

# 균일 두께의 자성유체 피막이 있는 평면 벽을 향하는 2차원 정체 유동

고형증,<sup>1</sup> 김경훈,<sup>2</sup> 김세웅<sup>2</sup>

## TWO-DIMENSIONAL STAGNATION FLOW TOWARD A PLANE WALL COATED WITH MAGNETIC FLUID OF UNIFORM THICKNESS

Hyung-Jong Ko,<sup>1</sup> Kyoung-Hoon Kim<sup>2</sup> and Se-Woong Kim<sup>2</sup>

*Two-dimensional stagnation flow toward a plane wall coated with magnetic fluid of uniform thickness is investigated. The flow field is represented as a similarity solution of the Navier-Stokes equation for this incompressible laminar flow. The resulting third order ordinary differential equation is solved numerically by using the shooting method and by determining two shooting parameters so as to satisfy the boundary and interface conditions. Features of the flow including streamline patterns are investigated for the varying values of density ratio, viscosity ratio, and Reynolds number. An adverse flow with double eddy pair in magnetic fluid region is found to emerge as the Reynolds number becomes higher than a threshold value. The results for the interface velocity, interface and wall shear stress, and boundary layer and displacement thickness are also presented.*

**Key Words :** 2차원(Two-Dimensional), 비압축성(Incompressible), 층류(Laminar), 자성유체 피막(Magnetic Fluid Coating), 균일 두께(Uniform Thickness), 상사해(Similarity Solution), 조준법(Shooting Method)

### 1. 서 론

자성유체는 지름이 수 nm에서 수십 nm에 이르는 같은 크기의 강자성체 미립자를 계면활성제(surfactant)로 조밀하게 피복하고 기름이나 물 등의 용매에 고밀도로 분산시킨 입자 콜로이드로서, 보통 유체와 마찬가지로 연속체(continuum)로 다룰 수 있으며, 진공 밀봉(sealing), 자기 베어링, 액추에이터, 연마 가공, 센서, 프린터, 투약경로 제어 등에 이용된다[1-3]. 특히 유동장 내의 고체 벽면에 자성유체 피막을 입히고 외부 자기장으로 유동을 조절하면 열전달을 촉진하거나 유체의 항력을 감소시키는 데에도 활용되기 때문에 자성유체와 관련된 많은 유체역학적 연구가 이루어지고 있다[4]. Krakov and Kamiyama[5]는 자성유체 피막이 있는 원기둥을 지나는 2차원 정상 유동에 대한 연구를 통하여 Reynolds 수 및 점성계수 비에 따라 항력을 40%대까지 줄일 수 있음을 밝혔다. 이때 항

력감소는 주로 자성유체 피막으로 인하여 표면 근방의 유동이 바뀌면서 후류(wake)의 면적이 줄어든 데 따른 것이다. 그들은 원기둥을 지나는 비정상 유동에 대한 다른 연구를 통하여 자성유체 피막이 외부 유동장의 구조를 안정하게 유지하는 데 기여한다는 사실을 알아냈다[6].

이 논문에서는 균일한 두께의 자성유체 피막이 있는 평면 벽으로 비압축성 유체가 다가오면서 생기는 2차원 층류 정체 유동을 해석하고자 한다. 이 유동은 Krakov and Kamiyama[5]가 조사한 유동에서 유동을 마주보는 쪽에 형성되는 정체점(stagnation point) 근방의 유동을 나타내게 되고, 자성유체 피막 두께가 0인 극한의 경우에는 Navier-Stokes 방정식의 상사해(similarity solution)로 잘 알려진 Hiemenz 유동[7,8]으로 귀착된다. 자성유체는 유체와 섞이지 않으며, 충분히 강한 외부 자기장에 의하여 일정한 두께를 유지하는 것으로 가정한다.

본 논문의 2장에서는 유체와 자성유체의 두 층으로 이루어지는 유동장을 유동함수(stream function)로 나타낸 후, 무한원(infinity)과 벽면에서의 경계조건, 그리고 두 유체의 계면에서의 연속조건을 만족하는 상사해를 구성한다. 상사해에 대한 지배방정식으로부터 얻어지는 연립 경계값 문제는 조준법

접수일: 2007년 8월 24일, 심사완료일: 2007년 9월 14일.

1 정회원, 금오공과대학교 기계공학부

2 금오공과대학교 기계공학부

\* Corresponding author, E-mail: kohj@kumoh.ac.kr

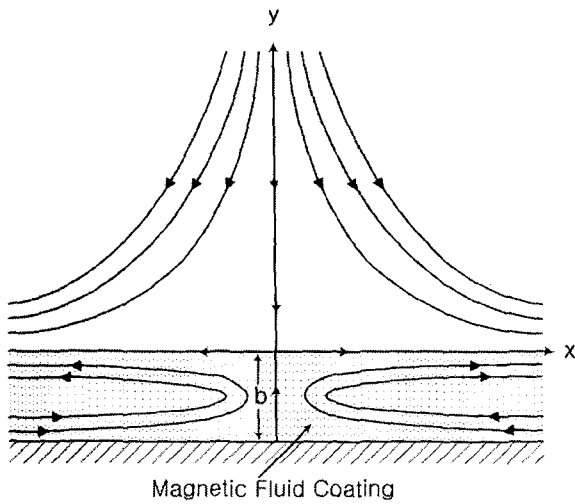


Fig. 1 Schematic diagram of the flow problem.

(shooting method)을 사용하여 수치적으로 구한다. 3장에서는 유체와 자성유체의 밀도 비 및 점성계수 비, Reynolds 수의 값을 변화시키면서 수치계산을 수행하고 유선 분포, 계면에서의 속도, 계면 및 벽면에서의 전단응력, 경계층 두께(boundary layer thickness) 및 배재 두께(displacement thickness) 등의 유동 특성이 어떻게 변화하는지를 조사한다.

## 2. 정식화 및 해석

Fig. 1에 개략적으로 나타낸 것과 같이 균일한 두께  $b$ 로 자성유체가 피막된 평면 벽을 향하여 유동함수  $Kxy$ 로 표현되는, 전단율(shear rate)  $K$ 인 퍼텐셜 유동(potential flow)이 다가오면서 생겨나는 2차원의 정상 정체 유동(steady stagnation flow)을 해석한다. 좌표계로는 직각좌표계  $(x, y)$ 를 사용하며, 평면 벽은  $y = -b$ 로 나타낼 수 있다. 유체와 자성유체는 서로 섞이지 않는 비압축성 유체이며, 그 계면은 유동 압력으로 인한 교란을 극복하기에 충분한 자기장이 외부로부터 자성유체에 가해지기 때문에 변형하지 않고 일정한 높이( $b$ )를 유지한다[5,6].

무차원 좌표계  $(X, Y) = (x, y)/b$ 에서  $Kb^2$ 으로 무차원화한 유동함수에 대한 지배방정식은, 편의상 자성유체 또는  $-1 < Y < 0$ 인 영역과 유체 또는  $Y > 0$ 인 영역을 각각 첨자 1과 2로 구분하여 나타내기로 할 때, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi_j + Re_j J(\Psi_j, \nabla^2 \Psi_j) = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

여기서  $\nabla^2$ 은 2차원 Laplacian  $\partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2$  이고,  $J$ 는

Jacobian  $J(g, h) = \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial h}{\partial Y} - \frac{\partial g}{\partial Y} \frac{\partial h}{\partial X}$  를 나타낸다. 또,  $\Psi_j$ 와 Reynolds 수  $Re_j$ 는 식

$$U_j = \frac{\partial \Psi_j}{\partial Y}, \quad V_j = -\frac{\partial \Psi_j}{\partial X}, \quad Re_j = \frac{b^2 K}{\nu_j} \quad (j = 1, 2) \quad (2)$$

로 정의되며,  $\nu_1$ 과  $\nu_2$ 는 자성유체와 유체의 동점성계수를 나타낸다. 식 (1)은 Navier-Stokes 방정식에서 교차 미분을 통하여 압력 항을 소거함으로써 얻어진 것이다. 참고로 계면의 높이가 변하지 않는 경우에 자기장이 자성유체에 미치는 효과는 단순히 자기압력(magnetic pressure)이 압력에 더해지는 것으로 나타난다[5].

벽면에서의 점착조건, 무한원에서의 점근조건, 그리고 계면 높이가 일정한 조건 및 계면에서 속도와 전단응력의 연속조건을 차례대로 써 주면 다음과 같다.

$$U_1 = V_1 = 0 \quad \text{at} \quad Y = -1 \quad (3a)$$

$$\Psi_2 \rightarrow XY \quad \text{as} \quad Y \rightarrow \infty \quad (3b)$$

$$V_1 = V_2 = 0 \quad \text{at} \quad Y = 0 \quad (3c)$$

$$U_1 = U_2 \quad \text{at} \quad Y = 0 \quad (3d)$$

$$\mu_1 \partial U_1 / \partial Y = \mu_2 \partial U_2 / \partial Y \quad \text{at} \quad Y = 0 \quad (3e)$$

여기서  $\mu_1, \mu_2$ 는 각각 자성유체와 유체의 점성계수이다.

식 (1)-(3)을 만족하는 상사해는 유동함수를

$$\Psi_j = X F_j(Y) \quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

로 가정하여 구할 수 있다. 이 표현을 식 (1)에 대입하여 정리한 후 한 번 적분하면

$$F_j'''' + Re_j (F_j F_j'' - F_j'^2) = C_j \quad (j = 1, 2) \quad (5)$$

을 얻는다. 여기서 기호 '은  $Y$ 에 대한 미분을 뜻하며,  $C_j$ 는 적분상수이다. 식 (3)의 경계조건들과 연속조건들은

$$F_1(-1) = F_1'(-1) = 0, \quad F_1(0) = 0 \quad (6a)$$

$$F_2(0) = 0, \quad F_2'(0) = F_1'(0), \quad \mu_2 F_2''(0) = \mu_1 F_1''(0), \quad F_2'(\infty) = 1 \quad (6b)$$

과 같이  $F_1, F_2$ 에 대한 조건으로 변환된다.

식 (6)에 나와 있는 벽면과 무한원에서의 경계조건을 식

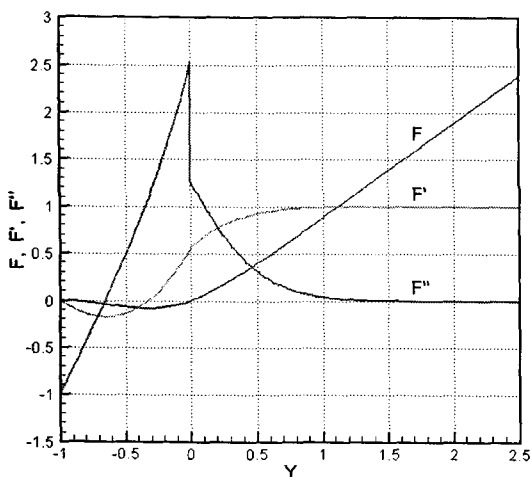


Fig. 2 Dependence of the numerical solution on Y for the typical case( $\rho_r=0.8, \mu_r=2, Re_1=10$ ).

(5)에 적용하면

$$C_1 = F_1'''(-1), C_2 = -Re_2 \tag{7}$$

을 얻는다[8]. 그러나 식 (5)의 상미분방정식이 3계이기 때문에  $C_1$ 은 여전히 미지상수로 남는다. 이제 문제를 정리하면, 미지상수 하나를 포함하는 두 개의 3계 상미분방정식을 식 (6)의 일곱 가지 조건을 만족하도록 풀어야 한다. 이것은 수학적으로 타당한(well-posed) 문제이지만, 비선형이기 때문에 수치계산 방법에 의하여 해를 구하도록 한다.

이 논문에서는 식 (5)-(7)로 정의되는 두 개의 연립 경계값 문제를 풀기 위하여 4차 Runge-Kutta 방법과 조준법을 사용한다[8]. 이때 물리적 무한원  $Y = \infty$ 은 수치적 무한원  $Y = Y_\infty$ 으로 대체하여 해석을 진행하게 되며, 구간  $[-1, 0]$ 과  $[0, Y_\infty]$ 은 각각  $N_1, N_2$  개의 균등 간격으로 분할하여 계산한다. 구체적인 수치해석 절차를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 미지상수  $C_1 = F_1'''(-1)$ 과  $F_1''(-1)$ 을 가정한다.
- (2)  $F_1(-1) = F_1'(-1) = 0$ 과 (1)에서 가정한 2차 미분값  $F_1''(-1)$ 을 사용하여 3계 미분방정식 (5)의 해  $F_1(Y)$  ( $-1 \leq Y \leq 0$ )를 구한다.
- (3)  $F_2(0) = 0$ 과 (2)에서 구한 해와 연속조건으로부터 얻어지는  $F_2'(0), F_2''(0)$  값을 사용하여 (5)의 또 다른 3계 미분방정식의 해  $F_2(Y)$  ( $0 \leq Y \leq Y_\infty$ )를 구한다.
- (4) 경계조건  $F_1(0) = 0$ 과  $F_2'(\infty) \approx F_2'(Y_\infty) = 1$ 이 만족되면 계산을 마치고, 만족되지 않으면 이 조건들이 동시에 만족되도록 조준변수(shooting parameter)  $F_1'''(-1)$ 과

$F_1'''(-1)$ 의 값을 조정 한 후 단계 (2)로 돌아간다.

Y가 무한히 커짐에 따라  $F_2''(Y) \sim e^{-Re_2 Y^2/2}$ 의 접근 거동(asymptotic behavior)을 보이기 때문에 수치적 무한원은  $Y_\infty = 5/\sqrt{Re_2}$ 으로 잡으면 충분하다[8]. 본 연구에서는 Mathcad[9]를 사용하여 초기값 문제의 풀이 등 실제 수치계산을 수행하였다. 다각적인 예비 계산을 수행한 결과, 4차 Runge-Kutta 방법을 사용할 때 구간  $[-1, 0]$ 은  $N_1=50$ 개, 구간  $[0, Y_\infty]$ 는  $N_2=250$ 개로 균등 분할하면 충분한 정확도가 얻어짐을 확인할 수 있었다.

### 3. 결과 및 논의

균일 두께의 자성유체 피막이 있는 평면 벽을 향하는 2차원 정체 유동을 규정하는 무차원 파라미터로는 자성유체와 유체의 밀도 비  $\rho_r = \rho_2/\rho_1$ , 점성계수 비  $\mu_r = \mu_2/\mu_1$ , 동점성계수 비  $\nu_r = \nu_2/\nu_1$  및 Reynolds 수  $Re_1, Re_2$ 가 있다. 이 중에서 독립적인 파라미터는 세 개이므로, 본 연구에서는 물성치와 관련하여  $\rho_r$ 과  $\mu_r$ 을, 유동특성과 관련하여  $Re_1$ 을 유동 파라미터로 선택하였다.  $\nu_r$ 과  $Re_2$ 는  $\mu_r/\rho_r$ 와  $Re_1\rho_r/\mu_r$ 으로 구해진다. 본 연구에서  $\rho_r$ 은 0.8 및 1.2,  $\mu_r$ 은 0.01, 0.1, 1, 10, 100 등 다섯 가지에 대하여,  $Re_1$ 을 0.01에서 약 1000 까지 바꾸어 가면서 수치계산을 수행하였다. 여기서  $\rho_r=0.8$ 은 자성유체 피막이 있는 원기둥을 지나는 유동에 대한 Krakov and Kamiyama[5]의 실험에 사용된 실리콘 기름(PMS-200,  $\rho = 973 \text{ kg/m}^3, \nu = 1.95 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ )과 물을 용매로 사용한 자성유체( $\rho = 1220 \text{ kg/m}^3, \nu = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )의 조합에 해당하는 값이며, 이 경우  $\mu_r$ 은 약 40이다. 액체의 밀도는 점성계수와 달리 물질에 따라 큰 차이를 보이지 않기 때문에 본 연구에서는  $\rho_r$ 의 값으로 이 값(0.8)과, 유체 밀도가 더 큰 경우를 대표하는 1.2의 두 값에 대하여 조사하는 것으로 하였다.

Fig. 2는  $\rho_r=0.8, \mu_r=2, Re_1=10$ 인 경우에 대한 수치해의 거동을 보여준다. 여기서 그리고 이후에서  $F$ 는  $F_1(Y)$ 와  $F_2(Y)$ 를 합병하여 정의구역을 전체 영역으로 확장한 함수를 나타내고,  $F'$ 과  $F''$ 도 같은 의미이다. 이 경우( $Re_2=4$ )에  $Y_\infty=2.5$ 이며, 조준변수  $\alpha \equiv F''(-1)$  및  $\beta \equiv F'''(-1)$ 의 수렴된 값은 각각 -0.9904 및 2.741이다. 수렴된 해를 조사해보면 벽면 및 무한원에서의 경계조건과 계면에서의 연속조건이 만족되고 있으며, 수치계산의 정확도 측면에서 볼 때  $Y_\infty = 5/\sqrt{Re_2}$ 로 택하는 것이 타당함을 알 수 있다. 참고로 Fig.

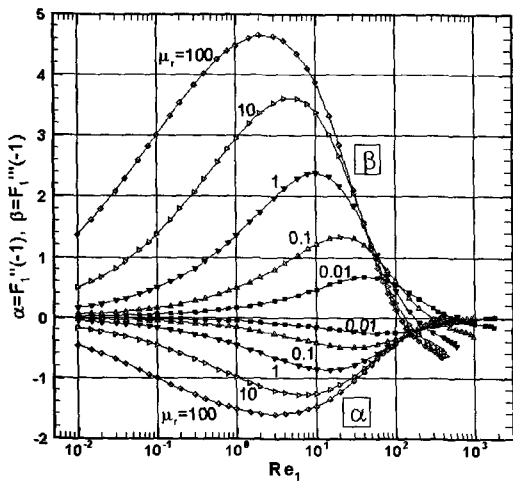


Fig. 3 Variations of  $\alpha$  and  $\beta$  with respect to  $\mu_r$  and  $Re_1$  when  $\rho_r=0.8$ .

2의 경우 전단응력의 연속조건에 의하여  $F_2''(0) = F_1''(0)/2$ 이다.

Fig. 3은  $\rho_r=0.8$ 인 경우에 조준변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 파라미터  $\mu_r$  및  $Re_1$ 에 따라 어떻게 변화하는지를 보여주는 그림이다. 점성계수 비  $\mu_r$ 을 고정시킨 상태에서  $Re_1$ 을 증가시키면  $\alpha$ 는 음의 값에서 출발하여 점차로 감소하다가 바닥을 지나 상승 반전한다.  $\alpha = F_1''(-1)$ 은 벽면에서의 전단응력에 정비례하기 때문에  $\alpha < 0$ 이라는 것은 벽면 근방에서의 유동이 원점을 향하여 다가온다는 것을 의미한다.  $\alpha$ 가 계속 증가하여 양의 값으로 바뀌게 되면 벽면 근방에서의 유동 방향이 바뀌어 원점에서 멀어지는 유동으로 바뀌는 역류(adverse flow), 즉, 2차 유동(secondary flow)이 발생하게 된다. 유동장의 기하학적 형태를 고려해 보면 이때 자성유체 내의 유동은 2중 와류 쌍(double eddy pair) 형태가 됨을 알 수 있다(Fig. 4 참조). 고정된 물성치 파라미터( $\rho_r$ 과  $\mu_r$ )에 대해서 역류가 발생하는  $Re_1$ 의 임계값(threshold value)을  $Re_1^{(a)}$ 이라고 하면 이 값은  $\alpha=0$ 인 조건으로 찾을 수 있다.

$\beta$ 의 변화를 나타낸 그래프는 정성적으로  $\alpha$ 의 그래프를

Table 1 Dependences of  $Re_1^{(a)}$  and  $Re_2^{(a)}$  on  $\rho_r$  and  $\mu_r$ .

$\mu_r$	$\rho_r=0.8$		$\rho_r=1.2$	
	$Re_1^{(a)}$	$Re_2^{(a)}$	$Re_1^{(a)}$	$Re_2^{(a)}$
0.01	1660	132800	1475	177000
0.1	882.9	7063	800.3	9604
1	544.3	435.4	510.2	612.2
10	409.5	32.76	396.8	47.62
100	361.1	2.889	356.9	4.283

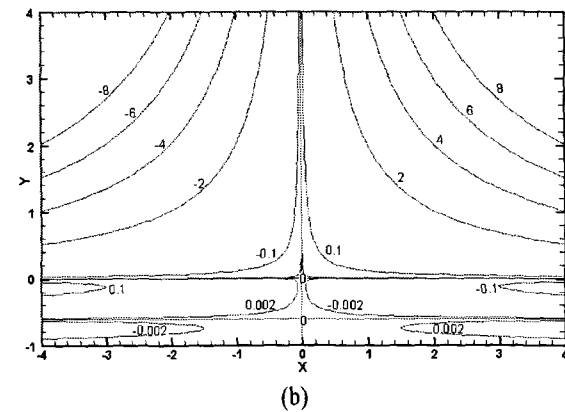
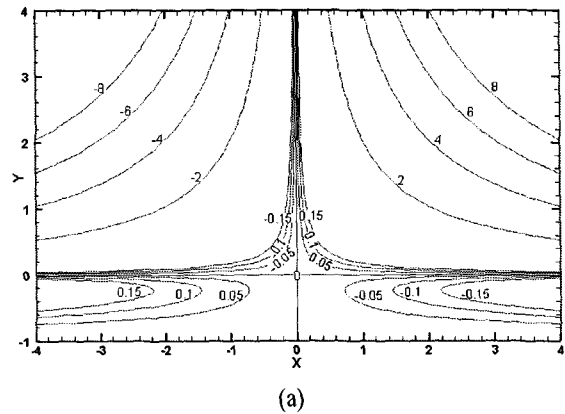


Fig. 4 Streamline patterns for typical cases of (a) single eddy pair, and (b) double eddy pair structure in magnetic fluid layer.  $\rho_r=0.8$ ,  $\mu_r=10$ , and  $Re_1=100$  for (a) and 500 for (b). The numbers denote the values of  $\Psi_1$  or  $\Psi_2$ .

뒤집어 놓은 것과 같으나 절대값이  $\alpha$ 에 비하여 크고, 부호의 변화가 생겨나는 Reynolds 수 값은  $\alpha$ 보다 작다.  $\beta$ 의 부호 변화에 따른 유동 형태의 정성적 변화는 나타나지 않는다.

이상과 같은, 벽면에서  $F$ 의 2차 및 3차 도함수 값과 관련된 전반적 특징은 유체와 자성유체의 밀도 비  $\rho_r$  및 점성계수 비  $\mu_r$ 에 무관하게 나타나지만,  $\mu_r$ 이 클수록  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 절대적인 크기가 커지고, 벽면 근방에서의 유동방향 변화가 시작되는 임계 Reynolds 수  $Re_1^{(a)}$ 도 작아진다. 유체의 밀도가 자성유체의 밀도보다 더 큰 경우에 해당하는  $\rho_r=1.2$ 일 때의  $\mu_r$  및  $Re_1$ 에 따른  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 변화는  $\rho_r=0.8$ 인 경우와 정성적으로 일치하고, 정량적으로도 차이가 작게 나타나기 때문에 이 결과는 그래프로 제시하지 않는다. 다만,  $\rho_r$ 이 클수록  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 절대값이 상대적으로 크고,  $Re_1^{(a)}$ 은 더 작다.

Table 1은  $\rho_r$ 과  $\mu_r$ 에 따른  $Re_1^{(a)}$ 의 변화를 표로 보여주는 것이다. 표에는  $Re_1^{(a)}$ 에 대응하는  $Re_2$ 의 값, 즉 역류가 발생하기 시작할 때의  $Re_2$  값  $Re_2^{(a)}$ 를 같이 나타내었다.  $Re_2^{(a)}$

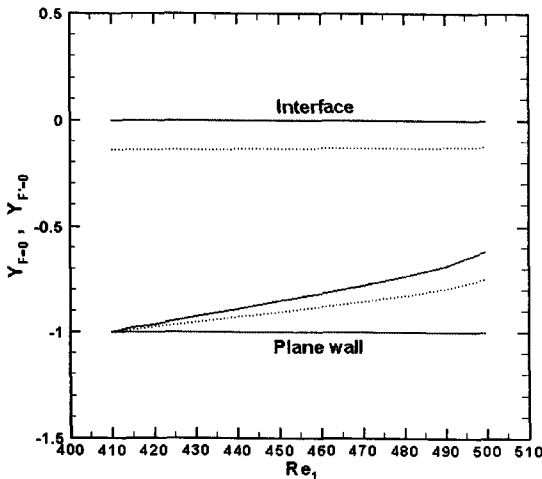


Fig. 5 Locations of  $Y$  at which  $F$  or  $F'$  vanishes for  $\rho_r = 0.8$ ,  $\mu_r = 10$  as functions of  $Re_1$ . Solid lines correspond to  $F=0$  and dotted lines correspond to  $F'=0$ .

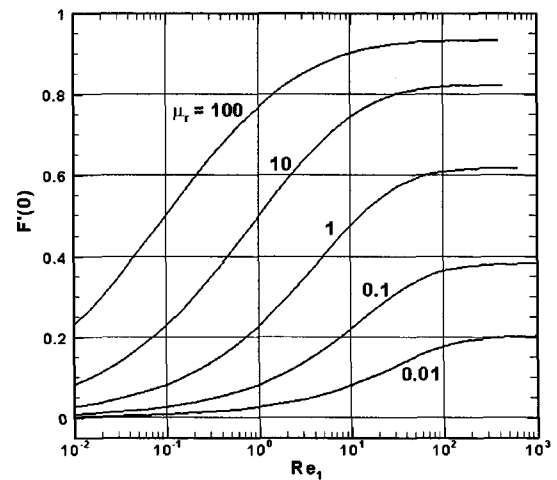


Fig. 6 Variation of  $F'(0) = U_i/U_\infty$  with respect to  $\mu_r$  and  $Re_1$  for  $\rho_r = 0.8$ .

는  $Re_1^{(a)}$ 와 반대로  $\rho_r = 1.2$ 일 때가 0.8일 때보다 더 크다.

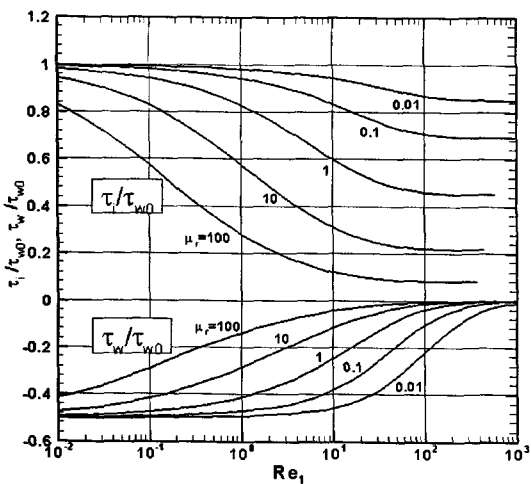
전체 유동장은 이미 언급한 것처럼 자성유체 층에서의 유동 형태에 따라 두 종류가 존재하는데, Fig. 4는 이들에 대한 대표적인 경우를 보여주고 있다. 병기한 숫자들은  $\Psi_1$  또는  $\Psi_2$ 의 값을 나타내며, 여기서  $\rho_r = 0.8$ ,  $\mu_r = 10$ 이다. 이 파라미터 값에 대응하는  $Re_1^{(a)}$ 는 409.5이며, (a)는  $Re_1$ 이 이보다 작은 값 100을 가질 때이고 (b)는 이보다 큰 500일 때의 유선 모양을 나타낸다.  $Y > 0$ 인 유체 층에서의 유동 특성은 (a)와 (b)에서 큰 변화가 없다. 벽면에 인접한 자성 유체 층에서는 속도가 유체 층에서의 속도에 비하여 느리기 때문에 유동함수 값의 변화가 작다. (a)에서는  $\alpha < 0$ 이며 자성유체 층 전체가 좌우대칭인 하나의 와류 쌍(single eddy pair)을 형성한다. 반면에 (b)에서는  $\alpha > 0$ 이기 때문에 벽면 근처에서의 유동 방향이 (a)와 정반대인, 원점에서 멀어져가는 방향으로 바뀌었다. 이때 자성유체 층에서는 좌우대칭인 2개의 와류 쌍이 형성되며 두 층의 두께는 대략 0.4와 0.6임을 알 수 있다.

Fig. 5는  $\rho_r = 0.8$ ,  $\mu_r = 10$ 인 경우에  $F=0$ 이 되는  $Y$ 의 위치와  $F'=0$ 이 되는 위치가 Reynolds 수에 따라 어떻게 변하는지를 보여준다.  $F=0$ 이면 유동함수가 0이 되기 때문에 벽면 ( $Y=-1$ )과 계면( $Y=0$ )을 제외할 때  $Y_{F=0}$ 는 2중 와류 쌍에서 두 층의 경계면을 나타내게 되므로 이를 통하여 그 두께 변화를 알 수 있다.  $Re_1 = Re_1^{(a)} = 409.5$ 에서 시작되는 2중 와류 층의 아래층 두께는  $Re_1$ 이 증가함에 따라서 점점 두꺼워진다.  $F$ 의 정의와 마찬가지로  $U_1$ 과  $U_2$ 를 합병하여 정의 구역을 전 영역으로 확대한 속도를  $U$ 로 나타낼 때,  $F'=0$ 인 높이는  $U=0$ 이 되는 높이, 즉 유동이 왼쪽에서 오른쪽으로 또

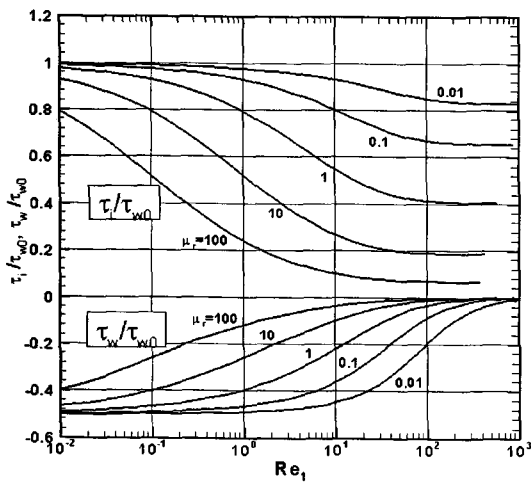
는 오른쪽에서 왼쪽으로 바뀌는 높이에 해당한다. 2중 와류 쌍 구조를 가지는 경우,  $Y_{F'=0}$ 의 두 값 중에서 계면에 가까운 쪽은  $Re_1$ 의 변화와 거의 무관하며, 전체적으로 보면  $Y_{F'=0}$ 와  $Y_{F=0}$ (벽면 제외)가 가까운 거리를 유지하고 있다. 이러한 특징은 계면에서의 속도  $U_i$ 가  $Re_1$ 에 따라 변하지 않는 파라미터 구간에 들어선 경우에 나타난다(Fig. 6 참조). 각 층에서 유량이 보존되기 때문에 계면에서의 속도가 느려지면  $Y_{F'=0}$ 와 계면 사이의 간격이 넓어진다.

계면에서의 속도 변화를 알아보기 위하여  $F'(0)$ 의 변화를 나타낸 것이 Fig. 6이다.  $F'(\infty) = 1$ 이기 때문에  $F'(0)$ 은 계면에서의 속도와 무한원에서의 속도의 비  $U_i/U_\infty$ 와 같다.  $\mu_r$ 이 작은 경우는 자성유체의 점성계수가 큰 경우에 해당되어 고체 벽을 지나는 것과 비슷한 상황이므로 계면 속도가 작다.  $\mu_r \rightarrow 0$ 인 경우의 극한 유동은 자성유체가 고체 벽으로 대치된 유동, 즉 Hiemenz 유동에 해당한다.  $\mu_r$ 이 커짐에 따라서 계면 속도는 점점 증가한다. 같은 점성계수 비 값에서  $Re_1$ 에 따른 변화를 보면  $Re_1$ 이 매우 작아서 점성의 영향이 지배적으로 되는 경우의 극한 0과, 반대로  $Re_1$ 이 충분히 커질 때 관성의 영향을 주로 받는 경우의 극한 사이를 잇는 S자 모양의 거동을 보인다. Reynolds 수가 클 때의 극한은 점성계수 비  $\mu_r$ 에 따라 달라지고,  $\mu_r \rightarrow \infty$ 일 때의 극한값은 1이다.  $\mu_r$ 이 극단적으로 큰 경우의 유동은 자성유체가 점성이 없는 경우에 해당하기 때문에 고체 벽에서 미끄러짐(slip)을 허용하는 퍼텐셜 유동을 나타내게 된다.

다음으로는 계면과 평면 벽에서의 전단응력에 대하여 조사하여 보자. 자성유체 피막이 없는 경우, 즉  $b=0$ 인 경우의 유동은 Hiemenz[7]가 해석한 2차원 정체유동 문제에 해당하며,



(a)  $\rho_r=0.8$



(b)  $\rho_r=1.2$

Fig. 7 Variations of the interface and wall shear stress with respect to  $\rho_r$ ,  $\mu_r$  and  $Re_1$ . Here the values are normalized by the wall shear stress of Hiemenz flow.

이 경우에 벽면 전단응력은

$$\tau_{w0} = C_0 \mu_2 x \sqrt{K^3/\nu_2} \quad (C_0 \approx 1.23259) \quad (8)$$

으로 알려져 있다[7,8]. 자성유체 피막이 있는 평면 벽을 향하는 정체 유동에서 계면의 전단응력  $\tau_i$ 와 벽면 전단응력  $\tau_w$ 는 각각

$$\tau_i = \mu_2 K x F_2''(0)/b, \quad (9)$$

$$\tau_w = \mu_1 K x F_1''(-1)/b \quad (10)$$

로 나타낼 수 있기 때문에, 이들을  $\tau_{w0}$ 로 정규화 한 값은  $x$

와 무관하게 되며 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\tau_i}{\tau_{w0}} = \frac{F_2''(0)}{C_0 \sqrt{Re_2}}, \quad (11)$$

$$\frac{\tau_w}{\tau_{w0}} = \frac{F_1''(-1)}{C_0 \mu_r \sqrt{Re_2}} \quad (12)$$

유동에 따라 유체가 받는 힘은 계면에서의 전단응력에 비례하기 때문에  $\tau_i/\tau_{w0}$ 는 자성유체 피막의 유무에 따른 항력 변화율을 나타낼 수 있다. 따라서 자성유체 피막에 의한 항력감소(drag reduction) 효과는 이 값이 작을수록 크게 나타나며, 이 비를 항력감소율로 정의할 수 있다. Fig. 7은 밀도 비와 점성계수 비와 Reynolds 수에 따른  $\tau_i/\tau_{w0}$ 와  $\tau_w/\tau_{w0}$ 의 변화를 보여준다. 이들의 변화 특성은 점성효과가 얼마나 지배적이냐에 따라 특성이 달라진다는 면에서 계면 속도의 변화 특성(Fig. 6)과 거의 유사하다. 즉,  $\mu_r$ 이 매우 작거나  $Re_1$ 이 매우 작은 경우에는 자성유체가 고체 벽면처럼 작용하게 되므로 항력감소율  $\tau_i/\tau_{w0}$ 는 1에,  $\tau_w/\tau_{w0}$ 는  $-1/2$ 에 가까워진다. 보통 크기의  $\mu_r$ 에 대해서는 1 또는  $-1/2$ 과  $\mu_r$ 에 의존하는,  $Re_1$ 이 큰 경우의 극한값을 갖는 역 S자 또는 S자 곡선을 따라 변화한다.

한편,  $\mu_r$ 이 클수록,  $Re_1$ 이 클수록  $\tau_i/\tau_{w0}$ 이 작아져서 항력감소 효과가 더 좋아짐을 알 수 있다. 이러한 경향은 Krakov and Kamiyama[5]가 조사한 바 있는, 자성유체 피막이 있는 원기둥을 지나는 유동에서도 나타나는 것으로 보고되었다. 그러나 평면 벽을 향하는 정체 유동의 경우에는 오직 점성항력(viscous drag)만 존재하기 때문에, 원기둥을 지나는 유동에서 보였던 자성유체 피막에 의하여 항력이 오히려 증가하는 현상은 나타나지 않는다. 이 차이는 Reynolds 수가 작은 경우를 제외하면 원기둥을 지나는 유동에서 형상항력(form drag)이 점성항력보다 지배적이기 때문이며, 항력이 오히려 커지는 현상은 자성유체 피막이 투영면적을 증대시킨 효과가 후류 면적을 감소시킨 효과보다 더 큰 경우에 나타난다.

$\tau_w/\tau_{w0}$ 는  $Re_1 < Re_1^{(a)}$ 일 때 음의 값을 갖는다. 자성유체 피막이 매우 얇은 경우에는 이 경우에 해당하게 되는데, 벽면에서의 전단응력의 부호가 주류의 방향과 반대가 되기 때문에 자성유체가 음의 점성을 갖는다고 말하기도 한다.  $Re_1$ 이  $Re_1^{(a)}$ 보다 커지면 벽면 근처의 유동에 역류가 발생하게 되고  $\tau_w/\tau_{w0}$ 가 양으로 바뀐다. Fig. 7(a)와 7(b)를 비교해 보면 밀도 비에 따른 정성적인 변화는 없으나, 정량적으로는 같은  $\mu_r$ , 같은  $Re_1$ 에 대해서 밀도 비가 큰 쪽이  $\tau_i/\tau_{w0}$ 와  $|\tau_w/\tau_{w0}|$ 의 크기가 더 작다.

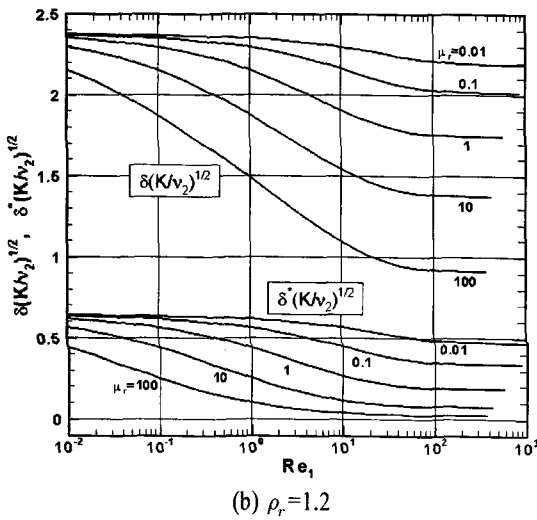
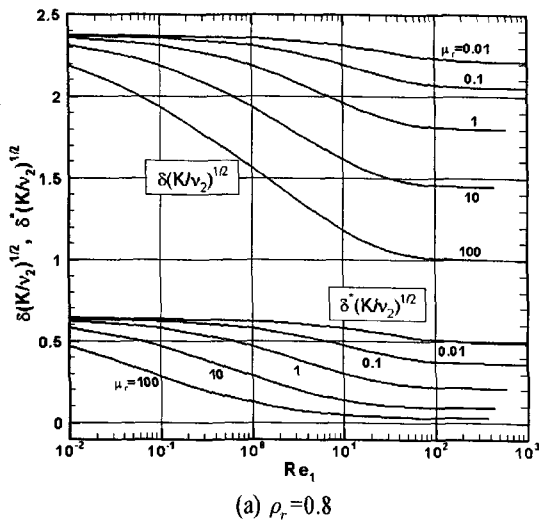


Fig. 8 Variations of the boundary layer thickness ( $\delta$ ) and the displacement thickness ( $\delta^*$ ) with respect to  $\rho_r$ ,  $\mu_r$  and  $Re_1$ .

끝으로 우리가 해석한 유동을 경계층 유동과 관련하여 살펴보기로 하자. 식 (4)에 제시된 상사해는  $X$ 의 1차함수이기 때문에 Navier-Stokes 방정식에서  $X$  방향 2차 미분이 0이 된다. 따라서 점성에 의한 운동량 확산은 벽면에 수직인 방향인  $Y$  방향으로만 일어난다. 결과적으로 우리가 구한 상사해는 Hiemenz 유동과 마찬가지로 경계층 방정식(boundary layer equation)도 만족하고 있음을 의미한다.

계면으로부터  $x$  방향 속도  $u$ 가 주류(main stream), 즉 퍼텐셜 유동의 속도의 99%가 되는 곳까지의 거리로 정의되는 경계층 두께  $\delta$ 와, 무한원에서 함수  $b[Y - F_2(Y)]$ 의 극한값으로 정의되는 배제 두께(displacement thickness)  $\delta^*$ 를 유체 층의 점성 특성길이(viscous characteristic length)  $\sqrt{\nu_2/K}$ 로 무차원화 한 값들의 변화를 Fig. 8에 나타내었다.  $b=0$ 인 경우,

즉 자성유체 피막이 없는 경우,  $\delta\sqrt{K/\nu_2}$  및  $\delta^*\sqrt{K/\nu_2}$ 의 값은 각각 2.37 및 0.6479이다. Fig. 7과 8을 비교해 보면 잘 알 수 있듯이  $\mu_r$ 와  $Re_1$ 의 변화에 따른 이들의 변화는 정성적으로  $\tau_i/\tau_{w0}$ 의 경우와 거의 같다. 즉,  $\delta\sqrt{K/\nu_2}$ 이나  $\delta^*\sqrt{K/\nu_2}$  공히  $\mu_r$  또는  $Re_1$ 이 매우 작아서 자성유체가 고체 벽면처럼 작용하는 경우의 극한값과  $Re_1$ 에 따른 변화가 없어질 때의 극한값을 이어주는 둔덕 모양의 곡선을 따라서 연속적으로 변화한다. 점성계수 비( $\mu_r$ )와 Reynolds 수( $Re_1$ )가 같을 경우에는 밀도 비가 큰 쪽( $\rho_r=1.2$ )이 작은 쪽( $\rho_r=0.8$ )에 비하여 무차원 경계층 두께와 무차원 배제 두께가 모두 작다.

#### 4. 결 론

균일 두께의 자성유체 피막이 있는 평면 벽을 향하는 비압축성 유체의 층류 정상 2차원 정체 유동을 조사하였다. 유체와 자성유체의 계면이 충분히 강한 자기장에 의하여 일정한 높이를 유지하는 경우에 대하여 Navier-Stokes 방정식을 만족하는 상사해를 구성하고, 벽면에 수직인 방향의 유동 구조를 결정하기 위한 연립 경계값 문제를 Runge-Kutta 방법과 조준법을 사용하여 수치적으로 해석하였다. 유체와 자성유체의 밀도 비( $\rho_r$ )와 점성계수 비( $\mu_r$ ), 자성유체 두께를 특성 길이로 하는 Reynolds 수( $Re_1$ )를 바꾸어 가면서 수치계산을 수행한 결과 얻어진, 자성유체 피막이 있는 평면 벽을 향하는 정체 유동의 특징을 정리하면 다음과 같다.

- (1)  $Re_1$  값을 기준으로 자성유체 영역 내의 유동 구조가 단일 와류 쌍 구조에서 이중 와류 쌍 구조로 넘어가는 임계값  $Re_1^{(a)}$ 이 존재한다. 이 값은  $\rho_r$ 과  $\mu_r$ 에 따라 달라진다.
- (2) 계면의 점선속도, 계면과 벽면에서의 전단응력, 경계층 두께와 배제 두께는 공통적으로 자성유체가 고체처럼 작용하는 극한값( $\mu_r \ll 1$  또는  $Re_1 \ll 1$ )과 자성유체가 비점성 유체처럼 작용하는 극한값( $\mu_r \gg 1$  또는  $Re_1 \gg 1$ ) 사이에서  $\mu_r$ 와  $Re_1$ 에 대하여 연속적으로 변한다.
- (3) 점성계수 비가 클수록, Reynolds 수가 클수록 자성유체 피막에 의한 유체의 항력 감소 효과가 더 좋아지며, 항력이 더 커지는 경우는 없다.

#### 후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문입니다.

참고문헌

- [1] 1987, Rosensweig, R.E., "Magnetic Fluids," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol.19, pp.437-463.
- [2] 1996, Kamiyama, S., "Recent Development of Magnetic Fluid Engineering," *JSME J.(B)*, Vol.62-596, pp.1281-1287, (in Japanese).
- [3] 1996, Rosensweig, R.E., "Conceptual Applications of Magnetic Fluids," in *Magnetic Fluids and Applications Handbook*, Berkovski, B. (Editor-in-Chief), Begell House, New York, pp.591-654.
- [4] 1996, Bashtovoi V., Blums, E., and Kamiyama, S., "Fluid Mechanical Phenomena," in *Magnetic Fluids and Applications Handbook*, Berkovski, B. (Editor-in-Chief), Begell House, New York, pp.395-588.
- [5] 1995, Krakov, M.S. and Kamiyama, S., "Steady flow past a circular cylinder coated with magnetic fluid: flow structure, drag reduction and coating deformation," *J. Fluid Mech.*, Vol.295, pp.1-22.
- [6] 1995, Krakov, M.S. and Kamiyama, S., "Unsteady flow past a circular cylinder with magnetic fluid coating," *J. Magn. Mater.*, Vol.149, pp.108-110.
- [7] 1911, Hiemenz, K., "Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder," *Dingler's Polytech. J.*, Vol.326, p.321.
- [8] 1991, White, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Singapore, pp.152-163.
- [9] 2004, Mathsoft, *Mathcad 12 User's Guide*, Cambridge.