한국수학사학회지 제20권 제4호(2007년 11월), 153 - 174

통합개념으로서 함수 개념에 대한 역사적 고찰

홍익대학교 **강현영**
sunrayk@empal.com

함수 개념은 그 자체만으로 이루어진 단일한 개념이 아니라 산술, 기하와 같은 수학의 여러 주제가 통합된 개념이다. 따라서 함수는 수학의 밑바탕에 폭넓게 스며있는 기본적인 개념일 뿐 아니라 변화하는 현실 세계를 이해하기 위한 개념적인 수단으로서 다양한 변화 현상을 '보기' 위해서 생각하지 않을 수 없다. 이에 따라 본 논문에서는 역사적인 고찰을 통해 통합개념으로서 함수 개념에 대해 고찰하였다. 특히 함수 개념과 관련된 표현이 보다 명백히 드러난 중세에서부터 19세기까지 함수 개념의 변화를 통해 통합개념으로서 함수의 모습을 살펴보았다.

주제어 : 함수, 변화, 기하학적 표현, 곡선 표현, 변수, 계산체계, 해석적인 식

0. 들어가며

F. Klein이 학교수학의 조직 원리로서 생각한 것은 함수였으며, 그것은 함수 개념이 수학에 있어서 그 자체만으로 이루어진 단일한 개념이 아니라 산술, 기하와 같은 수학의 여러 주제가 통합된 개념이었기 때문이다. 현재 함수에 대한 가장 일반적인 정의는 '변수 x의 함수 값은 y, $y=f(x)$는 두 수의 집합 X, Y의 원소로 이루어진 쌍들 사이의 대응, 즉 X의 모든 원소 x에 대하여 각각 Y의 원소 y가 어떤 명확한 규칙에 따라 유일하게 대응되는 관계'이다. 그러나 역사적으로 함수는 '한 변수에서 다른 한 변수에의 종속'이라는 속성을 조직하는 수단이었으며 한동안 종속만으로 함수를 설명하는 것이 가능하였다. 하지만 함수 개념이 확장되면서 종속만으로 설명할 수 없었고 확장된 함수 개념을 설명할 수 있는 '대응'의 관점이 대두된 것이다. 이러한 과정에서 함수는 대수와 기하를 관련지어주고 응용수학을 포함하여 수학 전체에 존재하며 필요와 기회에 따라 적절하게 사용되었다. 수학의 밑바탕에 폭넓게 스며있는 기본적인 개념으로서 다양한 변화 현상을 보기 위해서는 함수를 생각하지 않을 수 없으

며 따라서 교육적으로도 중요한 개념이 될 수 밖에 없는 것이다.

이에 따라 본 논문에서는 역사적 고찰을 통해 수학의 여러 주제가 통합된 개념으로서 함수 개념에 대해 살펴보고자 한다.[1] 물론 함수 개념의 근원은 바빌로니아나 이집트 등의 고대 문명에서 찾아 볼 수 있지만, 함수 개념에 대한 표현이나 함수 개념을 전제로 하는 추상화와 일반화가 부족하다(Boyer, 1945, p.5). 따라서 함수 개념과 관련된 표현이 보다 명백히 드러난 시기를 중심으로 살펴보고자 한다. 함수 개념 발달에 영향을 주었던 개념 요소들을 중심으로 하여 그 개념들이 발생하였던 시기에 어떻게 함수를 표현하고 있는지를 살펴보았다. 1절에서는 12세기-14세기의 함수의 모습을 N. Oreame, L. Beekmann을 중심으로 하여 살펴보고, 2절에서는 곡선 연구를 통한 함수 개념 발달과 변수의 등장에 대해 Descartes와 Fermat를 중심으로 하여 살펴보도록 한다. 3절에서는 Newton과 Leibniz를 중심으로 하여 그리고 4절에서는 Bernoulli의 함수 정의를 살펴보고 특히 함수 개념 발달에 있어서 중요한 계기를 마련하였던 Euler를 중심으로 하여 고찰하도록 한다. 그리고 마지막으로 Euler 이후 함수 개념 발달에 대해 간략히 살펴보고자 한다.

1. 변화에 대한 운동학적 기하학적인 표현을 통한 함수적 관계에 대한 인식

함수에 대한 최초의 개념화는 여러 가지 운동을 연구하는 것, 즉 운동을 나타내는 곡선과 관련하여 도형적으로 개념화 되었다(박교식, 1991, p.118). 12세기 Oxford와 Paris의 자연철학 학파에 의해 함수 개념이 보다 일반적인 형식으로 나타난다.[2] 이 학파들은 수학이 자연 현상을 연구하는 주된 수단이 된다고 천명하였다. 특히, Merton의 운동학은 'intension and remission of forms'라는 오랜 전통을 지닌 이론에서 발달하였는데, 질의 강도가 어떻게 증가하거나 감소하는가에 대한 문제를 다루었다(K, Sharon Ann, D.A, 1992, p.21-22). Merton 학파가 주로 다루었던 질 또는 형상(form)은 열, 빛, 색채, 밀도, 거리, 속도 등 다양한 강도를 지니고 있으면서 주어진 한

1) 그동안 함수 개념에 대한 역사와 관련하여 Youschkevitch(1976)는 일변수 함수를 중심으로 하여 고대부터 현대 이르기까지 함수 개념의 변화를 살펴보고 있으며, Kleiner(1989)는 미적분과 해석학의 관련 속에서 고찰하고 있다. Sierpinska(1994)는 인식론적 장애의 관점에서, Atkinson(2002)은 운동학적 관점에서 역사를 통해 함수의 개념의 발생과정을 살펴보고 있는 등 함수의 역사와 관련하여 많은 연구가 있었다. Klein(1939) 역시 함수 개념을 학교에 도입하기 위해 함수의 역사를 고찰하고 있다. 그 외에도 한 시기의 함수 개념의 특징을 자세히 고찰하는 경우나 함수의 그래프에 대해서 역사적으로 고찰하는 경우도 있다.

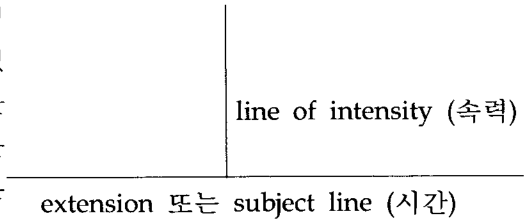
2) 대략 1328년부터 1350년 동안 T. Bradwardine, W. Heytesbury, R. Swineshead, J. Dumbleton이 옥스퍼드의 Merton college에서 역학 특히 운동학의 발달을 주도하였는데, 주로 산술적인 방향으로 논의가 발전되었다.

계 내에서 연속적으로 변하는 현상들이었다.[3] 이 과정에서 속도, 가속도, 변량 등 중요한 개념들이 도입되었고, 운동학과 수학적 사고의 종합이 지배적인 역할을 하였다. 동시에 자연의 양적 법칙이 함수적인 형태의 법칙이 된다는 아이디어가 자연 철학에서 점점 무르익게 되었다(Youschkevitch, 1976, p.45).[4]

N. Oresme는 기하학적인 형태를 통해서 질에서의 변화를 추론하고 비교하였으며, 어떤 질의 성질을 결정하는 양에 대한 '기하학적인 표현(configuration)'을 통해 운동의 특성을 증명하려고 하였다(J J. Roche, 1998; K, Sharon Ann, D.A, 1992; Sierpinska, 1994, p. 39; 유지영, 1987). 즉, 속력에 대한 새로운 아이디어를 시각화하기 위하여 기하학을 사용하였는데, 양과 운동을 기하학적 도형을 통해 나타내는 완벽한 이차원 그래픽 시스템을 발달시켰다. N. Oresme은 '질에 대한 기하학적 표현 이론(the theory of configurations of qualities)', 즉 강도의 uniformity와 difformity에 대한 이론에 관심이 있었으며, 이것은 'latitudes of forms' 이론으로 이어진다.

수(고대 그리스인들처럼 단위들의 집합을 의미한다)를 제외한 잴 수 있는 모든 것들은 연속적인 양을 통해서 생각할 수 있다(N. Oresme, 1958, pp.164-165).

N. Oresme은 형상의 강도를 나타내기 위하여 선분의 길이를 사용하기 시작하였다.[5] 오른쪽 [그림1]과 같이, 수평선은 한 'subject'에 대한 'extension of a quality'을 나타내며, 이 수평선에 대하여 수직선은 'subject'의 다양한 지점에서의 질적인 강도, 즉 수직선의 길이는 질의 강도를 나타낸다. 수평선의 각 지점에 그 점의 질의 강도를 나타내는 수직선이 서 있고, 이들 강도를 나타내는 선 전체의 합은 선형적인 질을 나타내는 기하학적 도형 즉, 면을 이룬다. 이 도형이 질에 대한 '기하학적인 표현(configuration)'이다. 기하학적 도형의 넓이는 질의



[그림 1]

3) Merton 학파의 중요한 결과는 첫째, 순간속력(instantaneous velocity) 개념에 대한 정의이다. 둘째, 일정하게 변하는 속도(uniform acceleration)의 개념에 대한 설명과 평균 속도 정리(Mean speed Theorem)이다(K, Sharon Ann, D.A, 1992, p.24).

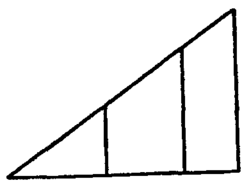
4) 그들은 등속도(uniform velocity), 등가속도(uniform acceleration)를 정의하는데 성공하였고, 순간속력(instantaneous velocity)의 정의를 시도하였다. 그러나 기하학적인 도형을 사용하지 않았으며, 기하학적인 도형을 사용한 것은 20년 후 Oresme와 Casali의 연구에서 나타난다(K, Sharon Ann, D.A, 1992, p.22).

5)이것은 그렇게 아주 새로운 것은 아니었다. 그리스인들은 수를 선분으로 나타내었으며 아리스토텔레스는 duration(계속성)을 나타내는데 사용하였다. 그러나 Oresme은 아리스토텔레스를 따라 수평선(가로선)은 운동의 duration을 나타나는데 사용하였다면, 가로선의 각 점은 운동(속력)의 강도를 나타내는 수직선을 붙이는 데 사용되었다. 따라서 Oresme은 속력함수의 그래프와 매우 유사한 것은 만들었다.(Leigh Atkinson, 2002, p.111)

양을 나타낸다. 이를 운동에 적용하면, 수평선은 시간을 나타내고 수직선은 속도를 나타낸다. 속도가 변하는 운동의 경우 각 수직선은 각 시점에서의 순간 속도를 나타내고 기하학적 도형의 넓이는 전체 이동한 거리를 나타낸다(K, Sharon Ann, D.A, 1992, pp.37-38).

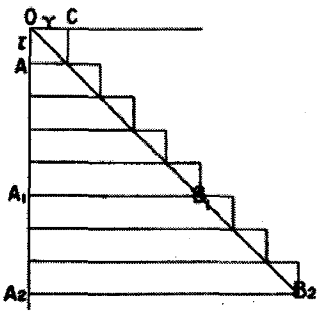
이렇게 14세기에 발전된 이론들은 독립 변량과 종속 변량에 대한 일반적 아이디어를 의식적으로 사용하고 있었다. 비록 이러한 양들에 대한 직접적인 정의는 없었지만, 이것을 나타내는 특별한 용어가 있었다. '질'에 대한 위도(latitude)는 경도(longitude)에 종속적인 변량을 나타내는 일반적인 방식으로 해석될 수 있고, 'line of summit'[6]은 연속적인 함수적 관계에 대한 그래프적 표현이라고 할 수 있다(Youschkevitch, 1976, p.46). 이렇게 함수는 특별한 성질에 대한 언어적 기술이나 그래프에 대한 직접적인 설명을 통해서 정의되었다. 현대적인 관점에서 14세기의 경도와 위도는 각각 x좌표와 y좌표라고 할 수 있다. 그러나 14세기에 사용된 좌표들은 모두 특정 곡선의 점에 관련된 것으로 평면의 임의의 점과 관련된 것이 아니었다(Youschkevitch, 1976, p.47).

또한 N. Oresme은 오른쪽 [그림 2]와 같은 표현을 통해 초기 속력이 0인 등가속도 운동에서 운동거리는 시간의 제곱에 비례하여 증가한다는 것을 보인다. 이렇게 수에 대해 기하학적 방법으로 생각하는 것은 N. Oresme의 그래프가 오늘날 우리가 이해하는 양적 의미의 그래프보다는 질적인 기하학적 표현이나 변화하는 크기 사이의 관계에 대한 모델로 만들었다는 것이다(Sierpinska, 1994, p.40). 그러나 그 당시 이러한 질적 표현을 수치화하기는 어려웠다. 변화를 알기 위해서는 수치화되어야 하는데, 이런 상황에서는 함수 개념 발달이 어렵다고 할 수 있을 것이다.



[그림 2]

1618년 Lssac Beeckman은 물체의 무게와 독립인 경과된 시간과 낙하 거리 사이의 새로운 관계를 증명하였다. 그는 마치 잡아당기는 힘을 가진 것처럼, 물체를 잡아당기는 연속적인 힘을 어림하였다. 각 시간의 구간 τ 후에, 어떤 잡아당기는 힘이 일정한 양 γ 에 의해 속력이 증가한다. 이러한 과정은 오른쪽 [그림 3]의 그래프에 의해 시각화되었고, 시간의 구간 τ 에서 움직인 거리는 대응하는 막대의 넓이에 의해 표현되었다.



[그림 3]

6) 위도(latitude)는 강도를 나타내는 수직선에 해당되며 경도(longitude)는 수평선에 해당된다. 주어진 질에 대한 위도의 위쪽 끝은 강도에 대한 선, 곧 'line of summit'를 이루다.

시간의 구간 τ 의 길이가 0에 가까워질 때, 전체 시간 OA_1에서 OA_2까지 움직인 거리는 삼각형 OA_1B_1과 OA_2B_2의 넓이로 나타난다. 이 거리는 시간의 구간 OA_1과 OA_2에 대한 정사각형에 대해 서로 비례가 된다. Lssac Beeckman는 또한 유사한 양 사이의 비례관계에서 이러한 추론을 사용하였다. 그 시대에는 아직 공식 $s(T)=c \cdot t^2$와 같이 시간과 움직인 거리 사이의 관계를 공식화하지 못하였다. 하지만 N. Oresme과의 차이점은 L. Beekman이 넓이에 대해 이산적인 근사를 사용하였다는 것이다(Doorman, 2005, p.89).

15세기와 16세기 초에 'latitude of forms' 이론과 계산법은 영국, 프랑스, 이태리, 스페인 등에 널리 퍼졌지만, 물리학이나 역학에서의 응용되지 못하였고 인위적으로 제기된 문제들에 한정되었다.[7] 새로운 개념에 의해 제공된 잠재적인 가능성은 수학에서 그리고 응용에서 촉진되지 못하였다. 그 당시 학자들 역시 실질적으로 새로운 계산 기법을 도입하거나 대수, 삼각법, 구적법이나 체적법 등에 대해서도 새로운 내용을 추가하지는 못하였다. 이 시기 기하학적 표시법은 기존의 논의들을 도형을 사용하여 기하학적으로 번역하는 것 이상의 역할을 하기 어려웠다. 가상적이고 사변적인 논의 구조 내에서 기하학적 표현은 매우 제한적인 의미만을 가질 수 밖에 없었다(유지영, 1987, pp.49-50). 물리적 실재성을 가진 것으로 간주되었던 갈릴레오의 표현과는 달리 이 시기의 표현은 단지 논의를 이해하기 쉽고 명확하게 전개해 나가기 위한 논리적 도구였고 분류의 수단이었다. 또한 변화의 법칙이나 함수적인 대응을 표현하는 대수 언어의 부족으로 더 중요한 발달을 이끌어내지 못하였다.

2. 변화에 대한 곡선 표현과 변수의 등장

17세기에는 계산수학의 급속한 발달, 기호적 대수의 발명, 수 개념 확장 등을 통해 함수 개념 발달의 전기가 마련된다. 이들을 통해서 함수 개념이 '양'이 아니라 수들 사이의 관계로서 도입될 수 있었고 함수가 해석적 식으로 다루어질 수 있는 토대가 마련되었다.

17세기가 시작되면서, 물리적 양에 대한 수치 사이의 함수적 관계를 확립함으로써 자연의 양적 법칙에 대한 새로운 개념이 점차 확대되고 더욱 뚜렷하게 되었다. 여기에 열, 압력 등에 대한 양적 측정이 도입되고 측정 장치들이 새롭게 고안되면서 물리적 측정이 보다 광범위하게 된 것이 큰 역할을 하였다. 그 이외에도 동역학, 천체 역

7) A. C. Crombie(1959)는 이에 대하여 '14세기 함수적 관계에 대한 아이디어는 실제적인 측정의 발달 없이 오직 이론적으로만 발달하였다'고 평가한 바 있다(Youschkevitch, 1976, p.49, 재인용).

학 등 새로운 학문 분야가 개척되고 이 분야들에서 제기된 문제들, 곡선 운동과 운동에 영향을 주는 힘들 사이의 관계 등이 주된 문제가 되었고, 이들 문제들은 무한소 해석학의 여러 문제들을 낳기도 하였다.

그 결과 함수가 새로운 방식으로 도입되기에 이른다. 이전에 비해 함수가 언어적 기술을 통해서 소개되거나 그래프를 통해서 혹은 운동학적으로 설명되는 경우가 줄어들었고, 이론적인 연구에서 식이나 방정식을 통해서 함수를 도입하는 방식이 전면에 떠오르게 되었다(Youschkevitch, 1976, p.51). 17세기의 주도적 수학자의 저서를 검토해 보면, 대립적인 두 가지 수학적 사고방식, 즉 과거의 전통적인 기하학적 방법과 새로운 대수적 방법 사이의 갈등이 자주 눈에 띈다. Descartes의 경우도 물론 예외는 아니었다(김용운 & 김용국, 1996, p.256). Fermat와 Descartes는 모두 기하에 새로운 대수를 적용하는 '해석적 방법(analytic method)'을 통해서 함수를 도입하는 방식이 시작되었고 수학에 새로운 시대가 열렸다.

Descartes의 「Geometry」(1637)에는 함수를 해석적으로 도입하는 아이디어가 어떻게 발달하였는지 자세하게 언급되어 있다. Descartes의 가장 큰 목적은 모든 대수적 문제와 방정식의 해를 실근, 즉 적합한 평면 곡선들 사이의 교점의 좌표들을 구성하는 표준 절차로 환원하는 것이었다. 여기에서도 좌표는 선분으로 이해되고 있다. Descartes의「Geometry」에서 좌표는 수가 아닌 선분이었다. 좌표는 곡선에 대한 함수를 만족하는 선분이고 임의의 실수를 가정할 수 있는 변수는 아니었다(Sierpinska, 1994, p. 40).

y축에 대하여 무한히 다양한 변수를 연이어 취하면서 x축에 대하여 무한히 다양한 변수를 발견한다. 그리고 또한 우리가 곡선을 그리는 방법을 통해서 C라고 표시되는 것과 같은 무한한 여러 점들이 있을 것이다(Descartes, 1903, Youschkevitch, 1976, p.52, 재인용).

여기에서 처음으로 x와 y가 명시적으로 변량들 사이의 종속 관계를 설명하기 위한 수단이 되었고, 그래서 하나에 값이 주어지면 그에 해당하는 다른 양의 값을 계산할 수 있게 되었다. 그리고 Descates는 대수적 곡선(즉 기하학적 곡선이라고 불렀던)들의 모임을 분류하였다. 이들 곡선에 .속하는 모든 점들은 직선 위에 있는 모든 점들에 대하여 방정식으로 표현될 수 있는 일정한 관계를 지니고 있다(Youschkevitch, 1976, p.52).

Descartes는 이전의 어느 수학자보다 기호대수에 철저하였고 대수를 기하학적으로 해석하는 것에 철저하였다. Descartes의 대수를 구성하는 기호는 모두 오늘날 우리가 사용하는 기호처럼 보인다. 그런데 여기에 중요한 관점의 차이가 있다. 우리는 기지량과 미지량을 수로 보고 있으나 Descartes는 이것을 선분으로 간주하였다. Descartes는

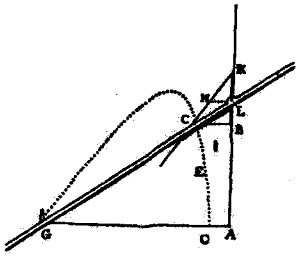
그리스 전통으로부터 본질적인 점에서 한 가지는 벗어나 있었는데, 예를 들어 x^2 과 y^2을 넓이와 부피로 보는 대신에 선분으로 해석하였다. 동차성의 원리를 포기하였으나 기하학적 의미는 유지하였다. 결국 Descartes는 a^2b^2-b와 같은 식을 쓸 수 있었다. Descartes는 이 식에 대해서 '양 a^2b^2은 단위(곧, 단위선분)로 이미 한 번 나누어 놓은 양, b는 단위를 두 번 곱해 놓은 양(이렇게 함으로써 두 양의 차수를 삼차로 일치시킴)으로 생각해야 한다'고 설명하고 있다. 이것을 보면 Descartes는 형식상의 동차성을 사고의 동차성으로 바꾸었다는 점을 알 수 있다. 이 점은 Descartes의 기하학적 대수를 더욱 융통성 있게 하였다. 그래서 오늘날 정사각형을 머릿속에 떠올리지 않고 xx를 'x의 제곱'이라 읽는다(Boyer, 2000, pp.549-550).

다음은 「Geometry」 제 2권에[8] 나오는 '모든 곡선을 몇 개의 류(類)로 나누고, 그 모든 점이 직선의 점에 대해서 갖는 관계를 아는 방법'이라는 예이다. 여기에서 두 개의 부정량으로서 좌표의 아이디어와 명확하지는 않지만 함수 개념의 아이디어를 엿볼 수 있다.

…지금, G는 정점, AK는 정직선, 그리고 자 GL은 L에서 고리가 달린 자이고, L은 직선 AK위를 움직이도록 되어 있다고 하자. 또 삼각형 KNL은 일정한 삼각형이고, 변 KL은 항상 직선 AK 위에 있다. 그러면 G 주위에 자 GL을 회전시킬 때, 이 자와 변 KN의 연장과의 교점 C는 어떤 곡선을 그리는가? 또 이 곡선은 어떤 류에 속하는가?

이것을 알기 위해서는 가령 AB와 같은 직선을 택하여 곡선상의 모든 점을 이것과 관련짓게 한다. … 점 G로부터 직선에 수선을 내렸을 때의 발을 A라 하고, 직선 AB 위의 점과 곡선 CE의 점 사이의 관계를 정하여 보자. 이 때 A로부터 고찰을 시작하기로 한다. 곡선 위의 점 C로부터 GA에 평행하게 CB를 그으면 CB와 BA는 부정(不定)이자 미지인 두 양이다. AB를 x, CB를 y라고 부르자. 또 NL을 c라고 이름 짓는다. 이 곡선을 결정하는 기지량으로서 GA를 a, KL를 b라고 이름 짓는다. 따라서 NL과 LK의 비는 c와 b의 비와 같고, 그것은 CB, 즉 y와 BK의 비는 같다. 그러므로 BK는 $\frac{b}{c}y$와 같다. … 여기서 곡선 EC는 제 1류에 속한다는 것을 알 수 있다. 그리고 실제로 이 곡선은 쌍곡선이다.

8) 「The Geometry」 (1637), translated from the French and Latin by David Engene Smith and Marcia L. Lathan, p.320, Dover Publications, Inc.



[그림 4]

위의 설명에서 보면, 두 개의 부정량 x, y로서 좌표의 생각이 분명하게 나타나고 있지만, '좌표'라는 용어를 사용하고 있지 않다. Descartes는 x, y의 쌍 (x, y)에 의해서 곡선 CE의 점이 정해진다는 것보다도 x와 y 사이의 관계 쪽에 중점을 둔 것으로 보인다. 즉 명확하게 자각된 것은 아니지만 함수개념의 기본사상을 여기서 볼 수 있다(김용운 & 김용국, 1996, pp.265-266).

좌표를 도입함으로써 대수학과 기하학을 결합시킨 해석기하학의 탄생에는 Fermat도 기여하였다. Fermat는 기하학에 당시의 해석학인 급수의 이론이나 미분의 생각을 도입하여 기하학으로 다룰 수 있는 수학의 영역을 넓혔고, 해석기하학의 한 분과인 미분기하학을 개척한 선구자이기도 하다. Fermat는 「Introduction to plane and solid loci」(1637년 이전 작성, 1679 출판)에서 다음과 같이 말하고 있다.

두 미지의 양이 마지막 방정식에 나타나면, 자취가 있고 두 양 중 하나의 끝점은 직선 혹은 곡선을 그려낸다.

여기에서 독립 변수와 함수 모두 미지의 양이라고 불리고 있으며 이들은 각각 연속적으로 변하는 길이의 선분을 의미한다(Youschkevitch, 1976, p.52). 그리고 일차 방정식의 간단한 경우부터 설명하기 시작하고 좌표의 원점을 지나는 직선의 방정식은 $dx = dy$ 임을 설명하고 있다.9)

Descartes와 Fermat의 시대부터 함수적 사고는 수학 연구에서 널리 사용된다. 그러나 초기 해석적으로 표현될 수 있는 함수는 대수적 함수에 한정되었다. Descares는 자신의 기하학에서 analytic Method로 다룰 수 없었던 역학적 곡선들을 모두 배제하였다.

Descartes와 Fermat의 중요한 차이점은 Fermat가 전통의 입장을 고수한 반면, Descartes는 새로운 전통을 창조하였다는 것이다. Descartes가 고안한 분류법은 기하학이 이미 그 실재성을 상실하고 추상화 · 대수화되고 있다. 이 대수화 — 대수학의

9) 이것은 원점을 지나는 직선이 아니고 원점에서 시작하는 반직선이다. 왜냐하면 Fermat도 Descartes와 마찬가지로 음의 가로좌표를 사용하지 않았기 때문이다(Boyer, 2000, p.563).

일반화 ―는 어떤 특정한 해석기하학이 아니라 '일반'의 해석기하학, 즉 해석기하학의 원리의 확립을 뜻한다. 이와는 대조적으로 Fermat는 고대 이래 곡선분류법을 지키고 있었다. Descartes의 '대수의 기하학'에서는 수의 비연속적 성격(대수)과 도형의 연속적 성격(기하학)이 융합을 이루고 있다. 이것이 해석기하학의 본질이며, 이것을 가능하게 한 것이 Descartes가 이룩한 대수학의 변혁이다.

현재 일반적으로 해석기하학에서 x축과 y축을 잡아, y를 변수 x의 함수 값, 즉 $y=f(x)$로 나타내는 것이 관례가 되었다. 이러한 좌표축이나 함수 등의 개념이 형성되는 것은 정확히 말해서 Leibniz 이후의 일이다. 따라서 Descartes 기하학에는 아직 이들 개념이 명확한 형태로 나타나지 않았지만, 원리적으로 다루어졌다는 것을 알 수 있다. 이 중에서 함수의 개념은 특히 중요하다. 일반적으로 변수 x에 대한 함수 값 y라고 할 때, 이것은 y가 x의 변화에 따른 '작용'의 총체(總體)로 간주된다는 것을 뜻하며, 이 y의 변동 전체가 도형을 형성한다. 이 변동의 기하학이 해석기하학의 기본 원리인 것이다. 또한 Descartes는 컴퍼스와 자만을 그려지는 도형이 아니라 기구를 자유로이 사용하여 보다 복잡한 곡선에 도전하였다. 이 곡선의 동적인 추구를 통해 그는 동적인 도형과 수의 대응, 기하학과 대수학의 결합을 이룩하였다. 반면 Fermat는 그리스 이래의 전통적 사고에 집착하여 원리적으로는 해석기하학을 파악하면서도 일반화에는 실패하였다(김용운, 김용국, 1996. p. 282-285). 그러나 이 시기 새로운 해석 기하 뿐 아니라 변수 개념과 그것을 통한 함수 개념의 도입은 수학의 큰 발전의 원동력이 된다.

3. 동역학적-기하학적 해석의 광범위한 계산체계로의 통합

17세기를 기하학과 대수학이 결합되었던 시대로 Descartes에 기인하는 해석기하학은 기하학적인 문제를 해결하는 데 있어서 그 이전의 어느 방법보다 간편하다는 것이 입증되었다. 해석기하학적 형태의 대수학과 기하학의 결합에서 가장 핵심적인 요소는 변수의 도입과 방정식에 의한 변수 사이의 관련성의 표현이었다. 그 결과 수 많은 곡선이 방정식으로 표현될 수 있었다. 그러나 이러한 방정식에서는 아직 종속변수와 독립변수를 명확히 구별하지 않았다(I. Kleiner, 1989, p. 283).

17세기 중반 이후 Mengoli, Mercator, Newton 등에 의해서 당시에 다루었던 모든 함수적 관계들을 해석적으로 다룰 수 있게 되었는데, 여기에서 사용된 핵심적인 기법이 함수를 무한 멱급수로 전개하는 것이다. 함수를 무한 식으로 나타내는 다른 방법들, 연분수, 무한 곱 등은 나중에 등장한 것들이다. 무한 식이 함수가 된다는 아이디어 자체는 새로운 것이 아니었다. 감소하는 무한 등비수열은 이미 오래전부터 알려져

있었다. 그러나 17세기 후반에서야 멱급수는 모든 함수나 해석적 식을 연구하는데 보편적인 수단이 되었다. 멱급수에 의해서 함수의 해석적 식으로의 개념화가 해석학에서 중심적 위치를 차지하게 되었던 것이다(Youschkevitch, 1976, pp.53-54).

특히 Newton은 함수에 대한 동역학적-기하학적 해석이 두드러지는 수학자였다. Newton은 그의 스승 Barrow에게서 물려받은 개념을 보다 발전시켜 시간과 운동 개념, 그리고 이들의 기하학적 표현 문제를 다루었다. Barrow처럼 Newton은 시간을 보편적 독립변수로 선택하였고 종속변수들은 변화에 속도가 있는 연속적으로 움직이는 양으로 해석하였다. 그러나 Newton의 개념은 곧 추상적인 방향으로 변화하였다. Newton은 독립변수의 역할을 하는 것을 'flune'라고 불렀고, 종속 변수를 'related(relata)'라고 불렀다. 즉, 처음에는 운동학적으로 도입된 '유율법(Method of fluxion)'이 유한 혹은 무한 멱급수를 통해 해석적으로 표현된 '유량(fluent)'으로 발달하게 되었다.

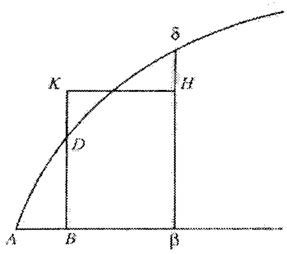
곡선을 동점의 궤도로 간주하고 동점의 운동을 통해서 곡선의 성질을 규명하는 Barrow의 아이디어는 Newton의 의해 대수적인 성격으로 변형된다. 고대 그리스의 전통을 존중하였던 Barrow는 당시 비약적인 발달을 하고 있는 대수보다는 기하학을 우선시하였다. 이에 비하여 Viete와 Descartes 등을 읽으면서 수학을 공부하기 시작한 Newton은 대수를 적극적으로 수용하였다. Newton은 Descartes의 방식을 따라 곡선을 *좌표체계*와 *관련지으면서* 동점의 수직방향, 수평방향 운동을 대수적으로 표현하였다. 이러한 시도는 Newton이 유율법(method of fluxion)을 고안하는 계기가 된다.

물리적 운동에 대한 직관에 호소한 Barrow와 달리 Newton은 운동을 x와 y 등과 같은 문자에 대한 조작으로 변환하였다. 여기서 주의해야 할 것은 이들이 '수'가 아니라 '양'이라는 점이다. 점의 운동이 선을 만들고, 선의 운동이 면을 만드는 것처럼 이들 양은 운동에 의해 형성된다. Newton은 이러한 양들을 유량(fluent)라고 불렀고, 이들 유량들의 순간적인 속도를 유율(fluxion)이라고 불렀다.

[나는] 양들이 움직이는 물체가 지나가는 공간처럼 연속적으로 증가하여 생성되는 것으로 간주하겠다. … 이들을 유량이라고 부르고, 알파벳의 끝 v, x, y, z로 표시하겠다. 이들을 생성하는 운동에 의해 이들이 증가하고 유동하는 속도를 (유율이라 부르고) $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$로 표시하겠다. 즉 양 v의 속도를 $\dot{v}$라고 하겠다(Tractatus De methodis serierum et fluxionum, 1670-1671, p.73).

다음 [그림 5]의 곡선 $AD\delta$ 를 나타내는 방정식이 $x^{1/2}=y$라고 할 때, 방정식에 나타나는 x와 y는 지금의 좌표와 같이 선분의 길이를 나타내는 수가 아니라, 곡선을 따라 변화하는 선분 AB와 BD를 나타낸다고 하는 것이 더 적합하다는 것이다.

이렇게 Galileo와 Barrow의 수평방향의 등속 운동이나 낙하 운동과 같이 물리적인 의미가 강한 운동이 Newton에게 (기하학적) 양의 변화로 추상화되었다. 그에 맞추어서 유량들 속도 사이의 관계를 찾는 방법도 매우 형식화되었다. Newton은 유량들 사이의 관계를 제시한 방정식에서 유율 사이의 관계식을 이끌어내는 방법을 다음과 같이 제시하였다.



[그림 5]

유량 x와 y 사이의 관계가 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$이라면, 먼저 x에 대하여 그리고 y에 대하여 식을 배열하고 다음과 같이 곱하겠다. 이들의 합은 $3\dot{x}x^2-2\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$이 되고, 이것이 유율 $\dot{x}$와 $\dot{y}$ 사이의 관계를 제시하는 방정식이다(Tractatus De methodis serierum et fluxionum, 1670-1671, p.75).

Multiply	x^3	$-ax^2+axy$	$-y^3$		Mult.	$-y^3+axy\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$		
by	$\frac{3\dot{x}}{x}$.	$\frac{2\dot{x}}{x}$.	$\frac{\dot{x}}{x}$.	0.	by	$\frac{3\dot{y}}{y}$.	$\frac{\dot{y}}{y}$.	0.
there comes	$3\dot{x}x^2-2\dot{x}ax+\dot{x}ay$			*.	comes	$-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x$		*.

[그림 6]

이 알고리즘은 연속적인 운동에 의해 생성된 양의 관념을 광범위한 계산 체계로 통합한다.

Newton은 「Principia」에서 변수라는 용어를 사용하고 있지 않지만, 다음에서 변화하는 양으로서 변수 개념이 암시되어 있다고 볼 수 있다.

이제 나는 점차적으로 그리고 끊임없이 증가하는 것으로 생각되는 양을 유량 또는 변량이라 하겠다.

오늘날 Newton의 유율법은 연속함수의 이론으로 불릴 수 있다(Hamley, 1934, p.9).

Leibniz는 곡선의 기하학에서 비롯된 미적분 개념을 발달시켰다. Leibniz는 곡선의 세로 좌표의 differential(dy)을 그것과 가로 좌표의 임의의 증분 dx와의 비가 접선영에 대한 세로 좌표의 비가 같은 선분으로 설명하였다.

'함수'라는 말은 Leibniz의 1673년 논문 「The inverse method of tangents, or about functions」에서 처음 나타난다. '세로 좌표 ED와 가로 좌표 AE 사이의 관계는 우리에게 알려진 어떤 방정식을 통해 제시된다'고 한 후 곡선의 접선에 대하여 주어

진 성질로부터 가로 좌표를 결정하는 혹은 '주어진 도형에서 어떤 임무를 수행하는 다른 종류의 직선들'[10]을 결정하는 문제에 대하여 논의하였다. 라틴어 fungor, functus, fungi 등은 임무를 수행한다는 것을 의미한다. Leibniz는 고정된 한 점과 주어진 곡선의 점들에 대응하는 직선들의 일부분을 'function'이라고 불렀다. 가로 좌표, 세로 좌표, 좌표축에 의해 잘려진 접선이나 법선의 한 부분, 접선영이나 법선영의 한 부분 등이 여기에 해당한다. Leibniz는 곡선에 대해 어떤 기능을 수행하는 선분을 단순히 'function'이라고 부른 것이다. 그는 어떤 기능을 수행하는 선분 사이의 관계보다는 선분 그 자체에 관심을 가진다.

그럼에도 함수 개념의 싹은 Leibniz로부터 비롯되었다고 볼 수 있다. 함수 개념은 처음에는 접선, 접선영 등의 기하학적인 양을 뜻하였으나, 이러한 양들 사이의 관계로 바뀌게 되고, '변량 x의 함수란 x와 상수가 어떠한 방식으로 구성된 양'이라는 생각으로 발전하게 된다(이종희, 1999, p.141).

함수 개념이 완전히 인식되기 전인 17세기에 소개된 대부분의 함수는 처음에 곡선으로 연구되었다. 그러나 중요한 점은 그러한 곡선은, 기준이 되는 양에 대해 기준이 되지 않는 다른 어떤 양의 '변화'를 기술하기 위한 것이라는 점이다. Galileo의 낙체운동의 법칙에서는 시간은 기준이 되는 양이며, 거리는 기준이 되지 않는 양이다. 이는 '시간에 따른 거리의 변화'로서 시간과 동시에 변화하는 양으로서 거리를 생각하는 것이다. 그 후 점차 이러한 곡선에 의해 표현되는 여러 가지 유형의 함수에 대한 용어와 기호가 도입되게 된다(M. Klein, 1972, pp.335-340). 미적분학의 창시자로 알려진 Newton과 Leibniz는 기하학적이고 운동학적인 양 사이의 함수 관계에 대해서이다. 그러나 양 사이의 함수 관계를 명확히 하고 이를 기호로 나타내게 된 것은 이후의 일이다. 이후 곡선과 결부된 함수를 나타내는 방정식이 점점 강조되었고, 따라서 본래의 곡선과는 무관하게 단지 곡선을 나타내는 방정식에 등장하는 기호의 역할 및 그러한 기호 사이에 성립하는 관계가 주목받았다.

J. Bernoulli와 Leibniz가 서로 주고받은 1694년과 1698년 사이의 편지는 특정 변수에 의존하는 임의의 양을 나타낼 수 있는 일반적 용어에 대한 필요가 어떻게 해석적 식의 의미에서 함수라는 용어를 사용하는 것에 이르게 되었는지를 보여준다.

4. 임의의 해석적인 식으로서의 함수 개념 그리고 종속과 대응

Johann. Bernoulli가 1694년부터 1698년 사이 Leibniz와 주고받은 편지에서, 식과 방

10) Sierpinska(1994)는 함수를 이해하는 데 있어서 곡선 위의 점의 좌표와 곡선에 어떤 기능을 수행하는 선분(lines fulfilling some function for the curve) 사이의 구분이 필요하다고 말하고 있다.

정식에서 '함수'라는 용어는 어떤 '종속' 특히, '어떤 양과 다른 한 양의 종속'을 나타내는 일반적인 용어로서의 의미를 가지게 되었다(I. Kleiner, 1989, p.284). 1694년 Johann Bernoulli는 Leibniz에게 보내는 편지에서 $\int ndz$를 무한 급수

$$nz - \frac{1}{1 \cdot 2} z \cdot z \cdot \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \cdots$$

로 전개하는 방법을 설명하면서 n의 의미를 다음과 같이 설명하였다.

n은 결정되지 않은 [양]과 고정된 [양]으로부터 어떤 방식으로 형성된 양을 의미한다.

같은 해, 동일한 말로 표현된 것이 Bernoulli의 논문(1742) 「Acta Eruditorum」에서 나타나지만, 아직 함수라는 용어가 사용되지는 않았다. 1698년 Jabkob 형제가 제기한 등주 문제(isoperimetry problem)에 대한 해답을 논의한 논문에서 Bernoulli는 함수라는 단어를 처음으로 사용하였다.(Youschkevitch, 1976, pp.56-57). 여기에서 Bernoulli는 '어떤(some)'의 의미를 설명하지는 않았지만, 당시에 사용되고 있는 대수적 식 이외의 것을 의미한다고 하기 어려우며, 이러한 정의는 함수에 대한 최초의 형식적인 정의라고 평가할 수 있을 것이다(Youschkevitch, 1976, p.58, I. Kleiner, 1989, p. 284).[11)]

1718년 Bernoulli는 함수를 해석적 식으로 명확하게 정의한 논문[12)]을 발표하였다. 여기서 함수의 용어로서 그리스 문자 φ를 사용하여 φx 라고 썼다(Youschkevitch, 1976, p.60).[13)]

해석학의 아이디어가 변수와 함수의 보편 과학으로 정립된 것은 Euler에 의해서이다. 함수 개념의 본질적인 발달은 Euler의 1748년 「Introductio in analysin infinitorum」 1권의 영향을 크게 받는다. Euler는 함수 개념을 해석학에 적극적으로 도입하였다. Euler는 「Introductio in analysin infinitorum」 2절에서 처음으로 변량을 정의하고 4절에서 함수 개념을 도입하는데, 함수 개념은 변량을 전제로 한다. Euler는 변량 $x, y, \ldots.$를 처음부터 고려하였고, 그 다음 이 양들을 관련짓는 해석적인 식을 고

11) Bernoulli의 정의에서는 독립변수로부터 어떻게 함수를 구성할 수 있는지에 대한 논의가 제시되지 않았다. 그러나 그가 실제로 의미한 것은 해석적 식이었다는 것이 분명하다. 그리고 이것이 당시의 무한소 해석학에 발전 방향에 부합하는 것이기도 하다(Youschkevitch, 1976, p.60).

12) Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopèrimètres

13) 함수에 대해 f 뿐 만 아니라 괄호를 사용한 것은 Euler로서 1740년에 출판된 논문에서 사용하였다.

려하였다.

변수 관념은 역사적으로 여러 가지 기하학적인 양으로부터 나왔다. 17세기, 곡선은 해석학에서 연구의 기본적인 대상이었고, 곡선에서 변하는 점으로부터 정의되는 변화하는 여러 기하학적 양 사이의 구체화된 관계였다. 따라서 기하적 양은 선분이나 곡선과 관련하여 ordinate, abscissa, 호의 길이, subtangent, normal, 곡선과 축 사이의 면적 등과 같은 다른 기하적 대상들이었다. 미적분의 초기 연구에서, 해석학은 곡선을 연구하기 위한 도구였고, 변수는 단순히 문자 $x, y, \ldots.$ 이 나타내는 선분으로 간주되었다. Euler는 기하학을 지시하지 않으려고 하였기 때문에 추상적이거나 보편적인 양에 대한 관념에 호소하였다. Introductio in analysin infinitorum 」에 다음과 같이 정의한다.

일정한 양은 항상 같은 값을 유지하는 확정량(determinate quantity, 기지의 양)이다. 변량은 모든 확정 량을 포함하는 불확정적인 또는 보편적인 양이다.

그러므로 변량은 보편적이거나 추상적인 양으로 이해되었다. 이것은 변량이 주어진 곡선의 길이와 같이 특별한 기하학적인 양이 아니라, 일반적인 기하학적 양을 지시한다는 것을 의미한다. 또한 Euler에 따르면 '변량은 양수와 음수, 정수와 유리수, 유리수와 복소수, 초월수 등 절대적으로 모든 수를 포함하고 심지어 0 과 복소수도 변량의 의미에서 제외되지 않는다' 고 하였다(Youschkevitch, 1976, p.62). 그리고 변수에는 양적인 특성, 즉 증가하거나 감소할 수 있는 가능성이 있었다. 이러한 이유 때문에 변수에 대한 18세기의 통상적인 정의에는 이러한 특징이 강조되었다.[14]

Euler의 함수 개념에서 중요한 점은 하나의 추상적인 양의 값과 그 양에 대해 다른 특정한 성질이 결정되는 한, 그 양은 하나의 변수였다는 것이다. 결과적으로 어떤 변수들로 이루어진 하나의 함수를 검토하자면, 이 변수가 함수에 포함되는 방식만을 즉, 그 변수가 그 자신이나 다른 변수들과 어떻게 결합되는지 만을 생각하게 된다(Ferraro, 2000, p.108-109). 하나의 추상적인 양은 그것의 특별한 내용이 아니라 '다른 추상적인 양들과의 연산 관계로 간단하게 특징지어 진다'(Panza, 1996, p. 241).

함수의 정의에 있어서, Euler는 스승이었던 Johann Bernoulli의 정의를 따르는데, 여기에서 '양'은 '해석적 식'으로 변하게 된다(Youschkevitch, 1976, p.61).

한 변량에 대한 함수는 어떠한 방식으로든 이 변량과 수 혹은 상수로 이루어진 해석적 식이다.(1748, §.4)

14) 예를 들어, Lacroix는 "값이 변하는 것으로 또는 변화 가능한 것으로서의 양은 변수가 된다고 말하고, 상수라는 이름은 계산하는 동안 항상 그 값을 유지하는 양에게 부여한다"고 말한다. Institutiones calculi differentalis 서문에서 Euler는 이러한 형태의 단순한 정의를 부여하는 것을 선호하였다.

이 정의는 그의 초기 논문에서 나타난, 급수에 대한 일반항에 대한 정의로부터 예견되었다.

일반항은 일정한 양이나 항의 순서를 부여하는 n과 같은 다른 양으로 구성된 식이다. 따라서 3항을 원한다면, 3을 n의 자리에 넣을 수 있다.(1730, §.4)

해석적인 식 또는 공식이 앞의 정의에서 중요한 역할을 한다. Euler는 함수를 해석적으로 표현하는 다양한 방법을 모두 열거하는 것이 불가능하다고 생각하였기 때문에, 함수의 해석적 식이 $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$ 형태의 무한 멱급수로 표현될 수 있다고 생각하였다.[15] 그러나 Euler는 z의 자연수 형태의 거듭제곱 꼴만 가능한 것이 아니라 임의의 수가 지수로 가능하다고 설명하였다. 따라서 어떠한 함수 z는 다음과 같은 형태의 무한 식으로 변형될 수 있다는 의심이 없어지게 되었다.

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\cdots, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ 는 지수}$$

실제로 Euler의 시대에 해석학에서 다루었던 대다수 함수들은 이 정의에 해당하였으며, 특별한 경우 독립변수의 분리된 값들을 제외하고는 모두 독립 변수의 분수 혹은 음의 거듭제곱을 포함하고 있는 항들로 이루어진 급수로 전개될 수 있었다. 멱급수와 부분 분수 형태의 전개, 연분수 등이 「Introductio in analysin infinitorum」 1권에서 기초적인 함수를 연구하는데 사용한 주된 도구였다. 멱급수를 바탕으로 한 J. Bernoulli와 Euler의 함수에 대한 해석적 식의 정의는 Lagrange에 이르기까지 많은 수학자들에게 수용되었던 가장 일반적인 형태였다(Youschkevitch, 1976, pp.62-63).

그러나 Euler가 정의한 함수는 순수하게 해석적인 식으로만 한정될 수는 없다. 예를 들어(14, §. 46), Euler는 $z=\dfrac{1-x}{1+x}$로 치환함으로써 해석적인 식 $y=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$을 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$으로 변형하였다. 하지만 Euler는 이것을 단순히 해석적인 식의 변형으로만 보지 않았다. 그는 수의 쌍 사이의 대응으로 설명할 필요성을 느꼈다(Ferraro, 2000, p.110).

x에 어떤 확정된 값을 부여한다면, z와 y의 확정된 값을 발견하게 된다. 따라서 z에 대응하는 y의 값을 얻고, 동시에 z를 이끌어 낸다. $x=\dfrac{1}{2}$이면 $z=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{4}{5}$이기 때문

15) 모든 함수가 이러한 급수로 전개될 수 있다는 것을 증명할 수 없었던 Euler는 '… 의심할 경우, 그 의심은 몇몇 함수를 전개해보면 바로 사라질 것이다'(Youschkevitch, 1976, p.62, 재인용)라고 주장하였다.

에, $\frac{1-zz}{1+zz}$에 $z=\frac{1}{3}$을 넣으면, y는 이 식과 같으므로 $y=\frac{4}{5}$를 찾는다([1748, §. 46]).

이 예는 대응이나 함수적 관계의 아이디어가 해석적인 식 이면에 숨어있음을 보여준다. Euler는 「Introductio in analysin infinitorum」에서 함수에 대해 §.77에서는 변수들 사이의 '종속'에 대해 말하고, §. 78에서는 해석적인 식으로서 여러 개의 변수에 대해 말하고 있다.[16] Ferraro(2000)에 따르면, 이것은 모순으로 보이지만, 단지 외견상으로만 모순으로 보이는 것이다. Euler의 함수 개념은 실제적으로 종속이라는 아이디어 즉, 변수들 사이의 관계와 해석적인 식이라는 아이디어를 모두 포함하고 있다. 종속이나 관계는 비-해석적이고, 직관적인 함수 개념의 수준이며, 적당한 기호 또는 해석적인 식이 함수적 관계라는 직관적인 개념을 해석적으로 만드는 수준이 있다. §. 77은 함수 개념, 함수적 관계에 대한 전자의 수준을, §. 78은 후자의 수준을 가리키는 것이다. Euler의 함수에 대한 두 가지 정의는 서로 대조되는 것이 아니라 밀접하게 엮어져 있다고 볼 수 있다. 하나의 식은 함수적 관계를 구체화하기 때문에 하나의 함수였고, 반대로 하나의 함수적 관계가 식으로 표현되는 한, 그것은 미적분학의 연구 대상될 수 있었다.

Euler의 함수 개념은 수학의 전체 발달에 매우 긍정적인 영향을 주었다. 무엇보다도, 멱급수에 의해 표현된 해석 함수들, 즉 연속 함수의 류(類)에 대한 분리와 이러한 류의 주된 특성에 대한 발견이었다. 이러한 특성 이외에, Euler는 해석적인 함수의 다른 근본적인 특성을 결정하였고 이에 따라 해석함수가 구를 무한히 작은 도형의 유사성을 보전하면서, 평면으로 사상한다는 것을 보였다. 사상은 이와 같이 기하학적 기원을 갖는 개념으로 집합론의 중요한 도구가 되었고 위상수학에서 중요한 연구대상이 되었다.[17]

이 시기 함수가 대수적으로 조작 가능함에 따라 주된 조작성으로 '합성'과 '역함수

16) §. 77. 지금까지 우리는 한 개의 변량 이상을 검토했지만, 그 각각의 변량들은 꼭 한 개의 변수로 이루어진 함수이며, 한 변수의 값이 일단 결정되면 나머지는 자동적으로 동시에 결정되게끔 그 변량들은 연결되어 있다. 이제 우리는 서로 종속되지 않는 특정한 변량들을 고찰할 것이다. 이들 변수 중 한 개에 결정된 값을 주면 나머지 변수는 비결정적이고 변화하는 채로 남게 된다. 그러한 변수들은 결정된 모든 값으로 이루어져 있기 때문에 그러한 변수들을 x,y,z 으로 표시하는 것이 편리하다. 이 변수들을 서로 비교한다면, 그 변수들 중 한 개의 임의의 값을 z와 같은 것으로 바꾸는 것이 정당하며 또한 x,y등 나머지 변수는 그 이전과 같이 완전하게 독립적으로 남아있기 때문에, 그것들은 완전히 서로 연결되어 있지 않을 것이다. 이것이 종속적인 변량과 독립적인 변량 사이의 차이이다. 전자의 경우에 우리가 한 개를 결정하면 나머지 변량 모두가 결정된다. 후자의 경우에는 한 변수의 결정이 결코 다른 변수의 의미를 제한하지 않는다.

§. 78. 그러므로 두 개 또는 그 이상의 변량 x,y,z로 이루어진 하나의 함수는 어떠한 방식으로든지 이러한 양으로 구성된 식이다.

17) 함수와 사상이란 두 줄기가 통합된 것은 20세기에 들어와서이다(우정호, 1999, p.359).

구하기'가 포함되었다. 예컨데, x와 y, y와 z 사이의 종속에서 x와 z의 종속을 이끌어 내는 것은 함수의 합성을 의미하며, 또 x와 y 사이의 종속에서 x로부터 y로 독립변수를 바꾸어 선택하는 것은, x에서 y로의 역함수를 구하는 것을 의미하는 것이었다. 그리하여 이전에는 알 수 없었던 새로운 함수들이 등장하였고, 동시에 함수의 새로운 세계를 열게 되었다(Freudenthal, 1983, pp.522-523; 박교식, 1992, p.124, 재인용). 19세기 해석 함수의 일반적인 이론은 Cauchy, Riemann, Weierstrass에 의해 세 방향으로 발달하는데, 그 근원은 Euler와 D'Alembert의 연구에 있다고 할 수 있다.

5. Euler 이후의 함수 개념; Fourier, Dirichlet, Cauchy

해석적 식으로서의 함수 개념이 그 이상으로 확대될 필요성은 변수 사이의 관계의 모임에서 일반적인 정리를 공식화하고 특정한 함수에 대해 얻어진 결과를 조직하는 과정에서 나타난다. 이러한 과정은 Euler, d'Alembert, Bernoulli의 진동하는 현 문제에 대한 논쟁에서 시작되어 Fourier에 의한 삼각함수 급수 이론의 발달, Cauchy, Dirichlet, Abel, Bolzano, Weierstrass, 그리고 다른 사람들의 연속함수에 대한 논쟁에서 계속 되었다.

진동하는 현 문제는 양 끝점이 고정된 끈을 잡아다녀 최초의 모습을 만든 후, 잡았던 끈을 놓으면 그 끈이 진동하기 시작하여 최초 모습으로부터 다른 모습으로 변하게 된다. 이때 시간 t 에서 바뀐 끈의 모습을 나타내는 함수를 찾는 문제이다. 여기에는 '만약 두 해석적 식이 어떤 구간에서 일치한다면 둘은 항상 일치한다'는 18세기 수학의 신조가 있었다. 즉, 이 관점에 의하면 주어진 해석적 식에 의해 주어진 곡선의 전체가 곡선의 작은 부분에 의하여 결정된다. 여기에는 해석적 식에 나타나는 독립 변수가 제한 없이 실수 전체를 범위로 가진다는 것을 암묵적으로 가정한다(Kleiner, 1989, p.285). 진동하는 현 문제를 통해, 함수 개념의 중요한 전기가 마련되는데, (a) 다른 구간에서 다른 해석적 식에 의해 정의된 함수들, (b) 해석적 식의 조합에 의해 결정되지 않을 수도 있는 자유롭게 그린 함수까지 함수개념을 확장시키게 된다. 그리고 Euler의 함수의 정의(1755)에서 '해석적인 식'이라는 용어가 사라지게 된다(Kleiner, 1989, p.288).

1807년 파리 아카데미에 제출된 열전도에 대한 Fourier의 논문[18]은 함수 개념의 발달에 획기적인 전기를 마련하였다. Fourier의 발표는 18세기 수학의 중요한 전제들을 허무는 것이었다. Euler와 Lagrange는 이러한 결과가 특정한 함수에서 성립한다는 것을 알고 있었지만, Fourier는 이것이 모든 함수에 대해 성립한다고 주장하였다.

18) 구간 $(-l,l)$에서 정의된 임의의 함수 $f(x)$는 사인 함수와 코사인 함수의 급수로 표현될 수 있다.

Fourier의 주장은 오늘날의 기준에서 볼 때에는 모호한 방법을 사용하였지만, 오히려 그로 인해 중요한 결과를 낳게 되었다. Fourier의 연구로 인해 함수의 해석적(대수적) 표현은 적어도 함수의 (곡선으로서의) 기하학적 표현과 동일한 지위에 오르게 되었다 (Kleiner, 1989, p.289-290).

그 후 Dirichlet는 Fourier의 시도를 수학적으로 타당하게 만들었다. 물론 모든 함수가 Fourier 급수로 표현가능하다는 것은 틀린 주장이지만, 1829년 논문에서 Dirichlet는 표현 가능성에 대한 충분조건을 제시하였다.[19](Kleiner, 1989, p.290) Cauchy는 함수의 연속성, 미분 가능성, 적분 가능성을 극한을 통하여 엄밀하게 정의하였다. 연속성에 대한 논의에서 Cauchy는 "연속"과 "불연속"에 대한 Euler적 개념을 비판하였다. 그는 Euler적인 의미에서 불연속인 함수가 실은 연속인 함수가 될 수 있는 상황을 제시하였다.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

이 함수 $f(x) = \sqrt{x^2}$과 같기 때문에 Euler적인 의미에서 연속이면서 동시에 불연속이게 된다. 이러한 역설적인 상황에서 Cauchy는 자신의 연속에 대한 정의에서는 그러한 일이 생길 수가 없다고 주장하였다. Cauchy의 연속에 대한 정의는 이전의 수학자와 크게 다르지는 않았다.

변량들이 서로 관련되어 있어서 변량들 중에 하나에 값이 주어졌을 때 다른 변량들의 값을 추리할 수 있을 때, 우리는 이 변량들이 독립 변수라고 부르는 이들 중 한 변량에 의해 표 될 수 있고 독립 변수에 의해 표현되는 나머지 변량들이 이 변량에 대한 함수가 된다고 한 다.

비록 Cauchy는 함수에 대한 다소 일반적인 정의를 제시하였지만, 정의 뒤에 제시된 언급은 그가 보다 제한된 것을 의미하였다는 것을 시사한다(Kleiner, 1989, p.291).

Dirichlet는 Fourier 급수와 그 급수의 수렴 조건을 찾는 연구를 통해서, 1837년 함수의 일반적 정의를 하였다. 함수에 대한 Dirichlet의 정의는 다음과 같다.

구간 $a < x < b$에 있는 변수 x의 각 값에 대하여 변수 y의 명확한 값이 대응될 때, 변수 y는 구간 $a < x < b$ 에서 정의된 변수 x의 함수 값이다. 또한 이 대응이 어떠한 방식으로 성립되는지는 관계가 없다.

Euler, Fourier, Cauchy 등 많은 수학자들이 '임의의' 함수에 대하여 논의하고 있다고 주장하였지만 사실 그들이 생각하고 있었던 것은 해석적인 식 혹은 곡선이었다.

19) 함수 f가 구간 $(-l, l)$유한히 많은 곳에서 불연속이고 유한히 많은 곳에서 극값을 가지면 f는 Fourier 급수로 표현할 수 있다.

Dirichlet는 처음으로 임의적 대응으로서의 함수 개념을 심각하게 고려하였다.[20] Dirichlet 함수는 해석적 식에 의해 제시되거나 자유롭게 그린 곡선에 의해 제시되지 않는 최초의 함수이었고, 모든 점에서 (현대적 의미에서) 불연속인 최초의 함수이었고, 임의적 순서쌍으로서의 개념을 구체적으로 보여준 것이었다(Kleiner, 1989, p.292).

수학의 발달과 더불어 함수는 임의의 집합 사이의 사상으로 일반화되고 정의역이나 수, 점, 수의 쌍, 곡선, 연산자 등 임의의 집합인 함수로 일반화된다. 해석학에서의 함수, 기하학적 변환, 임의의 집합의 사상 등이 통합되어 임의의 집합 사이의 다대일 대응이라는 일반적인 함수 개념에 이르게 되었다.

6. 마치며

지금까지 역사적인 고찰을 통해 살펴본 바에 따르면, 함수 개념은 그것이 얻어지기까지 기나긴 발달과 정교화의 과정이 있었음을 알 수 있다. 고대에는 두 양들 사이의 종속 관계에 대한 개별적인 사례 수준의 연구가 진행되었지만 변량과 함수에 대한 일반적 개념이 나타나지 않았다. 중세에는 14세기 유럽 과학에서 함수의 일반적 개념이 처음 기학적이거나 역학적 형식에 의해 명시적으로 표현되었다. 16세기 이후 근대 및 17세기에는 함수의 해석적 식이 널리 쓰이기 시작하면서 멱급수의 무한 합으로 표현 가능한 해석적 함수들의 모임이 점차적으로 주로 사용되었다. 수학의 혁명을 일으킨 것은 바로 함수를 해석적 방법으로 도입하는 것(Youschkevitch, 1976, p.39)이었으며, 이것의 놀라운 유효성 때문에 과학에서 함수 개념은 그 위치가 확고히 되었다. 18세기 중반에 이르러 함수를 해석적 식으로만 해석하는 것이 부적합하다는 점이 드러나면서 새로이 함수에 대한 일반적인 정의를 도입하려는 시도가 있었다. 19세기 후반기에 이르러 이러한 일반적 정의는 함수 이론의 발달 가능성을 넓혀 놓았지만 논리적 문제점이 드러났고, 20세기에 이르러 함수 개념의 본질이 재검토 된다. 그리고 여러 관점 사이에서 논쟁이 계속되었다.

오늘날 우리에게 받아들여지고 있는 함수 개념은 당대 일류 학자들이 그 본질을 명확히 하려는 시도와 노력의 결실이라 할 수 있다. 그 과정에서 수학의 여러 주제들이 통합되었으며, 무엇보다도 수학의 기하학적 측면과 대수적 측면의 결합은 커다란 발전의 계기가 되었다. 함수는 그 당시 수학으로 표현되어 가면서 그 과정에서 기하학적 표현(configuration), 곡선 표현, 변수, 계산 체계, 해석적인 식, 순서쌍 등의 통합적인 개념으로 발달한 것이다.

20) 이점은 Fourier 급수로 표현될 수 없는 함수의 예를 제시한 1829년 논문에서 쉽게 찾아볼 수 있다.

변화하는 양 사이의 규칙성에 대한 분석은 함수의 중요한 근원으로서 변화하는 현실 세계를 이해하기 위한, 즉 다양한 변화 현상을 '보기' 위한 개념적 수단이었다. 그리하여 수학 뿐 만 아니라 과학의 발전과 더불어 함수는 자연의 법칙을 탐구하여 기술하는 중심적인 도구로 사용되었던 것이다. 함수는 수학의 밑바탕에 폭넓게 스며있는 기본적인 개념으로서 Boyd(1946)에 따르면, 모든 가능한 관계에 대한 논리라는 엄격한 사고의 기초로서의 수학을 확립한 것이다.

참고 문헌

1. 김용운, 김용국, **수학대사전**, 우성, 1996.
2. 박교식, 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근, 서울대 대학원 박사학위 논문 (1992).
3. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1999.
4. 유지영, N. Oreame의 De Configurationibus에서의 기하학적 논의의 구조와 성격, 서울대학교 대학원 석사학위 논문(1987).
5. 이종희, 함수개념의 역사적 발달과 인식론적 장애, **수학교육학연구**, 제 9 권 1호, 대한수학교육학회, pp.133-150. 1999.
6. Atkinson, L., “Where Do Functions come from?”, The college mathematics Journal, vol 33, no. 2, march 2002, (2002)
7. Boyer, C B., Proportion, Equation, Function: Three steps in the development of a concept, Scripta mathematica 12. pp.5-13(1946)
8. Boyer, C B., 수학의 역사 상 · 하, 양영오, 조윤동 (역), 경문사(2000)
9. Doorman, L M., *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*, Freudenthal Institute, Utrecht(2005)
10. Euler, L., *Introduction to Analysis of the Infinite*, Translated by J D. Blanton(1988), Springer-Verlag N. Y. Inc.(1748)
11. Ferraro, G., *Function*, Functional Relations and the law of Continuity in Euler, Historia Mathematica 27, pp.107-132(2000)
12. Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*, D. Reidel publishing company..(1983
13. Hamley, H R., *Relational and Functional thinking in mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics.(1934)
14. Kleiner, I., *Evolution of the Function Concept* : A Brief History, The College Mathematics Journal, Vol. 20, No. 4, pp.282-300(1989)
15. K, Sharon Ann, D. A,, *The origins of calculus in the medieval period,*

Doctoral dissertations of University of Illinois at Chicago(1992)
16. Klien, M, *Mathematical Thought*, Oxford university press.(1972)
17. Newton, I., *Tractatus de methodis serierum et fluxionum*, The Mathematical papers of Isaac Newton, edited by D. T. Whiteside(1967-1981), vol. 3, Cambridge University press. (1670)
18. Panza, M., *Concept of Function, between Quantity and Form*, in the 18th Century, History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Vandenhoeck & Ruprecht in Gottingen, 1996.
19. Roche, J J., *The mathematics of Measurement A critical history*. (1998)
20. Sierpinska, A., *On Understanding the notion of Function*, The Concept of Function; Aspects of Epistemology and pedagogy, pp.25-58, Mathematical Association of America(1994)
21. Youschkevitch, A. P., *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, Archive for History of Exact Sciences 16, pp.37-85(1976)

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 20 No. 4 (Nov. 2007), 153 - 174

Historical investigation in the concept of function as integrated concept

Lecture of Department of Mathematics education, Hongik University **Hyun young Kang**

The concept of Function is not just a single concept but an integrated concept that includes various mathematic topics such as arithmetics, geometry and so on. Therefore, the concept of function is the basic principal underlying mathematics. Moreover, we should think of function as conceptual expedient for understanding the phenomena in the variously changing real world. Therefore in this article, I would like to consider the concept of an integrated function through historical investigation. Especially, from the middle ages to the 19th century, representation which related to the function has been evolved, and therefore, I will consider function as an integrated concept through changing the concept of function.

Key words: function, change of concept, geometrical representation, curve expression, variable, calculate system, analytic expression

2000 Mathematics Subject Classification: 97D20

ZDM : A30, I20

논문 접수: 2007년 9월 11일 심사 완료: 2007년 10월 5일