수학사적 관점에서 오일러 및 베르누이 수와 리만 제타함수에 관한 탐구

경북대학교 전자전기컴퓨터학부 **김태균**
tkim64@hanmail.net

건국대학교 전산수학과 **장이채**
leechae.jang@kku.ac.kr

베르누이가 처음으로 자연수 k에 대하여 합 $S_n(k)=\sum_{l=1}^{n} l^k$에 관한 공식들을 유도하는 방법을 발견하였다([4]). 그 이후, 리만 제타함수와 관련된 베르누이 수와 오일러 수에 관한 성질들이 연구되어왔다. 최근에 김태균은 $\mathbb{Z}_p$상에서 p-진 q-적분과 관련된 확장된 q-베르누이 수와 q-오일러 수, 연속된 q-정수의 멱수의 합에 관한 성질들을 밝혔다. 본 논문에서는 연속된 q-정수의 멱수의 합에 관한 역사적 배경과 발달과정을 고찰하고, 오일러 및 베르누이 수와 관련된 리만 제타함수가 해석적 함수로써 값을 가지는 문제를 q-확장된 부분의 이론으로 연구되어온 q-오일러 제타함수에 대해 체계적으로 논의한다.

주제어: 베르누이 수, 리만 제타함수, q-오일러 제타함수, q-오일러 수, q-정수, 멱수의 합, 해석적 함수.

1. 서론

17세기 파울하버(Faulhaber)는 $1^m+2^m+\cdots+n^m$의 합을 $m=17$일 때까지 계산하였다([1], [10], [15]). 이러한 연속된 멱수의 합은 삼각형 수 $N=\frac{n(n+1)}{2}$를 포함한 간단한 형태로 주어진다. 처음 $m=1,2,3,4,5$인 경우에 대하여 구체적으로 써보면 다음과 같다.

$$1^1+2^1+\cdots+n^1=N,$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{(2n+1)N}{3},$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=N^2,$$

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{(2n+1)(2N^2-\frac{N}{3})}{5},$$

$$1^5+2^5+\cdots+n^5=\frac{4N^3-N^2}{3}.$$

역사적으로 파울하버의 연구([10])는 베르누이(Bernoulli))의 연구([4, 5])와 밀접하게 연결되어 있다고 볼 수 있다. 1713년 베르누이는 자연수 n에 대한

$$S_n(0)=S_n(1)=0,$$

$$S_n(k)=1^n+2^n+\cdots+(k-1)^n, \quad k=2,3,\cdots$$

합의 공식을 만들었다([2], [3], [4], [5]). 베르누이 수는 수열에 관련된 가장 흥미 있고 중요한 것 중에 하나라고 볼 수 있다. 이 수는 베르누이 사후에 쓰인 저서 추측술(Ars Conjectandi)에서 볼 수 있다([4], [5]). 이것과 관련된 3개의 추측을 소개하면 다음과 같다([1], [4], [5], [7]).

(1) $S_n(k)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{n+1}$이면서 차수가 $n+1$이다.

(2) $S_n(k)$의 상수항은 0이다.

(3) $S_n(k)$의 k^n의 계수는 $-\frac{1}{2}$이다.

실제로, $S_n(k+1)-S_n(k)=k^n$이다. 베르누이는

$$S_n(k)=\sum_{j=1}^{k-1}j^n=1^n+2^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)dx$$

을 소개하였다.

최근에 이러한 이론의 확장된 개념으로 김태균은 q-정수1) 상에서 베르누이의 연구와 밀접한 관련이 있는 연속된 q-정수의 멱수의 합에 대한 연구를 수행하였다([16]). 그 후 시로스(Schlosser) 등 몇몇 연구자들에 의해서 연속된 q-정수의 멱의 합을 낮은 차수에 대해서 연구했다(([19]). 이러한 베르누이 수는 신비한 함수로 알려진 제타함수와 밀접한 관계가 있다. 이러한 제타함수의 양의 정수에서 수렴하는 값 외에 급수로써 발산하지만 해석적 함수로써 값을 가지는 문제에 대한 연구는 대략 1740년경으로 거슬러 올라가고 오일러(Euler)가 리만 제타함수(Riemann zeta function)2)의 함수 방

1) 일반적으로 정수의 확장된 개념으로 미지수 q에 대하여 q-정수 $[n]_q(n\in\mathbb{Z})$는 다음과 같이 정의한다.

$$[n]_q=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+\cdots+q^{n-1}\in\mathbb{Z}[q].$$

2) 리만의 가설은 어떤 복소수로 만들어진 함수가 0이 되는 값들의 분포에 대한 가설이다. 리만가설에 쓰이는 리만 제타함수는 다음과 같이 정의된다.

정식을 해결하는 중요한 방법을 개발한 시점으로 볼 수 있다([8], [9], [10], [13]). 그는 나름대로의 계산방법을 사용하여 발산하는 급수의 값을 다음과 같이 놀라운 값으로 제시하였다(이 계산은 3절에서 설명된다).

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots=-\frac{1}{2},$$

$$1+2+3+4+5+\ldots=-\frac{1}{12},$$

$$1+4+9+16+25+\ldots=0\ ,$$

$$1+8+27+64+125+\ldots.=\frac{1}{120}\ .$$

그리고 이러한 리만 제타함수 $\zeta(s)$의 해석적 연속함수[3]의 값으로써 $\zeta(-m)$의 값을 계산하는 엄격한 방법이 오늘날에는 복소수 함수 및 공학수학의 대학교재에서 취급할 정도로 잘 알려졌다. 최근에는 이러한 제타함수와 관련된 q-확장된 부분의 이론들이 김태균에 의해 체계적으로 q-확장 되었다([14], [15]). 본 논문에서는 오일러의 접근방법부터 현재까지 개발된 급수로써 발산하지만 해석적 연속함수로서 값을 갖는 연구변천사를 살펴보았다. 이러한 변천과정을 조사하고 연구하는 것은 과거와 현재의 수학사적 발전경로를 통해 오일러 제타함수의 역사적 배경과 수학사적 관점을 이해 할 수 있는 계기가 될 것으로 사료된다. 또한 이러한 수학사적 관점은 해석적 연속함수와 복소수공간과 복소수함수가 가지는 의미를 이해하는데 많은 도움이 될 것으로 기대한다.

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\ (s\text{는 복소수})$$

한편, 이 함수 값을 0으로 하는 해 중에서 실수부가 1이상인 복소수는 없고, 실수부가 0이하인 복소수에 대해서는 $-2, -4, -6, \cdots$ 처럼 음의 짝수인 경우만 해가 될 수 있다는 사실이 밝혀졌다.

3) ① 해석적 함수: 복소수 평면의 영역 D에서 정의된 함수 $f(s)$가 D의 점 s_0에서 해석적이라는 것은 s_0의 어떤 근방내의 모든 s에 대해서 $f(s)$가 $s-s_0$의 멱급수로 표시 될 수 있다는 것이다. D안의 모든 점에서 해석적일 때 $f(s)$는 D에서 해석함수라 한다. 따라서 해석적 함수는 D의 모든 점에서 미분가능이다.

② 해석적 연속: 복소해석학에서 해석적 연속은 주어진 해석적 함수의 정의역을 확장하는 기술이다.

③ 해석적 연속함수: 복소수 공간위의 영역 D_0에서 정칙인 함수(= D_0의 모든 점에서 미분가능) $f(s)$에 대해서 D_0을 진부분 집합으로 포함하는 영역 D에서의 함수 $F(s)$가 있고 D_0에서는 $f(s)$의 값과 일치한다고 하면 $F(s)$을 $f(s)$의 D_0로부터 D로의 해석적 연속이라고 하고 $F(s)$를 해석적 연속함수라고 한다.

2. 베르누이 수에 의한 k차 멱수의 합([1], [4], [5], [17])

k차 멱수의 합을 구하는 가장 일반적이고 효과적인 방법들 중에 하나는 베르누이 수를 이용하는 것이다. 베르누이 수[4]는 미분적분학에서 볼 수 있는 로피탈(L'Hospital)법칙을 발견한 진 베르누이(Jean Bernoulli) 형인 자크 베르누이(Jacques Bernoulli, 1654-1705)에 의해 발견되었다. 베르누이 가족은 수학의 역사에 있어서 가장 유명한 가족 중의 한 가족이다. 니콜라스 베르누이(Nicolaus Bernoulli)와 진 구스타프 베르누이(Jean Gustave Bernoulli)사이에 뛰어난 수학자와 물리학자 12명이 있었다. 야콥 베르누이(Jacob Bernoulli)는 그가 죽은 후 1713년에 출판된 그의 책 "추측술"에 정수들의 멱수의 합을 찾는 베르누이 수를 소개하였다. 베르누이 수는 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$B_0 = 1\text{이고 } B_m = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k,\ m > 0,$$

여기서 $\binom{m}{k}$는 이항계수 $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$를 의미한다.

정의에 따라 처음 16까지 베르누이 수를 구해보면 다음과 같다.

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_9 = 0,\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{11} = 0,\ B_{12} = -\frac{691}{2730},$$

$$B_{13} = 0,\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{15} = 0,\ B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

베르누이 수는 매우 복잡하고 불규칙적인 패턴을 가지고 있는 듯하다. 그러나 믿기 어려울 만큼 많은 수학적인 성질들을 가지고 있다. 놀랄만한 성질들 중 몇 개를 소개한다.

(1) 모든 양의 정수 m에 대하여 $B_{2m+1} = 0$, B_{2m}은 연속된 값에 대한 부호는 교대한다.

(2) 만약 m이 양의 정수 이면, $B_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(2m)!\zeta(2m)}{2^{2m-1}\pi^{2m}}$이다.

여기서 $\zeta(m) = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots$인 제타함수 이다.

(3) 베르누이 수 B_k는 다음을 만족한다. $B_k = \lim_{x \to 0}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{x}{e^x - 1}\right]$.

4) 아래와 같은 식을 만족하는 B_n을 베르누이 수라고 정의한다.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

(4) 베르누이 수는 다음 등식을 만족한다. $\dfrac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\dfrac{x^n}{n!}$.

(5) 베르누이 수는 연속하는 정수의 멱수의 합을 구하는 것 만아니라 제타함수 $\zeta(2m)$, $tan(x), tanh(x), 1/sin(x)$와 같은 많은 함수들의 전개에 나타난다.

3. 발산급수에 대한 오일러의 고찰([8], [9], [10], [13])

오늘날, $Re(s)>1$인 복소수 $s\in\mathbb{C}$에 대하여 절대수렴하는 급수로 정의되는 리만 제타함수

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots\ldots$$

는 음의 정수에서 해석적 함수로서 값을 가진다는 것은 복소 해석학에서 보편적으로 다루어지는 사실이다. 1740년경, 복소수 변수를 가지는 함수가 없다고 말하는 그 당시에는 해석적 연속의 개념조차도 없었다. 그럼에도 오일러는 발산급수가 가지는 값들에 대한 의미를 주는 방법을 알고 있었던 것처럼 보인다. 즉 오일러는 교대급수(alternating series)

$$1^m-2^m+3^m-4^m+5^m-6^m+7^m-8^m+\ldots.$$

에서는 발산이 없음5)에 주목했다. 이것에 대응되는 수렴하는 급수로서

$$\frac{1}{1^m}-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}-\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}-\frac{1}{6^m}+\frac{1}{7^m}-\frac{1}{8^m}+\ldots$$

은 실제로 빠르게 수렴하고 본 급수는 아래와 같은 리만 제타함수와 관련된 간단한 관계식이 주어짐을 알 수 있다.

$$\eta(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s),$$

여기서 $\eta(s)=1-\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3^s}-\dfrac{1}{4^s}+\dfrac{1}{5^s}-\cdots$로 정의한다. 이때 오일러는 아래 멱급수

5) 제타함수 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$에서 일반적으로 급수로서는 $Re(s)>1$에서 절대수렴한다. 그러나 $s=1$을 제외한 복소수 $\zeta(1-m)=-\dfrac{B_m}{m}$ 공간에서 $\zeta(s)$는 해석적 함수이므로 $Re(s)<1$에서 값을 가짐을 알 수 있다. 즉, 음의 정수에서 의 값을 가진다.

$$1^m - 2^m x + 3^m x^2 - 4^m x^3 + 5^m x^4 - 6^m x^5 + 7^m x^6 - 8^m x^7 + ... \text{ (단 } |x|<1)$$

의 극한($x \to 1$)으로

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + ...$$

의 값이 얻어질 수 있음을 주장했다([8], [9], [10]). 비록 $|x|<1$에서 이 급수가 수렴하지만 $x=1$에서는 유한인 해석적 연속함수로 표현된다. 기하급수 전개로부터 아래 식은 잘 알려져 있다.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots, \text{ (단 } |x|<1).$$

한 예로, 만약 우리가 $x=1$을 잡으면

$$\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots = \eta(0).$$

이것으로부터 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$임을 알 수 있다. 몇 가지 더 예를 살펴보면 아래와 같다.

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots,$$

$$\frac{1-x}{(1+x)^3} = 1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \cdots,$$

$$\frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4} = 1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - \cdots.$$

위 식에서 만약 우리가 $x \to 1$의 극한을 취하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\eta(-1) = \frac{1}{4}, \ \eta(-2) = 0, \ \eta(-3) = -\frac{1}{8} \cdots.$$

이 식과 $\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$을 이용하면 음의 정수에 대한 리만 제타함수의 값을 구할 수 있다. 예를 들면,

$$\zeta(-1) = 1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12},$$

$$\zeta(-2) = 1^2+2^2+3^2+\cdots = 0,$$

$$\zeta(-3) = 1^3+2^3+3^3+\cdots = \frac{1}{120}.$$

그러나 오일러는 해석적 연속 개념을 알고 있는 것처럼 보이지만 실제로는 $s=-m$(m은 양의 정수)에서 제타함수 $\zeta(s)$의 해석적 연속함수의 값으로써 $\zeta(-m)$의 값을 계산하는 정밀하고 엄격한 방법은 제공하지 못했다. 오일러가 정밀한 증명 없이 그 이전에 있었던 결과로부터 도출한 음의 정수에서 리만 제타함수의 해석적 함수의 값에 해당하는 값들을 언급한 덕택에 200년 동안 많은 수학자들이 오일러의 관점에 관심을 갖고 연구한 결과 해석적 연속함수의 개념을 정립하게 되었고 오일러의 주장이 정확하였다는 것이 입증되었다.

4. 오일러 다항식 및 오일러 제타함수[6)]([8], [9], [10], [13], [14])

$|t|<\pi$인 t에서 다음 생성함수[7)]로 오일러 수를 정의한다.

$$F(t)=\frac{2}{e^t+1}=e^{Et}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}$$

여기서 $n\ge 0$에 대하여 기호로 E^n을 E_n으로 표기한다[8)]. x을 변수로 잡고, $F(t,x)=\frac{2}{e^t+1}e^{xt}$ 을 고려하자. 이때 $F(t)$와 똑같은 방법으로

6) 리만 제타함수와 유사한 형태인 교대급수를 다음과 같이 생각하자.

$$\zeta_{\mathbf{E}}(s)=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots\ (s\text{는 복소수}).$$

이 경우 $\zeta_{\mathbf{E}}(s)$는 복소수 공간에서 해석적 함수이므로, s가 음의 정수에서 이 함수값을 계산하면 오일러 수가 대응된다.

7) 어떤 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음과 같이 정의하는 함수f를 이 수열의 생성함수라고 부른다.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

8) $F(t)=\frac{2}{e^t+1}$은 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\frac{2}{e^t+1}=1-\frac{1}{2}t+\cdots\ =\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}.$$

한편 e^{Et}를 테일러 급수전개하면 $e^{Et}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E^n}{n!}t^n$이 됨을 알 수 있다. 여기서 E^n은 상징적으로 E_n으로 표시하기 때문에

$$\frac{2}{e^t+1}=e^{Et}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}$$

로 표현할 수 있다.

$$F(t,x)=e^{E(x)t}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

로 정의하면 아래 관계를 얻을 수 있다.

$$F(x,t)=F(t)e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

따라서 오일러 다항식

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k}$$

을 얻는다. 여기서 $E_n(0)=E_n$이다. 위의 오일러 수는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$(E+1)^n+E_n=\begin{cases}2, & n=0\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$$

여기서 $n\geq 0$에 대하여 기호로E^n 을 E_n으로 표기한다. 위의 식으로부터, 다음을 이끌어 낼 수 있다. $2=(E+1)^0+E_0$ 이므로 $E_0=1$이다. 몇 가지 더 서술하면 아래와 같다.

$$0=(E+1)^1+E_1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}E_k+E_1=2E_1+E_0$$

이므로 $E_1=-\frac{1}{2}$이고 $n=2$인 경우에 대해서는

$$0=(E+1)^2+E_2=E_2+2E_1+1+E_2=2E_2$$

이므로 $E_2=0$ 이다. 따라서 귀납법에 의해 $E_{2k}=0$임에 주의하여 위와 같은 방법으로 오일러 수를 구할 수 있다. 즉,

$$0=(E+1)^3+E_3=E_3+3E_2+3E_1+1+E_3=2E_3+3(-\frac{1}{2})+1$$

이므로 $E_3=\frac{1}{4}$ 이다.

모든 양의 정수 n에 대하여

$$-2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+n}e^{(l+n)t}+2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l e^{lt}=2\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l e^{lt}$$

이 성립하는데, 이 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{2}{e^t+1}-(-1)^n e^{nt}\frac{2}{e^t+1}=2\sum_{l=0}^{n}(-1)^l e^{lt}$$

위의 식들로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(E_m+(-1)^{n+1}E_m(n)\right)\frac{t^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(2\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l l^m\right)\frac{t^m}{m!}.$$

따라서 임의의 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$2\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l l^m=\frac{1}{2}\left[(-1)^{n+1}E_m(n)+E_m\right]$$

을 얻는다. 예를 들면, $m=1$인 경우,

$$-1+2-3+4-5+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)=\frac{1}{2}\left[(-1)^{n+1}E_1(n)+E_1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(-1)^{n+1}\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(2n-1)-1\right]$$

이다. $\Gamma(s)$[9]을 감마 함수라고 할 때

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}\frac{1}{1+e^{-t}}e^{-xt}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^s},\ s\in\mathbb{C}$$

이므로 오일러 제타함수를 정의할 수 있다. 임의의 $s \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}\,(0<x<1)$에 대하여 오일러 제타함수를

$$\zeta_E(s,x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^s}$$

로 정의하고 $x=1$인 특별한 경우에 대해서는

$$\zeta_E(s)=\zeta_E(s,1)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

로 정의한다. 이때 임의의 $s \in \mathbb{C}$에 대하여 아래의 관계식을 얻을 수가 있다.

$$\zeta_E(s,x)=\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}\frac{1}{1+e^{-t}}e^{-xt}dt\ .$$

오일러 다항식의 생성함수와 위의 식으로부터 발산하는 교대급수의 해석적 연속함수의 값 을 아래와 같이 줄 수 있다. 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 다음을 얻는다.

$$\zeta_E(-n,x)=E_n(x).$$

특히, $x=1$인 경우 다음의 결과가 도출된다.

$$\zeta_E(-n)=\zeta_E(-n,1)=E_n(1).$$

이러한 식으로부터 아래의 몇 가지 예들을 관찰할 수가 있다.

9) 감마함수 $\Gamma(s)$는 $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$로 정의된다.

$$\zeta_E(s) = \zeta_E(s,1) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^s},$$

$$\zeta_E(0) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 2(1-1+1-1+\cdots).$$

특히 $E_0(1)=1$이므로 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$의 발산급수로써 해석적 함수 값을 가지고

$$E_1(1) = \zeta_E(-1) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n = 2(1-2+3-4+\cdots)$$

이고 $E_1(1)=\frac{1}{2}$이므로 $1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}$이 된다. 똑같은 방법으로

$$E_2(1) = \zeta_E(-2) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2(-1)^n = 2(1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots)$$

이고 $E_2(1)=0$이므로 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots=0$이 됨을 알 수가 있다. 마지막으로 한 개 더 소개하면 아래와 같다. $1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots=-\frac{1}{8}$이다. 결론적으로 위에서 소개한 내용들을 정리하면 아래와 같다.

(1) $\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^s} \to \zeta(s,1) = \zeta(s)$

(2) $\zeta(1-n,x) = -\frac{B_n(x)}{n}$이므로 $\zeta(1-n,1) = -\frac{B_n(1)}{n} = -\frac{(B+1)^n}{n}$이다.

(3) $\zeta(0) = \sum_{n=0}^{\infty}1 = 1+1+1+\cdots$ 이고 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ 이므로 $1+1+1+\cdots = -\frac{1}{2}$ 이다.

(4) $\zeta(-1) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) = 1+2+3+4+\cdots$ 이고 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ 이므로 $1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}$ 임을 알 수 있다.

5. 김태균의 q-오일러 제타 함수[10]와 오일러 수([15])

이 절에서는 $|q|<1$인 $q \in \mathbb{C}$로 가정하고 김태균은 q-오일러 다항식을 아래와 같이 구성했다.

10) 오일러 수 및 오일러 제타함수의 q-확장된 q-오일러수와 q-오일러 제타함수가 김태균에 의해 구성되었기 때문에 본 논문에서는 오일러 제타함수와 구별하기위해서 김태균의 q-오일러 제타함수로 정의하였다.

$$E_{m,q}^{(h,1)}(x)=\frac{[2]_q}{(1-q)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^l q^{lx}\frac{1}{1+q^{l+h}} \quad =[2]_q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{nh}[n+x]_q^n.$$

이것으로부터 q-오일러 제타함수를 아래와 같이 생각할 수가 있다. $s\in\mathbb{C}$, $|q|<1$인 $q\in\mathbb{C}$에 대하여 q-오일러 제타함수 $\zeta_{E,q}^{(h)}(s,x)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\zeta_{E,q}^{(h)}(s,x)=[2]_q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{nh}(-1)^n}{[n+x]_q^s},\quad (\text{단 } h\text{는 정수}).$$

여기서 x는 $0<x\le 1$을 만족하는 $x\in\mathbb{R}$이다. 임의의 $m\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$에 대하여 $\zeta_{E,q}^{(h)}(-m,x)=E_{m,q}^{(h,1)}(x)$ 이 됨을 주목하자. 생성함수 $F_q(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,q}^{(h,1)}(x)\frac{t^n}{n!}$라 하면 간단한 계산에 의해서

$$F_q(t,x)=[2]_q e^{\frac{1}{1-q}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{1+q^{j+h}}q^{jx}\left(\frac{1}{1-q}\right)^j\frac{t^n}{j!} \quad =[2]_q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{hn}e^{[n+x]_q t}$$

이 된다. 따라서

$$F_q(t,x)=[2]_q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{hn}e^{[n+x]_q t}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,q}^{(h,1)}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

감마함수 $\Gamma(s)$, $s\in\mathbb{C}$에 대하여

$$\frac{[2]_q}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{hn}e^{-[n+x]_q t}dt=[2]_q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{hn}}{[n+x]_q^s}=\zeta_{E,q}^{h}(s,x)$$

의 관계식이 주어지고 여기에 q-오일러 다항식의 생성함수를 대입시키면 다음을 얻을 수 있다.

$$\zeta_{E,q}^{h}(-n,x)=E_{n,q}^{(h,1)}(x),\ n\in\mathbb{N}.$$

5. 결론

앞에서 베르누이 및 오일러 수에 대한 역사적 흐름과 진화 과정을 살펴보았고 이러한 수는 $Re\,s>1$ 인 영역에서 절대 수렴하는 리만 제타함수와 연결되어 흥미롭고 신비한 많은 놀라운 관계식들을 관찰할 수가 있었다. 특히 리만 제타함수가 급수로써는 발산하지만 해석적 연속함수로써 값을 가진다는 것은 오늘날에는 해석적 연속함수의 개념으로부터 쉽게 증명 할 수 있지만 해석적 연속함수의 개념이 정립되어 있지 않은 1740년경에 오일러는 발산급수가 가지는 값들에 대한 의미를 알고 있었던 것처럼 보인다. 특히 오일러가 교대급수

$$1^m-2^m+3^m-4^m+5^m-6^m+7^m-8^m+\ldots.$$

에서는 발산이 없음에 주목한 것은 놀라운 것으로 사료된다. 구체적인 사례를 중심으로 설명하면 다음과 같다.

(1) 1732-1740년(오일러)에 의한 발견([8, 9, 10]) :

$$\zeta(-m) = 1 + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m + \ldots, \text{ 자연수 } m = 1, 2, \cdots,$$

$$m=1\text{일 때 } \zeta(-1) = 1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12},$$

$$m=2\text{일 때 } \zeta(-2) = 1^2+2^2+3^2+\cdots = 0,$$

$$m=3\text{일 때 } \zeta(-3) = 1^3+2^3+3^3+\cdots = \frac{1}{120}.$$

(2) 1949-1954년(카리츠)에 의한 발견([7]) : q-베르누이 수에 대한 구성과 이와 관련된 정수론적 문제들을 연구했다.

(3) 1982년(코브리츠)에 의한 발견([18]) : 음의 정수에 관한 카리츠 q-베르누이 수의 값을 가지는 리만 제타함수의 q-확장의 존재성에 관한 문제를 제기하였다.

(4) 1994년(김태균)에 의한 발견 ([12]) : 이러한 q-제타함수를 구성하였고 해석적 연속함수임을 밝혔다.

(5) 2004년(김태균)에 의한 발견 ([16]) :

$$\zeta_q^h(-m) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{nh}[n]_q^m + (q-1)\frac{1+m+h}{1+m}\sum_{n=1}^{\infty} q^{nh}[n]_q^{m+1}, \text{ 자연수 } m = 1, 2, \cdots.$$

(6) 2007년(김태균)에 의한 발견 ([14]) :

$$\zeta_{E,q}^h(-m,0) = E_{m,q}^{(h,1)}(0) = [2]_q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{nh}[n]_q^m, \text{ 자연수 } m = 1, 2, \cdots.$$

최근에 수십 년 동안 많은 수학자들이 조합론, 수론 혹은 이산수학 방법으로 q-오일러 수를 연구하기 위해서 q-오일러 수 혹은 베르누이 수의 구성을 연구했지만 카리츠 q-베르누이 수의 값을 가지는 리만 제타함수의 q-확장의 존재성에 관한 문제에 대한 만족할만한 성과는 없었다. 그러나 위와 같은 김태균(1994-2007)의 사례들은 조합론, 수론 혹은 이산수학 방법 대신에 p-진 q-적분(김태균)의 방법으로 q-오일러 제타함수와 q-오일러 정수의 구성을 연구하고, 리만 제타함수의 q-확장의 존재성에 관한 문제를 해결한 결과라고 볼 수 있다. 또한 이러한 q-오일러 수는 다양한 응용을 가지고 있으며, 오일러의 제타함수를 확장하는 해석적 연속성을 가지는 q-교대급수로써 q-오일러 제타함수를 자연스럽게 확장하게 되어 앞으로 기대효과가 높을 것으로 판단된다([12, 13, 14, 15, 16]).

감사의 글 본 논문의 저자들은 심사자들의 세심한 조언과 수학사적 관점에 대한 학문적 도움을 준데 대해 감사의 글을 올립니다.

참고 문헌

1. 김태균, 박홍경, 유천성, 임석훈, 장이채, q-정수의 세계와 그 응용, 교우사, 2006.
2. 김태균, 박달원, 박홍경, 임석훈, 유천성, 장이채, 정인철, 비 아르키메디언 해석학 입문, 교우사, 2004.
3. 김태균, 박달원, 박홍경, 임석훈, 유천성, 장이채, 초월함수개론, 교우사, 2005.
4. J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basel, Reprinted on pp. 106-286 in Vol 3 of "Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhauser Verlag", Basel, 1975. See also SMITH D.E. 1, (1713), 85-90
5. J. Bernoulli, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, 1899
6. L. Carlitz, *q-Bernoulli numbers and polynomials*, Duke Math. J. 15(1948), 987-1000.
7. K. Dilcher, *A Bibliography of Bernoulli numbers*, http://www.mscs.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html,
8. L. Euler, *Methodus generalis summae progressiones*, Commentarii Academiae Scientiarun Petropolitanae 6(1732/3), 68-97. Opera Omnia(Collected Works), Series prima XIV, 42-72.
9. L. Euler, *Inventio Summae Cuiusque Seriei et Dato Termino Generali*, Commentarii Academiae Scientiarun Petropolitanae 8(1736), 9-22. Opera Omnia (Collected Works), Series prima XIV, 108-123.
10. L. Euler, *De Seriebus Quibusdam Considerationes*, Commentarii Academiae Scientiarun Petropolitanae 12(1740), 53-96. Opera Omnia(Collected Works), Series prima XIV, 108-123.
11. J. Faulhaber, *Academia Algebrae*, Darinnen die Miraculosischeinventiones zu den Hochsten Cossen Weiters Continuirt und Profitiert Werden, Augspurg, bey Johann Ulrich Schonigs, 1631.
12. T. Kim, *On explicit formulas of p-adic q − L-functions*, Kyushu J. Math. 48(1) (1994), 78-86.
13. T. Kim, *A note on the alternating sums of powers of consecutive integers*, arXiv:math.NT/0508233
14. T. Kim, *On p-adic q-l-functions and sums of powers*, J. Math. Anal. Appl. 329(2)(2007), 1472-1481.
15. T. Kim, *q-Euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integrals*, J. Nonlinear Math. Phys. 14(1)(2007), 15-27.
16. T. Kim, *Sums of powers of consecutive q-integers*, Advan. Stud. Contemp. Math. 9(2004), 15-18.

17. D. E. Knuth, *Johann Faulhaber and Sums of powers*, Math. Comp. 61(1993), 77-294
18. N. Koblitz, *On Carlitz's q-Bernoulli numbers*, J. Number Theory 14(3)(1982), 332-229.
19. M. Schlosser, *q-Analogues of Sums of powers of consecutive integers, squares, Cubes, quarts and quints*, Elec. J. Comb. 11, #R71. 2004

On the historical investigation of Bernoulli and Euler numbers associated with Riemann zeta functions

EECS, Kyungpook National University, **Tae kyun Kim**
Department of Math. and Comp. Sci., Konkuk University, **Lee Chae Jang**

J. Bernoulli first discovered the method which one can produce those formulae for the sum $S_n(k)=\sum_{l=1}^{n} l^k$ for any natural numbers k. After then, there has been increasing interest in Bernoulli and Euler numbers associated with Riemann zeta functions. Recently, Kim have been studied extended q-Bernoulli numbers and q-Euler numbers associated with p-adic q-integral on $\mathbb{Z}_p$, and sums of powers of consecutive q-integers, etc. In this paper, we investigate for the historical background and evolution process of the sums of powers of consecutive q-integers and discuss for Euler zeta functions subjects which are studying related to these areas in the recent.

Key word: Bernoulli numbers, Euler numbers, Sums of powers of consecutive integers, Riemann zeta function, Euler zeta function

2000 Mathematics Subject Classification : 11B68, 11S80

ZDM Classification : F69, F39, B59, D09, D29

논문 접수 : 2007 년 10월 6일 심사 완료 : 2007 년 10월 26일