

박벽보의 3차원 후좌굴 해석을 위한 Locking-Free 보요소

An Assumed Strain Beam Element for Spatial Post-Buckling Analysis of Non-symmetric and Shear Flexible Thin-Walled Beams

이 경 찬[†] 김 문 영* 박 정 일** 장 승 필***
Lee, Kyoung-Chan Kim, Moon-Young Park, Jung-Il Chang, Sung-Pil
(논문접수일 : 2007년 6월 29일 ; 심사종료일 : 2007년 10월 9일)

요 지

Timoshenko의 전통적인 보 이론에 근거한 유한 요소의 전단 잠김 현상을 해결하기 위하여 가정 변형도법을 적용한 7자유도 공간 박벽 뼈대요소를 개발하였다. 2개의 노드를 갖는 직선 보요소에서 한 요소내의 변형도가 일정하다고 가정하여 형상함수를 유도하고 이를 바탕으로 가상일의 원리에 따라 강성행렬을 구성하였다. Corotational 기하 비선형 해석법을 이용하여 불평형 하중을 산정하였으며 부재 길이의 비선형 효과를 반영하기 위하여 bowing effect를 정밀하게 고려하였다. 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보와 이축 비대칭 단면을 갖는 직선 외팔보에 대하여 횡-비틀림 좌굴에 의한 안정 해석과 후좌굴 해석을 수행한 결과 ABAQUS 쉘요소와 좋은 일치를 보여 주었다.

핵심용어 : 가정변형도, 박벽보요소, 후좌굴 해석, 전단변형, 전단 잠김, locking-free

Abstract

This study presents a thin-walled space frame element based on the classical Timoshenko beam theory. The element is derived according to the assumed strain field in order to resolve the shear-locking phenomenon. The shape function is developed in accordance with the strain field which is assumed to be constant at a 2-noded straight frame element. In this study, the geometrically nonlinear analysis applies the Corotational procedure in order to evaluate unbalanced loads. The bowing effect is also considered faithfully. Two numerical examples are given; monosymmetric curved and nonsymmetric straight cantilever. When these example structures behave lateral-torsional buckling, the critical loads are obtained by this study and ABAQUS shell elements. Also, the post-buckling behavior is examined. The results give good agreement between this study and ABAQUS shell.

Keywords : assumed strain, thin-walled frame element, post-buckling analysis, shear deformation, shear locking, locking-free

1. 서 론

세장한 구조물의 기하 비선형 해석은 세계적으로는 물론 국내에서도 필자를 비롯한 여러 연구자에 의해 오랜 기간 많은 연구가 진행되어 왔다. 특히 필자는 수년간 박벽 보요소의 기하 비선형 해석 및 좌굴 안정 해석에 대해 연구(Kim 등, 1994; 1996; 2000; 2001; 2003; 2004; 2005; 2007; 김문영 등, 1990; 1992; 김성보 등, 2002; 박효기

등, 1999)를 수행해왔다. 그 과정에서 특히 Argyris의 semi-tangential 이론에 기반하여 대변위와 대회전 효과를 정밀하게 고려하기 위하여 노력하였다. 이와 더불어서 지난 연구(Kim 등, 1994; 2001; 2003; 2004; 2005; 김문영 등, 1990; 2002)에서 Timoshenko 보이론에 근거하여 전단 변형을 고려한 3차원 박벽 보요소를 제안하였다. Timoshenko 보이론을 적용할 경우에는 유한요소로의 이산화 과정에서 오류로 인하여 전단을 과대평가하는 오류가 있음이

[†] 책임저자, 정회원 · 서울대학교 교량설계핵심기술연구원 선임연구원
Tel: 02-880-8314 ; Fax: 02-875-2148
E-mail: eclip2@snu.ac.kr

* 정회원 · 성균관대학교 사회환경시스템공학과 교수

** 서울대학교 건설환경종합연구소 사무국장

*** 서울대학교 지구환경시스템공학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 2월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

널리 알려져 있고, 이를 전단 잠김(shear locking) 현상이라 부른다.

전단 변형을 고려한 유한요소에서 전단 잠김 현상을 극복하기 위한 방법은 여러 각도로 연구되어 왔다. 그 대표적인 첫 번째 방법은 선택적분이나 감소적분을 수행하여 전단을 과대평가하는 효과를 상쇄하는 방법이다. 보요소의 경우에 이론적으로 정밀하게 전단 변형을 고려하기 위해서 2점 가우스 적분을 수행해야 하지만 1점 가우스 적분을 수행하면 전단 잠김 현상을 현저히 상쇄하여 좋은 결과를 얻을 수 있음이 널리 알려져 있다. 곡선 보요소에 이 이론을 적용하여 Stolarski(1981) 등이 연구를 수행한 바가 있다.

두 번째 방법은 등매개변수(isoparametric) 요소를 변형하여 사용하는 방법이다. 기존의 등매개변수 보요소의 형상 함수에 전단 효과를 고려하여 3차 다항식 형태를 사용함으로써 전단 잠김 현상을 감소시킬 수 있다. 이 방법은 주로 쉘 요소에 대하여 많은 연구가 수행되어 왔으며, 곡선보에 적용한 사례로 Prathap(1986)의 연구가 있다. 필자는 지난 연구에서 이 방법을 3차원 박벽 직선 보요소에 성공적으로 적용하여 제한한 바가 있다(Kim 등, 2001). 이와 더불어 최근에 Minghini(2007)는 필자의 지난 연구와 유사하게 3차 Hermitian 형상함수의 변형된 형태를 제시하여 잠김 현상을 해결하는 방법을 제시하였다. 그러나 이러한 방법으로 유도된 형상함수는 3차식의 복잡한 형태를 띠고 있으며, 특히 재료의 물성치와 단면 상수가 형상함수 식에 포함되어 있기 때문에 비탄성 문제에 적용하기에 곤란한 단점이 있다. 이러한 한계점을 극복하기 위한 방법으로 다음의 가정 변형도법이 있다.

가정 변형도법은 요소의 변형률을 적절히 가정하여 전단 잠김 현상을 감소시키는 방법이며 쉘 요소에 적용하기 위해서 Bathe(1986)와 Huang(1987)에 의해서 개발되었다. 이후에 쉘이나 판 요소에 널리 적용되어 왔다. 이 방법은 전단 잠김 현상을 극복하고, 감차적분 또는 선택적분시 나타날 수 있는 제로 에너지 모드를 방지할 수 있는 장점이 있다. 가정 변형도법을 곡선보에 적용한 사례로는 Ashwell(1971), Choi(1993)등의 연구가 있다. 이 방법을 보요소에 적용하기 위하여 변형도를 적절하게 가정하게 되는데, 2노드 요소를 사용할 경우에는 한 요소의 각 변위장을 상수로 가정하고, 3노드를 사용할 경우에는 선형으로 가정하게 된다. 언급한 전단 잠김 현상은 쉘이나 곡선 보요소 뿐만 아니라 세장한 박벽 뼈대요소에서도 발생할 수 있기 때문에, 이를 세장한 직선 보요소의 전단 변형을 정밀하게 고려하기 위하여 적용하기도 한다.

이 연구에서는 2노드 3차원 박벽 보요소에 가정 변형도법

을 적용하여 각 변위장을 상수로 가정하였다. 가정 변형도법을 적용하는 의의는 전단 잠김 현상을 방지함과 동시에 단면 상수와 물성치가 형상함수에 관계되지 않게 함으로서 재료 비선형을 고려할 수 있는 가능성을 열어놓음에 있다. 이전의 연구에서는 단면 상수를 정의함에 있어서 도심-전단중심 정식화를 사용하였는데 이 경우에는 단면의 일부가 비탄성 영역으로 넘어가는 문제에 있어서 한계점을 가질 수 밖에 없다. 따라서 이 연구에서는 단면 상수를 모두 도심에서 정의하여 이를 극복 할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

2. 가정 변형도 박벽 공간 뼈대구조의 기하 비선형 해석 이론

2.1 박벽 공간 뼈대요소의 증분 평형 방정식

가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 증분 평형방정식은 다음과 같다. 이때 증분 관계식의 첨자표시는 Bathe의 규약에 따라, 왼쪽 윗 첨자는 변수가 발생한 시점을 나타내고 왼쪽 아래 첨자는 변수가 측정된 시점을 나타낸다.

$$\int_V [{}^{t+\Delta t} S_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}] d'V = {}^{t+\Delta t} R$$

$$= \int_S [{}^{t+\Delta t} T_i \cdot \delta {}^{t+\Delta t} u_i] d'S \quad (1)$$

여기에서, ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ 는 2nd Piola-Kirchhoff 응력 텐서, ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 는 Green-Lagrange 변형도 텐서, ${}^{t+\Delta t} R$ 는 표면력 (${}^{t+\Delta t} T$)에 의한 가상일, ${}^{t+\Delta t} u_i$ 와 δu_i 는 총 변위와 가상 변위 벡터이다. 증분 평형방정식을 유도하기 위하여, 응력, 변형도, 변위 성분들을 다음과 같이 증분식으로 나타낸다.

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}_i S_{ij} \quad (2)$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}_i \epsilon_{ij} \quad (3)$$

$${}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + u_i^* \quad (4)$$

여기에서, ${}^t \tau_{ij}$ 는 Cauchy 응력, u_i 와 u_i^* 는 각각 변위의 1차항과 2차항에 의한 증분 변위이고, 윗 첨자가 없는 변수들은 증분량을 의미한다. 증분 변위들은 Green-Lagrange 변형도 ${}_i \epsilon_{ij}$ 에 대입하여 3차 이상의 항을 무시하고 정리하면 증분 변형도는 다음과 같다.

$${}_i \epsilon_{ij} \equiv {}_i e_{ij} + {}_i \eta_{ij} + {}_i e_{ij}^* \quad (5)$$

여기에서,

$$\begin{aligned}
 {}_i e_{ij} &= \frac{1}{2}({}_i u_{i,j} + {}_i u_{j,i}) \\
 {}_i \eta_{ij} &= \frac{1}{2}({}_i u_{k,i} \cdot {}_i u_{k,j}) \\
 {}_i e_{ij}^* &= \frac{1}{2}({}_i u_{i,j}^* + {}_i u_{j,i}^*)
 \end{aligned} \tag{6}$$

위 식에서 ${}_i e_{ij}$ 와 ${}_i \eta_{ij}$ 는 u_i 에 의한 변형도의 선형 성분과 비선형 성분을 각각 의미하며, ${}_i e_{ij}^*$ 는 u_i^* 에 의한 선형 변형도를 나타낸다. 비선형 변위에 의한 비선형 변형률은 무시한다. 식 (2)~(4)와 (6)을 (1)에 대입하고 고차항을 무시하여 정리하면 다음과 같이 증분 평형 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \int_V {}_i C_{ijrs} {}_i e_{rs} \delta {}_i e_{ij} d'V + \int_V {}_i \tau_{ij} \delta ({}_i \eta_{ij} + {}_i e_{ij}^*) d'V \\
 = {}^{t+\Delta t} R - \int_V {}_i \tau_{ij} \delta {}_i e_{ij} d'V
 \end{aligned} \tag{7}$$

여기에서, 좌변의 첫 번째 항은 탄성 변형 에너지(Π_E)의 변분이고, 두 번째 항은 초기 응력에 의한 포텐셜 에너지(Π_G)의 변분이며, 우변은 증분 절점력에 의한 가상일(δW_{ext})을 의미한다. 탄성 변형 에너지를 각 자유도에 대해서 미분하여 탄성 강성행렬을 얻을 수 있고, 초기응력에 의한 포텐셜 에너지로부터 동일한 방법으로 기하 강성행렬을 얻는다.

2.2 공간 박벽 보요소의 변위장

뒀변형을 고려한 7자유도 3차원 박벽 보요소의 변위장을 각 노드에 대하여 그림 1과 같이 정의한다. 여기에서 x_1 축은 부재 단면의 도심에 대한 축이며, x_2 와 x_3 은 x_1 과 직교하며 서로간에도 직교하는 축이다. u_x, u_y, u_z 는 각각 x_1, x_2, x_3 축에 대한 강체 변위를 의미하고, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각 축에 대한 강체 회전 변위이며, f 는 단면의 뒀상수이다. 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때, 박벽 공간 뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 변위파라미터의 1차항(u_i)과 2차항(u_i^*)의 합으로 표현되며 각각의 성분은 다음과 같다. 이 식에서 ϕ 는 뒀함수를 의미한다.

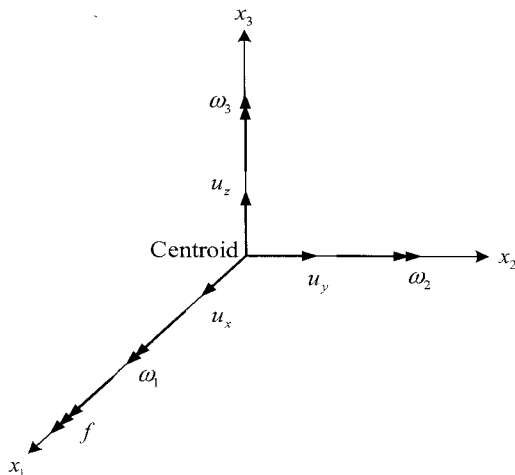


그림 1 공간 박벽 보요소의 변위장

x_3 축에 대한 강체 변위를 의미하고, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각 축에 대한 강체 회전 변위이며, f 는 단면의 뒀상수이다. 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때, 박벽 공간 뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 변위파라미터의 1차항(u_i)과 2차항(u_i^*)의 합으로 표현되며 각각의 성분은 다음과 같다. 이 식에서 ϕ 는 뒀함수를 의미한다.

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_x + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + f \phi \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_y - \omega_1 x_3 \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_z + \omega_1 x_2
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^*(x_1, x_2, x_3) &= (\omega_1 \omega_2 x_2 + \omega_1 \omega_3 x_3) / 2 \\
 u_2^*(x_1, x_2, x_3) &= (\omega_2 \omega_3 x_3 - (\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2) / 2 \\
 u_3^*(x_1, x_2, x_3) &= (\omega_2 \omega_3 x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3) / 2
 \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 유한요소 정식화를 위한 형상함수의 유도

가정 변형도법에 의한 3차원 직선 박벽 보요소의 형상함수를 유도하고자 한다. 2노드 보요소에서는 변형도가 일정하다고 가정하므로, 단면 내에서 곡률 κ 가 일정하다는 가정으로부터 아래 식 (10)을 얻게 되고, 전단 변형도 γ_{xy} 가 일정하다는 가정에서 식 (11)을 얻는다.

$$\kappa = const. \quad \Leftrightarrow \quad \omega_3' = const. \tag{10}$$

$$\gamma_{xy} = const. \quad \Leftrightarrow \quad u_y' - \omega_3 = const. \tag{11}$$

이외에, 각 요소 절점 변위의 정의에 따라 다음의 경계조건을 얻는다. 여기에서 p 와 q 는 한 요소의 양쪽 끝단 노드를 의미한다.

$$\omega_3(0) = \omega_3^p \quad \omega_3(L) = \omega_3^q \quad u_y(0) = u_y^p \quad u_y(L) = u_y^q \tag{12}$$

식 (10)을 적분하고 경계조건 식 (12)를 사용하여 $\omega_3(x)$ 를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \omega_3(x) &= \frac{\omega_3^q - \omega_3^p}{L} x + \omega_3^p \\
 &= \omega_3^p \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \omega_3^q \left(\frac{x}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

이를 $\xi = x/L$ 에 대해서 다시 쓰면 다음 식 (14)을 얻는다.

$$\omega_3(\xi) = \omega_3^p(1-\xi) + \omega_3^q(\xi) \quad (14)$$

식 (11)에 식 (13)의 결과를 대입하고 이를 적분한 후에 경계 조건 식 (12)를 이용하면 $u_y(x)$ 를 다음과 같이 얻게 된다.

$$\begin{aligned} u_y(x) &= \frac{\omega_3^q - \omega_3^p}{2L} x^2 + \left(\omega_3^p + \frac{u_y^q - u_y^p}{L} - \frac{\omega_3^q + \omega_3^p}{2} \right) x + u_y^p \\ &= u_y^p \left(1 - \frac{x}{L} \right) + u_y^q \left(\frac{x}{L} \right) + \omega_3^p \frac{L}{2} \left(\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \\ &\quad - \omega_3^q \frac{L}{2} \left(\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

이를 ξ 에 대해서 다시 쓰면 다음 식 (16)를 얻는다.

$$u_y(\xi) = u_y^p(1-\xi) + u_y^q(\xi) + \omega_3^p \frac{L}{2}(1-\xi)\xi - \omega_3^q \frac{L}{2}(1-\xi)\xi \quad (16)$$

동일한 방식으로 ω_2 와 u_z 를 유도하고, ω_1 과 f 도 역시 동일한 방식으로 유도 할 수 있다. 이를 종합하면 가정 변형도법에 의한 공간 박벽 뼈대요소의 형상함수는 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_x(\xi) &= u_x^p \cdot h_1 + u_x^q \cdot h_2 \\ u_y(\xi) &= u_y^p \cdot h_1 + u_y^q \cdot h_2 + \omega_3^p \cdot h_3 - \omega_3^q \cdot h_3 \\ u_z(\xi) &= u_z^p \cdot h_1 + u_z^q \cdot h_2 - \omega_2^p \cdot h_3 + \omega_2^q \cdot h_3 \\ \omega_1(\xi) &= \omega_1^p \cdot h_1 + \omega_1^q \cdot h_2 - f^p \cdot h_3 + f^q \cdot h_3 \\ \omega_2(\xi) &= \omega_2^p \cdot h_1 + \omega_2^q \cdot h_2 \\ \omega_3(\xi) &= \omega_3^p \cdot h_1 + \omega_3^q \cdot h_2 \\ f(\xi) &= f^p \cdot h_1 + f^q \cdot h_2 \end{aligned} \quad (17)$$

여기에서,

$$h_1 = 1 - \xi \quad h_2 = \xi \quad h_3 = \frac{L}{2}(1 - \xi)\xi \quad (18)$$

이를 이전 연구(Kim 등, 2001)의 3차 Hermitian 형상 함수 식 (19)와 비교하면, 이 연구의 결과가 매우 간결한 형태를 띠게 되며 특히 요소의 물성치와 단면 상수를 포함한 식 (20)의 S_i 항이 없기 때문에 이들에 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 따라서 이 연구에서 개발한 가정 변형도법에 따른 형상함수는 재료 비선형 문제에도 적용할 수 있는 장점을 가지게 된다.

$$\begin{aligned} u_x(\xi) &= u_x^p \cdot (1 - \xi) + u_x^q \cdot \xi \\ u_y(\xi) &= u_y^p \cdot h_{21} + u_y^q \cdot h_{23} + \omega_3^p \cdot L \cdot h_{22} + \omega_3^q \cdot L \cdot h_{24} \\ u_z(\xi) &= u_z^p \cdot h_{31} + u_z^q \cdot h_{33} - \omega_2^p \cdot L \cdot h_{32} - \omega_2^q \cdot L \cdot h_{34} \\ \omega_1(\xi) &= \omega_1^p \cdot h_{r1} + \omega_1^q \cdot h_{r3} - f^p \cdot L \cdot h_{r2} - f^q \cdot L \cdot h_{r4} \\ \omega_2(\xi) &= -u_z^p \cdot k_{31} - k_{33} \cdot u_z^q + k_{32} \cdot L \cdot \omega_2^p + k_{34} \cdot L \cdot \omega_2^q \\ \omega_3(\xi) &= u_y^p \cdot k_{21} + k_{23} \cdot u_y^q + k_{22} \cdot L \cdot \omega_3^p + k_{24} \cdot L \cdot \omega_3^q \\ f(\xi) &= -\omega_1^p \cdot k_{r1} - \omega_1^q \cdot k_{r3} + f^p \cdot L \cdot k_{r2} + f^q \cdot L \cdot k_{r4} \end{aligned} \quad (19)$$

여기에서,

$$\begin{aligned} h_{i1} &= (2\xi^3 - 3\xi^2 - 12S_i\xi + T_i) / T_i \\ h_{i2} &= (\xi^3 - 2(1+3S_i)\xi^2 + (1+6S_i)\xi) / T_i \\ h_{i3} &= (-2\xi^3 + 3\xi^2 + 12S_i\xi) / T_i \\ h_{i4} &= (\xi^3 - (1-6S_i)\xi^2 - 6S_i\xi) / T_i \\ k_{i1} &= (6\xi^2 - 6\xi) / (T_i L) = -k_{i3} \\ k_{i2} &= (3\xi^2 - 4(1+3S_i)\xi + T_i) / (T_i L) \\ k_{i4} &= (3\xi^2 - 2(1-6S_i)\xi) / (T_i L) \\ T_i &= 1 + 12S_i \quad (i = 2, 3, r) \\ S_2 &= \frac{EI_3}{GA_2^s L^2}, \quad S_3 = \frac{EI_2}{GA_3^s L^2}, \quad S_r = \frac{EI_\phi}{GA_r^s L^2} \end{aligned} \quad (20)$$

2.4 강성행렬의 유도

전단 변형을 고려한 박벽보의 변위장을 변위-변형도 관계식에 대입하고 단면력에 대한 정의를 고려하여 식 (7)을 부재 길이에 대하여 적분을 수행하면 가상일의 원리에 따라서 탄성변형 에너지(Π_E)와 단면력에 의한 포텐셜 에너지(Π_G)가 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^L [EAu_x'^2 + EI_2\omega_2'^2 + EI_3\omega_3'^2 + GJ\omega_1'^2 \\ &\quad + EI_\phi f'^2 + 2EI_{\phi 2}\omega_2' f' - 2EI_{\phi 3}\omega_3' f' \\ &\quad + GA_2^s (u_y' - \omega_3 - (\omega_1' + f)e_3)^2 \\ &\quad + GA_3^s (u_z' + \omega_2 + (\omega_1' + f)e_2)^2 \\ &\quad + GA_r^s (\omega_1' + f)^2] dx \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Pi_G = \frac{1}{2} \int_0^L [{}^t F_1 (u_y'^2 + u_z'^2) + {}^t F_2 (2u_z' \omega_1 + \omega_1 \omega_2)]$$

중분 부재력을 효율적으로 계산하기 위하여 부재변위 벡터와 부재력 벡터로 표현된 식 (24)를 아래와 같이 일반화된 변위 벡터와 힘 벡터로 변환시킬 수 있다.

$$\delta \mathbf{U}_t^T \cdot (\mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{U}_t = \delta \mathbf{U}_t^T \cdot \mathbf{F}_t \quad (32)$$

여기에서부터 다음과 같이 부재력 산정을 위한 일반화된 강성행렬을 구성하며, 이는 부록 A.3에 수록하였다.

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{a}_e^T \cdot (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{a}_e \quad (33)$$

이 강성행렬 중에서 특히 사각형 안쪽의 8×8 행렬($\mathbf{K}_{t,pure}$)은 순수변형성분(\mathbf{U}_{pure})에 대응되는 접선강도행렬을 의미한다. 따라서 발생된 변위에 의한 일반화된 부재력(\mathbf{F}_{pure})은 다음의 식으로부터 계산한다.

$$\mathbf{K}_{t,pure} \cdot \mathbf{U}_{pure} = \mathbf{F}_{pure} \quad (34)$$

2.6 Bowing Effect 유도

뼈대 구조의 기하 비선형 해석 시에는 힘 및 비틀림 변위에 의한 축방향 길이 변화(bowing effect)를 고려해야 한다. 이로부터 변형된 부재 길이(Δ)를 구하여 순수 축방향 변형을 다음과 같이 보정한다.

$$u_{p1} = u^q - u^p + \Delta \quad (35)$$

여기에서,

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L [u_y'^2 + u_z'^2 + \beta_1 \omega_1'^2] dx \quad (36)$$

$$\beta_1 = \frac{I_2 + I_3}{A} \quad (37)$$

이 연구에서 유도된 형상함수 식 (17)에 표현된 u_y , u_z , ω_1 에 대한 식을 미분하면 다음 식 (38)을 얻는다.

$$\begin{aligned} u_y' &= \frac{u_y^q - u_y^p}{L} + (\omega_3^p - \omega_3^q) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \\ u_z' &= \frac{u_z^q - u_z^p}{L} - (\omega_2^p - \omega_2^q) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \\ \omega_1' &= \frac{\omega_1^q - \omega_1^p}{L} - (f^p - f^q) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \end{aligned} \quad (38)$$

여기에서 식 (28)에 의해서 강체변형 $\gamma_2 = -(u_z^q - u_z^p)/L$ 와 $\gamma_3 = (u_y^q - u_y^p)/L$ 가 자연스럽게 사라지는 것을 생각하고,

식 (29)의 순수변형에 대해서 변환하면 식 (39)가 성립하므로, bowing effect에 의해 구성되는 각항은 식 (40)이 된다.

$$\begin{aligned} \omega_3^p - \omega_3^q &= u_{p2} - u_{p3} \\ \omega_2^p - \omega_2^q &= u_{p4} - u_{p5} \\ \omega_1^q - \omega_1^p &= u_{p6} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} u_y' &= (u_{p2} - u_{p3}) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \\ u_z' &= (u_{p5} - u_{p4}) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \\ \omega_1' &= \frac{u_{p6}}{L} - (u_{p7} - u_{p8}) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \end{aligned} \quad (40)$$

식 (40)을 식 (36)에 대입하여 적분하면 변화된 축방향 길이(Δ)를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{L}{24} \{ (u_{p2} - u_{p3})^2 + (u_{p4} - u_{p5})^2 \} \\ &\quad + \frac{(I_2 + I_3)u_{p6}^2}{2AL} + \frac{(I_2 + I_3)L}{24A} (u_{p7} - u_{p8})^2 \\ &= (u_{p2}^2 + u_{p3}^2 + u_{p4}^2 + u_{p5}^2) \frac{L}{24} - (u_{p2}u_{p3} + u_{p4}u_{p5}) \frac{L}{12} \\ &\quad + \frac{(I_2 + I_3)u_{p6}^2}{2AL} + \frac{(I_2 + I_3)L}{24A} (u_{p7} - u_{p8})^2 \end{aligned} \quad (41)$$

여기에서, u_{p7} 과 u_{p8} 은 뒀 변형에 의한 것으로 bowing effect에 대한 기여가 적다고 생각하면 이 항을 무시할 수 있다. 따라서 최종적으로 부재길이에 대한 보정량을 다음과 같이 산정 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta &= (u_{p2}^2 + u_{p3}^2 + u_{p4}^2 + u_{p5}^2) \frac{L}{24} \\ &\quad - (u_{p2}u_{p3} + u_{p4}u_{p5}) \frac{L}{12} + \frac{(I_2 + I_3)u_{p6}^2}{2AL} \end{aligned} \quad (42)$$

이를 기존(Kim 등, 2001)의 3차 Hermitian 다항식에 의한 형상함수를 사용한 경우의 bowing effect 보정값과 비교해보면 첫째 항의 계수가 15에서 24로 두 번째 항의 계수가 30에서 12로 변경된 것을 확인할 수 있다.

박벽 공간뼈대요소의 중분 평형방정식을 전체좌표계로 좌표변환하고 직접강도법을 적용하면 전체 구조물의 중분 방정식을 얻을 수 있다. 전체좌표계에서 중분 평형방정식으로부터 중분 변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력 증분을 산정하고 불평형 하중을 결정하게 된다. 이때 증분 형식의

반복 계산법을 사용하는 경우, 불평형 하중은 다음 반복계산에서는 하중으로 작용하는 일반적인 기하 비선형 해석법에 따른다.

3. 해석 예제

이 논문에서 개발된 가정 변형도법을 이용한 공간 박벽 뼈대요소를 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조에 적용하여 안정해석(선좌굴해석)과 기하비선형해석(후좌굴해석)을 수행하였다. 이 연구의 타당성을 검증하기 위하여 ABAQUS 쉘요소를 이용하여 해석한 결과와 이 연구에 의한 수치해석 결과를 비교 검토하고, 더불어 기존의 3차 Hermitian 형상함수를 사용한 등매개변수 뼈대요소(Kim, 2001)의 결과와도 비교하였다. 이 경우에는 전단 변형에 의한 효과를 무시하였다.

3.1 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보의 후좌굴 거동

그림 2와 같은 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보에 대해서 좌굴 안정성 해석과 후좌굴 해석을 수행한다. 이 연구에서 개발된 프로그램으로 총 18개의 7자유도 직선 보요소로 곡선 외팔보를 모델링하였다. 작용된 외부 하중은 자유단 끝단의 도심점에 그림 2에 도시한 바와 같이 축방향 압축력이 가해진 경우와 수직 방향으로 수평력이 가해진 경우를 검토하였다. 수평력을 가할 경우에는 후좌굴 거동을 모사하기 위하여 imperfection 하중을 Z방향으로 P/1000만큼 자유단에 가하였다.

이 연구 결과의 타당성 검증을 위하여 ABAQUS의 6노드 quadratic triangular thin 쉘 요소(STRI65)를 이용하여 해석하였다. 이 요소는 각 노드에 5개의 자유도를 가지고 있으

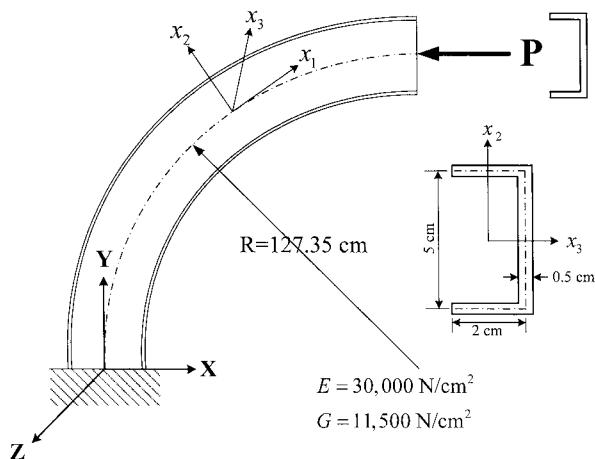


그림 2 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보

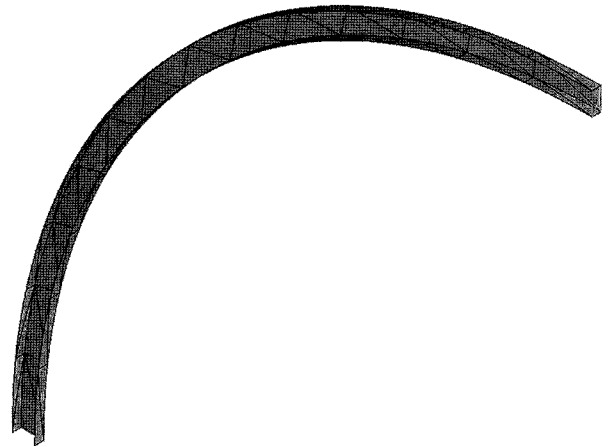


그림 3 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보의 ABAQUS 쉘 모델링

표 1 일축 비대칭 단면의 단면 상수

항목	값	항목	값	항목	값
A	4.5cm ²	A ₂	2.17359cm ²	A ₃	1.10535cm ²
A _R	9.26328cm ²	J	0.375cm ⁴	I ₂	1.77778cm ⁴
I ₃	17.7083cm ⁴	I _φ	31.275720cm ⁶	I _{φ2}	0cm ⁶
I _{φ3}	20.370370cm ⁶	e ₂	0cm	e ₃	1.15033cm
β ₂	-3.298611cm	β ₃	0cm	β _φ	0cm

며, 이 구조물을 모델링하기 위하여 총 197개의 노드와 81개의 요소를 사용하였다. 모델링 형상은 그림 3에 도시한 바와 같다. 더불어서 필자의 지난 연구에서 개발한 3차 Hermitian 형상함수를 이용한 박벽 보요소(Kim 등, 2001)의 결과도 동시에 비교하여 가정 변형도를 이용한 형상함수를 사용한 이 연구의 결과를 비교하였다.

이 연구에 사용된 일축 비대칭 단면의 단면상수는 표 1과 같다. 이 연구의 단면 상수는 모두 도심에 대하여 정의되었기 때문에 표 1에 제시된 I_φ와 β₂는 도심에서 정의된 값이다. 단면상수는 김문영(2002)이 개발한 단면상수 자동산정 프로그램을 사용하여 구하였다.

각 해석 별 탄성 좌굴 안정 해석에 의한 좌굴 하중은 표 2에 도시한 바와 같으며, 세 가지 해석 결과의 차이는 1% 이내로 유사한 결과를 보여준다. 또한 그림 4와 5는 압축력과 수평력에 의한 후좌굴 해석 결과를 보여준다. 그림 4에서 U_x는 압축력에 의한 자유단의 X방향 변위를 나타내고, U_z는 횡-비틀림 좌굴에 의해서 Z방향으로 발생한 자유단의 변위이다. 마찬가지로 그림 5에서 U_y는 하중이 가해진 방향의 자유단 처짐이고, U_z는 횡-비틀림 좌굴에 의한 변위이다. 이 결과로부터 이 연구에서 개발된 박벽 보요소가 기존의 3차 Hermitian 보요소보다 대체로 ABAQUS STRI65 쉘요소의 결과에 근접한 것을 알 수 있다.

표 2 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보의 안정 해석 결과

해석 방법	축방향 압축력의 좌굴 하중 [N]	수직 방향 수평력의 좌굴 하중[N]
본 연구	0.62854	1.6294
3차 Hermitian	0.62375	1.6289
ABAQUS STRI65	0.62341	1.6432

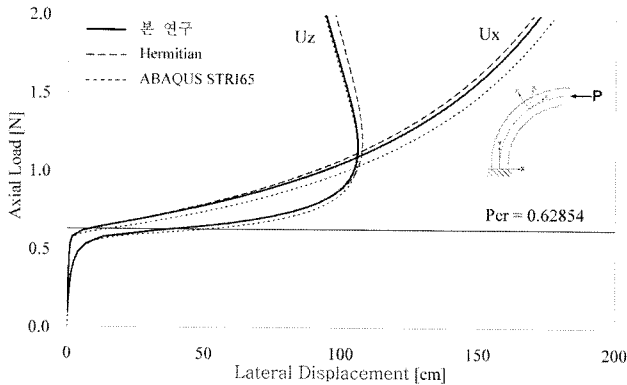


그림 4 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보의 축방향 압축력에 대한 후좌굴 해석 결과

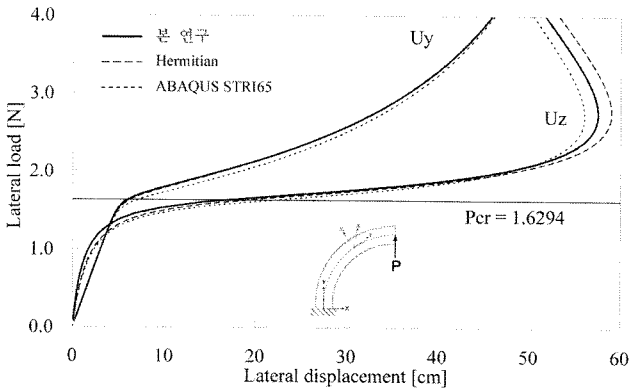


그림 5 일축 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보의 수직방향 수평력에 대한 후좌굴 해석 결과

3.2 이축 비대칭 단면을 갖는 직선 외팔보의 후좌굴 거동

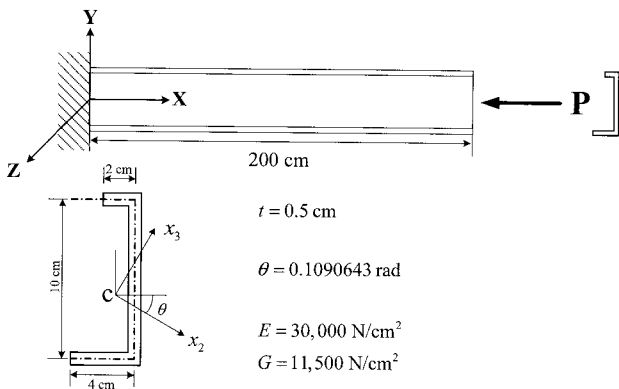


그림 6 이축 비대칭 단면을 갖는 직선 외팔보

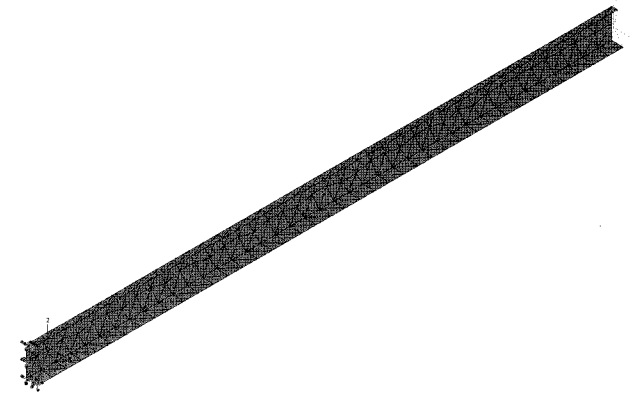


그림 7 이축 비대칭 단면을 갖는 직선 외팔보의 ABAQUS 셸 모델링

그림 6과 같이 이축으로 비대칭 형상을 단면으로 갖는 직선 외팔보에 대한 좌굴 안정 해석과 후좌굴 해석을 수행한다. 자유단의 도심에 축방향 압축력이 가해졌을 때 횡-비틀림 좌굴에 의하여 Z방향으로 변형하는 거동을 해석을 통하여 규명하고자 한다. 후좌굴 거동을 모사하기 위하여 imperfection 하중을 자유단에 -Z방향으로 P/1000만큼 가하였다. 이 연구에서 개발된 가장 변형도 박벽 보요소 10개를 사용하여 모델링하였으며, 검증을 위하여 ABAQUS를 이용하여 그림 7에 도시된 바와 같은 148개의 노드와 60개의 STRI65 셸요소를 사용하여 해석한 결과와 비교하였다. 위의 예제로 마찬가지로 기존의 3차 Hermitian 박벽 보요소로 해석한 결과와 비교하였다.

이축 비대칭 단면에 대한 단면 상수 역시 김문영(2002)의 단면 상수 자동 산정 프로그램을 이용하여 계산하였으며, 부재 주축이 회전된 축에 대한 단면 상수를 아래 표 3과 같이 도출하여 해석에 사용하였다.

좌굴 안정성 해석 수행 결과는 표 4에 보인 바와 같으며, 이 연구의 결과가 3차 Hermitian 박벽 보요소나 ABAQUS 보다 다소 작은 경향을 보이고 있으나, 그 차이가 2% 이내로 미미하였다. 축방향 압축력에 의해 발생한 횡-비틀림 좌굴 후의 거동을 해석한 결과는 그림 8과 같다. 기존의 3차 Hermitian 보요소의 해석 결과와 상당히 유사하며 다소나마 ABAQUS 셸요소에 근접한 결과를 얻었다.

표 3 일축 비대칭 단면의 단면 상수

항목	값	항목	값	항목	값
A	8cm ²	A ₂	1.51452cm ²	A ₃	4.46252cm ²
A _R	37.74753cm ²	J	0.666667cm ⁴	I ₂	114.87204cm ⁴
I ₃	7.54463cm ⁴	I _φ	408.33333cm ⁶	I _{φ2}	-182.4134cm ⁶
I _{φ3}	-18.97566cm ⁶	e ₂	1.58797cm	e ₃	-2.51512cm
β ₂	0.57706cm	β ₃	5.93192cm	β _φ	0.04592cm

표 4 이축 비대칭 단면을 갖는 외팔보의 안정 해석 결과

해석 방법	축방향 압축력의 좌굴 하중 [N]
본 연구	13.785
3차 Hermitian	13.902
ABAQUS STRI65	14.115

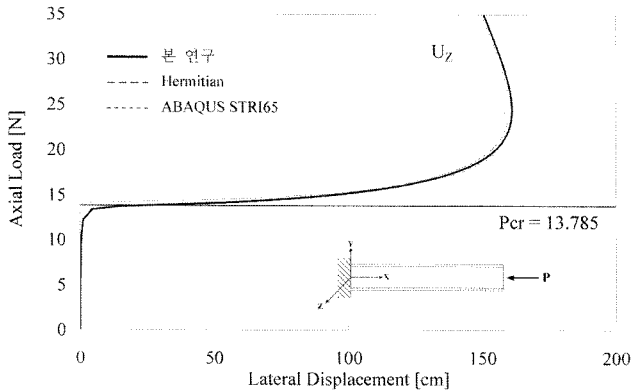


그림 8 이축 비대칭 단면을 갖는 직선 외팔보의 축방향 압축력에 대한 후좌굴 해석 결과

4. 결 론

Timoshenko의 전통적인 보 이론에 근거한 요소는 유한 요소로의 이산화 과정에서 전단에 의한 효과를 과대평가하는 전단 잠김 현상이 발생하게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 여러 방법이 그간 개발되어 왔고, 이 연구에서는 그 중에서 가정 변형도법을 적용하여 공간 박벽 뼈대요소를 개발하였다. 이 방법을 이용하여 2개의 노드를 갖는 직선 보요소에서의 한 요소내의 변형도가 일정하다고 가정하여 형상함수를 유도하고 이를 바탕으로 가상일의 원리에 따른 탄성강성행렬과 기하강성행렬을 구성하였다. 그리고 불평형 하중 산정을 위해서 corotational formulation을 이용하여 순수 변위의 개념을 바탕으로 일반화된 강성행렬을 구성하였다. 더불어서 부재에 발생한 변형에 의한 부재 길이의 변화를 고려하기 위한 bowing effect를 정밀하게 계산하였다.

이 연구에서 개발된 요소는 기존의 3차 Hermitian 다항식을 이용한 등매개변수 요소보다 간결한 형태를 띠게 되며, 재료의 물성치 및 단면 상수가 형상함수에 포함되어 있지 않게 된다. 또한 도심과 전단중심에 대하여 별도로 단면 상수를 사용하던 것을 모두 도심에 대한 값으로 사용하였다. 따라서 재료 비선형을 고려하게 될 경우 발생할 수 있는 물성치 및 단면 상수의 변화를 계속해서 고려하면서 해석을 수행할 수 있는 장점을 가지게 된다.

개발된 요소를 검증하기 위하여 기존의 3차 Hermitian 요소와, ABAQUS 쉘요소로 해석한 결과를 동시에 비교하였

다. 일축으로 비대칭 단면을 갖는 곡선 외팔보와 이축으로 비대칭인 직선 외팔보에 대해서 각각 안정해석을 수행한 결과 이 연구에서 개발된 요소가 적절한 결과를 보여줌을 확인할 수 있었다. 또한 횡-비틀림 좌굴이 발생한 이후의 대변위 거동을 해석한 결과 좋은 일치를 보여주었다.

따라서 그간 쉘요소에 주로 사용되던 가정 변형도법을 박벽 보요소에 적용하면 전단 잠김 현상을 방지하면서 재료 비선형 해석에도 대응할 수 있으며, 해석의 성능이나 정밀성에서도 기존의 요소에 뒤떨어지지 않는 우수성을 가지고 있음을 확인하였다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었으며, 연구 지원에 대하여 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- 김문영, 김남일, 윤희택 (2002) 전단변형을 고려한 비대칭 박벽보의 엄밀한 정적 요소강도행렬, 대한토목학회 논문집, 22(1A), pp.75~84.
- 김문영, 장승필 (1990) 전단변형을 고려한 평면뼈대 구조물의 기하적인 비선형 해석, 대한토목학회 논문집, 10(1), pp.27~36.
- 김문영, 장승필 (1990) 보존력 및 비보존력을 받는 평면뼈대 구조물의 기하적 비선형 해석, 대한토목학회 논문집, 10(1), pp.17~26.
- 김문영, 최명수, 장영, 장승필 (2002) 박벽보의 응력해석을 위한 단면상수의 자동산정, 한국강구조학회 논문집, 14(1), pp.41~49.
- 김성보, 김문영, 장승필 (2002) 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 위한 개선이론, 대한토목학회 논문집, 22(2A), pp.189~200.
- 김성보, 김문영, 장승필 (2002) 비선형 유한요소해석 기법을 이용한 박벽 공간 뼈대구조의 극한강도해석, 대한토목학회 논문집, 22(1A), pp.53~64.
- 박효기, 김성보, 김문영, 장승필 (1999) 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀 후좌굴 유한요소해석, 한국강구조학회 논문집, 11(2), pp.153~165.
- 최명수, 김문영, 장승필 (2000) 가정변형도 쉘요소를 이용한 보강된 쉘구조의 기하학적 비선형해석, 한국전산구조공학회 논문집, 13(2), pp.209~220.
- Ashwell, D. G., Sabir, A. B., Roberts, T. M. (1971) Further studies in the application of curved finite elements to circular arches. *International*

- Journal of Mechanical Sciences*, 13, pp.507~517.
- Bathe, K. J., Dvorkin, E. N.** (1986) A formulation of general shell element - the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, pp.697~722.
- Choi, J-K., Lim, J-K.** (1995) General curved beam elements based on the assumed strain fields. *Computers & Structures*, 55(3), pp.379~386.
- Huang, H. C.** (1987) Implementation of assumed strain degenerated shell elements. *Computers & Structures*, 25, pp.147~155.
- Huang, H. C.** (1987) Membrane locking and assumed strain shell elements. *Computers & Structures*, 27, pp.671~677.
- Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.** (1994) Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams I: analytical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.4097~4115.
- Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.** (1994) Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams II: numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.4117~4140.
- Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.** (1996) Spatial stability analysis of thin-walled space frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp.499~525.
- Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.** (2001) Spatial postbuckling analysis of nonsymmetric thin-walled frames. II. Geometrically nonlinear FE procedures. *ASCE Journal of engineering mechanics*, 127(8), pp.769~778.
- Kim, M. Y., Chang, S. P., Park, H. G.** (2001) Spatial postbuckling analysis of nonsymmetric thin-walled frames. I: theoretical consideration based on semitangential property. *ASCE Journal of engineering mechanics*, 127(8), pp.769~778.
- Kim, M. Y., Kim, N. I., Yun, H. T.** (2003) Exact dynamic and static stiffness matrices of shear deformable thin-walled beam-columns. *Journal of Sound and Vibration*, 267, pp.29~55.
- Kim, M. Y., Yun, H. T., Kim, N. I.** (2003) Exact dynamic and static element stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beam-columns. *Computers & Structures*, 81, pp.1425~1448.
- Kim, N. I., Fu, C. C., Kim, M. Y.** (2007) Stiffness matrices for flexural-torsional/lateral buckling and vibration analysis of thin-walled beam. *Journal of Sound and Vibration*, 299, pp.739~756.
- Kim, N. I., Lee, B. J., Kim, M. Y.** (2004) Exact element static stiffness matrices of shear deformable thin-walled beam-columns. *Thin-walled Structures*, 42, pp.1231~1256.
- Kim, N. I., Kim, M. Y.** (2005) Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects. *Thin-walled Structures*, 43, pp.701~734.
- Kim, S. B., Kim, M. Y.** (2000) Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures*, 22, pp.446~458.
- Minghini, F., Tullini, N., Laudiero, F.** (2007) Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.
- Prathap, G., Babu, C. R.** (1981) A linear thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, pp.1583~1600.
- Stolarski, H., Belytschko, T.** (1981) Membrane locking and reduced integration for curved elements. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 49, pp.172~178.

부록 A. 강성행렬

〈A.1 탄성강성행렬〉

$$K_c = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{GA_2^s}{L} & 0 & -\frac{e_3 GA_2^s}{L} & 0 & \frac{GA_2^s}{2} & \frac{e_3 GA_2^s}{2} & 0 & 0 & -\frac{GA_2^s}{L} & 0 & \frac{e_3 GA_2^s}{L} & 0 & \frac{GA_2^s}{2} & \frac{e_3 GA_2^s}{2} \\ \frac{GA_3^s}{L} & \frac{e_2 GA_3^s}{L} & -\frac{GA_3^s}{2} & 0 & -\frac{e_3 GA_3^s}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GA_3^s}{L} & -\frac{e_2 GA_3^s}{L} & -\frac{GA_3^s}{2} & 0 & -\frac{e_3 GA_3^s}{2} \\ \frac{AA+GJ}{L} & -\frac{e_2 GA_3^s}{2} & -\frac{e_3 GA_3^s}{2} & -\frac{AA}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e_3 GA_3^s}{L} & -\frac{e_2 GA_3^s}{L} & -\frac{AA+GJ}{L} & -\frac{e_2 GA_3^s}{2} & -\frac{e_3 GA_3^s}{2} & -\frac{AA}{2} \\ 0 & \frac{EI_2 + GA_3^s L}{L + 4} & 0 & \frac{EI_{\phi 2} + e_2 GA_3^s L}{L + 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GA_3^s}{2} & \frac{e_2 GA_3^s}{2} & -\frac{EI_2 + GA_3^s L}{L + 4} & 0 & -\frac{EI_{\phi 2} + e_2 GA_3^s L}{L + 4} \\ 0 & \frac{EI_3 + GA_3^s L}{L + 4} & \frac{EI_{\phi 3} + e_3 GA_3^s L}{L + 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GA_2^s}{2} & 0 & \frac{e_3 GA_2^s}{2} & 0 & \frac{EI_3 + GA_3^s L}{L + 4} & \frac{EI_{\phi 3} + e_3 GA_3^s L}{L + 4} \\ 0 & \frac{GJL}{12} + \frac{EI_{\phi} + AAL}{L + 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e_3 GA_2^s}{2} & \frac{e_2 GA_2^s}{2} & \frac{AA}{2} & -\frac{EI_{\phi 2} + e_2 GA_3^s L}{L + 4} & \frac{EI_{\phi 3} + e_3 GA_3^s L}{L + 4} & \frac{GJL}{12} + \frac{EI_{\phi} + AAL}{L + 4} \end{bmatrix}$$

여기서, $AA = e_3^2 GA_2^s + e_2^2 GA_3^s + GA_1^s$

〈A.2 기하 강성행렬〉

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_1^p}{L} & 0 & \frac{M_2^p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_1^p}{L} & 0 & \frac{M_2^q}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_1^p}{L} & \frac{M_3^p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_1^p}{L} & \frac{M_3^q}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{M_2^p + M_3^p}{2L} & -\frac{2M_3^p + M_3^q}{6} & \frac{2M_2^p - M_2^q}{6} & -\frac{M_2^p + M_2^q}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_2^p - M_2^q}{L} & \frac{M_3^p - M_3^q}{24} & \frac{M_2^p + M_2^q}{6} & \frac{M_3^p + M_3^q}{6} & \frac{M_2^p + M_2^q}{6} & \frac{M_2^p + M_2^q}{12} \\ -\frac{F_1^p}{12} & 0 & \frac{M_3^p - M_3^q}{24} & \frac{M_2^p - M_2^q}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M_3^p + M_3^q}{6} & \frac{F_1^p}{12} & \frac{M_1^p}{2} & -\frac{M_3^p + M_3^q}{24} \\ -\frac{F_1^p}{12} & \frac{M_2^p + M_2^q}{24} & \frac{M_3^p - M_3^q}{24} & \frac{M_2^p - M_2^q}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_2^p + M_2^q}{6} & -\frac{M_2^p}{2} & \frac{F_1^p}{12} & \frac{M_2^p - M_2^q}{24} \\ -\frac{M_2^p + M_3^p}{24} & \frac{M_2^p + M_2^q}{24} & -\frac{M_3^p + M_3^q}{24} & \frac{M_2^p - M_2^q}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_2^p + M_2^q}{12} & -\frac{M_3^p + M_3^q}{24} & \frac{M_2^p - M_2^q}{24} & \frac{M_2^p - M_2^q}{24} \end{bmatrix}$$

