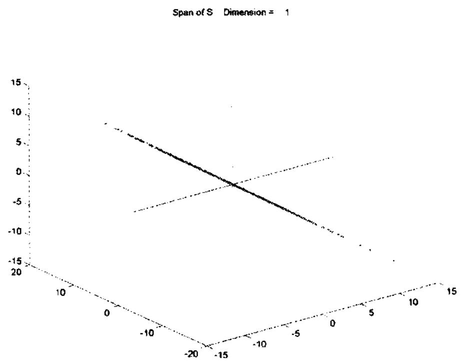
```
» spangui3
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 3-vector [x y z]:  [2 1 1]
Enter a 3-vector [x y z]:  [-1 0 -1]
Enter a 3-vector [x y z]:  [0 3 -3]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  10000(수치를 높여 평면임을 확인)
```



```
» spangui3
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 3-vector [x y z]:  [3 -1 -2]
Enter a 3-vector [x y z]:  [6 -2 -4]
Enter a 3-vector [x y z]:  [-6 2 0]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  10000(수치를 높여 평면임을 확인)
```



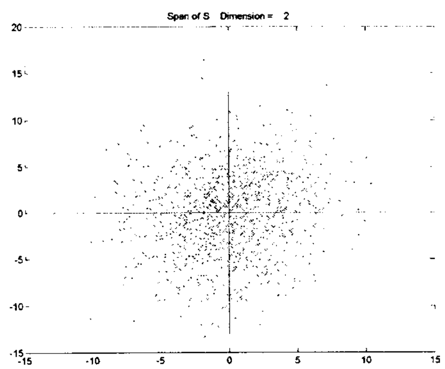

```
» spangui3
How many 3-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 3-vector [x y z]:  [2 -4 -2]
Enter a 3-vector [x y z]:  [1 -2 -1]
Enter a 3-vector [x y z]:  [-1 2 1]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```



3차원에 대해서도 열공간과 같은 부분공간으로서의 행공간을 시각적으로 이해할 수 있다.

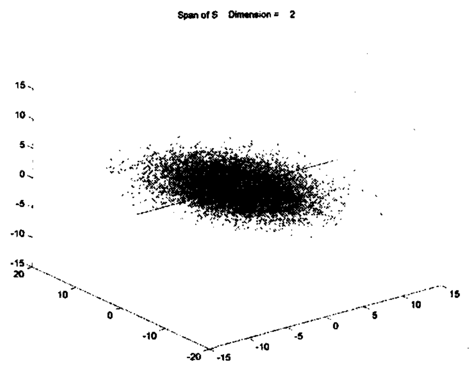
b) 정사각 행렬이 아닌 행렬의 행공간과 열공간에 대하여도 설명하라. 행렬 $J=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$의 행과 열이 생성하는 부분공간을 **spangui2** and **spangui3**을 사용하여 구하라. J의 열공간과 J의 행공간을 비교하라. 먼저 spangui2를 실행하여 보자.

```
» spangui2
How many 2-vectors do you want to enter(1to5)? 3
Enter a 2-vector [x y]:  [3 -2]
Enter a 2-vector [x y]:  [2 4]
Enter a 2-vector [x y]:  [0 1]
How many linear combinations do you want to see
(n>=500)?  1000
```



위 그림은 평면 전체 R^2로 생성된 결과를 보여준다. 이번에는 행벡터들의 생성집합을 spangui3을 이용해서 그려보자.

```
spangui3
How many 3-vectors do you want to enter(1 to 5)? 2
Enter a 3-vector [x y z]:  [3 2 0]
Enter a 3-vector [x y z]:  [-2 4 1]
How many linear combinations do you want to see
n>=500)?  10000(수치를 높여 평면임을 확인)
```



Project 16: 위 과정을 거친 학생은 다음 질문에 답을 할 수 있을 것이다." R^2와 R^3의 부분공간은 무슨 모양인가? 가능한 부분공간의 개수가 유한한가? 일반적으로 R^n의 부분공간은 무슨 모양인가?"

정리 : 동치(isomorphism)인 부분공간을 하나로 본다면, R^n의 부분공간은 Φ, R^1, R^2, $\cdots$, R^n 뿐이며 따라서 부분공간의 개수는 n+1개 이다.

증명 : 임의의 음이 아닌 정수 $m, n\,(m \le n)$에 대하여 , R^m 은 R^n의 부분공간임을 보이자. 다음과 같이 $\mathbf{e}_i$를 다음과 같이

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\cdots,0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\cdots,0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0,0,0,\cdots,1) \end{aligned}$$

n차원 공간 R^n의 n개의 벡터라고 놓자. 간단히 n=3인 경우로 보이자. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 의 선형결합은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = (a_1, a_2, a_3, 0, \cdots, 0)$$

따라서 집합

$$W = \{(a_1, a_2, a_3, 0, \cdots, 0) \in R^n : a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

는 벡터 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$의 1차 결합들로 이루어진 n차원 공간 R^n의 부분공간이다. 실제로 부분공간 W는 3차원 공간 R^3과 같게 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$(a_1, a_2, a_3, 0, \cdots, 0) \equiv (a_1, a_2, a_3), \quad a_i \in R$$

일반적으로 $m(\le n)$차원 공간 R^m은 n차원 공간 R^n의 부분공간이다.

□

앞에서와 같이 본 절에서는 선형대수학의 다양한 개념을 기존에 개발된 프로그램을 이용하여 다양한 수를 입력하며 나타나는 시각적 화면을 보며 자연스럽게 습득하게 하는 방법을 소개하였다.

Ⅲ. 결 론

우리는 지금까지 선형대수학 수업에서 가장 추상적인 벡터공간 및 부분공간의 개념을 Matlab이라는 도구를 이용하여 낮은 차원에서 기하학적 이해를 바탕으로 눈으로 직접 확인하며 구체적으로 학습하는 과정을 보았다. 즉, 벡터공간 R^n의 부분공간이 ϕ, R^1, R^2, $\cdots$, R^n으로 유일하게 표현되는 결론에 이르기까지 필요한 추상적인 개념인 영공간(해공간), 열공간, 행공간 더 나아가 Affine 공간까지의 이해를 직접 다양한 수를 대입하며 계산하고 그려보며, 그림을 통해 시각적으로 이해할 수 있었다. 또한 부분공간의 가장 중요한 요소인 스칼라 배와 벡터 합에 대한 닫힘성(closedness)의 의미를 직관적으로 이해하고 그 과정에서 수학이론의 주요 성질을 스스로 유도하는 훈련을 할 수 있었다.

즉, 본 연구는 컴퓨터와 소프트웨어의 발달과 함께 기존의 수업형태와 이해 방법을 시각적으로 발전시키며 스스로 이해도를 높여가게 할 수 있는 자기 주도적 학습 모델을 제시하였다. 더구나 이 과정의 시행착오는 디지털 자료로 남게 되므로 학생들이 이 과정에서 생기는 의문과 깨우치는 부분을 강좌에 연계된 인터넷 BBS의 Q&A를 통하여 공개하면 서로 이해한 부분과 이해가 안 되는 부분을 공유하면서 아주 빠르게 그리고 경쟁적으로 기대 이상의 이해 수준에 도달하는 것을 볼 수 있다. 이는 곧 학생이 주어진 시간과 공간을 최대한 활용하여 강좌가 요구하는 개념의 이해를 얻어가는 '자기주도 학습(Self Directed Learning)'의 모델이 되는 것이다.

참 고 문 헌

Ham, Y.-M. & Lee, S.-G. (2005). New Learning Environment of Linear Algebra in Korea, *J. KSME Ser. E* **9(1)**, pp.57-66

Kwak, J. H. & Hong, S. (2004). Linear Algebra 2nd, *Birkhauser*(Boston)

Leon, S. & Herman, E. & Faulkenberry, R. (1996). ATLAST Computer Exercise for Linear Algebra, *Prentice-Hall*(NewYork)

Strang, G. (1988). Linear Algebra and its Applications 3rd, *Harcourt Brace Jovanovich College Publishers*(Florida).

이상구 (2005). *현대선형대수학*, 경문사(서울)

Linear Algebra Class Model using Technology(Matlab)

- LINEAR SUBSPACES OF R^n -

Kyung Hoon Jung
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, 440-746, Korea
E-mail: khjung@skku.edu

Duk-Sun Kim
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, 440-746, Korea
E-mail: mass@skku.edu

Sang-Gu Lee[6)]
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, 440-746, Korea
E-mail: sglee@skku.edu

In our new learning environment, we were asked to change our teaching method in our Linear Algebra class. In mathematics class, we could use several math-softwares such as MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE, Drive etc.. MATLAB was quite well fit with our Linear Algebra class. In this paper we introduce an efficient way of delivery on important concepts in linear algebra by using well-known MATLAB/ATLAST[7)] M-files which we downloded from http://www.umassd.edu/specialprograms/atlast/.[8)]

---

6) Corresponding author

7) ATLAST(Augmenting the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools) 프로젝트는 International Linear Algebra Society(ILAS)의 교육위원회 (Education Committee)에서 처음으로 시행되었으며 같은 시기에 Linear Algebra Curriculum Study Group(LACSG)이 미국 과학재단 (National Science Foundation)의 지원으로 선형대수학을 직관적인 관점에서 가르치고, 개발된 소프트웨어를 사용하여 교수학습 방법을 개선하기 위하여 생겨났다.

* ZDM classification : D45, M15, U51
* 2000 Mathematics Subject Classification : 15A03, 97C90, 97U50, 97U70
* Key Words : Vector Space, Subspace, Basis, Matlab, ATLAST