

이동최소제곱 유한차분법을 이용한 계면경계를 갖는 이종재료의 열전달문제 해석

Heat Transfer Analysis of Bi-Material Problem with Interfacial Boundary Using Moving Least Squares Finite Difference Method

윤 영 철† 김 도 완*

Yoon, Young-Cheol Kim, Do-Wan

(논문접수일 : 2007년 11월 15일 ; 심사종료일 : 2007년 11월 29일)

요 지

본 연구는 계면경계에서 특이성을 갖는 이종재료 열전달문제를 효율적으로 해석할 수 있는 이동최소제곱 유한차분법을 제시한다. 이동최소제곱 유한차분법은 격자망(grid)없이 절점만으로 이동최소제곱법을 이용하여 Taylor 다항식을 구성하고 차분식을 만들어 미분방정식을 직접 푼다. 초평면함수 개념에 근거한 켄기함수를 이동최소제곱 센스(sense)로 근사식에 매입하여 켄기거동과 미분 점프에 따른 계면경계 특성을 효과적으로 묘사하고 고속으로 미분을 근사하는 이동최소제곱 유한차분법의 강점을 발휘하도록 했다. 서로 다른 열전달계수를 갖는 이종재료 열전도문제 해석을 통해 이동최소제곱 유한차분법이 계면경계문제에서도 뛰어난 계산효율성과 해의 정확성을 확보할 수 있음을 보였다.

핵심용어 : 계면경계, 이종재료, 열전달문제, 이동최소제곱 유한차분법, 초평면함수, 켄기함수

Abstract

This paper presents a highly efficient moving least squares finite difference method (MLS FDM) for a heat transfer problem of bi-material with interfacial boundary. The MLS FDM directly discretizes governing differential equations based on a node set without a grid structure. In the method, difference equations are constructed by the Taylor polynomial expanded by moving least squares method. The wedge function is designed on the concept of hyperplane function and is embedded in the derivative approximation formula on the moving least squares sense. Thus interfacial singular behavior like normal derivative jump is naturally modeled and the merit of MLS FDM in fast derivative computation is assured. Numerical experiments for heat transfer problem of bi-material with different heat conductivities show that the developed method achieves high efficiency as well as good accuracy in interface problems.

Keywords : Interfacial boundary, bi-material, heat transfer problem, moving least squares finite difference method, hyperplane function, wedge function

1. 서 론

1990년대 중반에 'Meshless Method'라 명명된 무요소법 (Belytschko 등, 1994)이 개발된 이후로 요소(element), 더 정확히 말하자면 요소간 연관성(connectivity)의 제약을 받지 않는다는 장점 때문에 균열전파와 같이 경계면이 변화하는 문제를 중심으로 활발하게 그 적용이 연구되었다. 무요

소법에서는 성장하는 균열면을 따라 추가적으로 요소를 재생성할 필요가 없으며 불연속면 묘사를 위한 근사함수 수정도 비교적 용이하다. 그러나 무요소 근사함수는 다항식이 아니라 Gauss 수치적분의 정확성이 보장되지 못할 뿐만 아니라 근사함수의 미분계산 과정이 시간소모적이다. 계방정식을 풀어 각 절점에서 얻어진 절점계수(nodal parameter)는 절점해(nodal solution)와 일치하지 않아 절점해 계산을 위해

† 책임저자, 정회원 · 명지전문대학 토목과 조교수

Tel: 02-300-1135 ; Fax: 02-303-1132

E-mail: ycyoon@mjc.ac.kr

* 한양대학교 응용수학과 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 2월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

서는 재계산 과정(post process)이 필요하다. 더욱이 필수 경계조건의 처리는 무요소법의 비약적인 발전을 저해하는 대표적인 장애물로서 수치해석 코드 작성이나 계산 효율성 측면에서 매우 불리하다. 본 연구에서 다루는 계면경계문제(interface problem) 역시 내부계면의 존재로 인해 무요소법이 강점을 가질 수 있는 분야이지만 전술된 이유로 인해 그 동안 적용이 활발하지 못했다.

불연속 문제를 해결하기 위한 유한차분법 기반의 수치해석법으로는 Tu와 Peskin(1992)이 개발한 IBM(Immersed Boundary Method)과 LeVeque과 Li(1994)가 개발한 IIM(Immersed Interface Method)이 대표적이다. 윤영철 등(2007a)은 이동최소제곱법을 이용한 절점기반의 Taylor 다항식의 전개를 통해 함수와 그 미분을 근사할 수 있는 격자망(grid)없는 이동최소제곱법을 제안했다. 이 수치기법은 다시 다양한 응력집중문제에 적용되었고, 이동최소제곱 유한차분법이라 명명되었다(윤영철 등, 2007b, 2007c).

본 논문은 이중재료의 계면경계문제를 풀기 위한 이동최소제곱 유한차분법을 제시한다. 본 연구는 격자망을 바탕으로 계면경계의 특이성을 차분식에 반영한 IBM 또는 IIM과는 근본적으로 다른 절점만을 이용한 계면경계문제 해석법을 제안한다. 미분을 고속으로 근사하는 이동최소제곱 유한차분법의 장점을 잃지 않으면서 췌기거동으로 인한 특이해(singular solution) 문제를 효과적으로 해석할 수 있는 수치기법을 제시한다.

2. 계면경계의 모형화

2.1 계면경계 주변의 해의 거동

계면경계문제의 지배방정식은 형태 면에서 Laplace문제나 Poisson문제와 큰 차이가 없으나 그 해는 계면경계(interface)를 따라 췌기거동(wedge behavior)을 보이고 미분값이 점프(jump)를 나타낸다. 계면경계를 따라 특이원(singular source)이 놓여 있거나 재료물성치가 상이한 이중재료가 합성된 경우가 대표적이다. 계면경계문제에서 췌기거동이 정확히 묘사될 때 미분의 점프도 정확히 묘사되기 때문에 췌기해(wedge solution)를 모형화할 수 있는 췌기함수(wedge function)의 개발이 중요하다. 그림 1은 계면경계 주변의 췌기해가 정규부분(regular part)과 특이부분(singular part)으로 분해될 수 있음을 보여준다. 그림 2는 췌기함수에서 분해된 특이부분의 미분인데, 계면경계를 지나면서 점프가 나타난다.

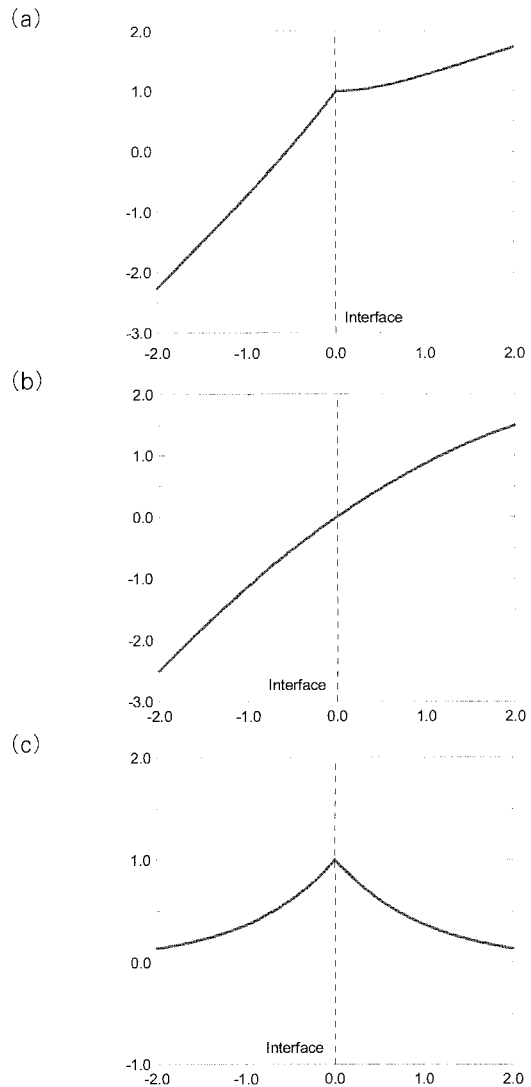


그림 1 췌기해의 분해 (a) 계면경계를 지나는 췌기해 (b) 췌기해의 정규부분 (c) 췌기해의 특이부분

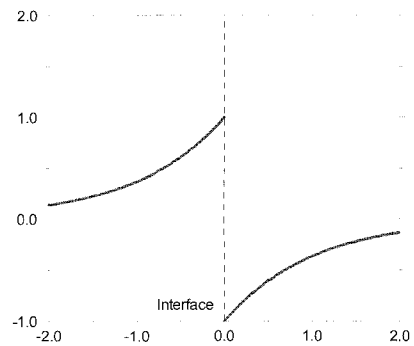


그림 2 췌기해의 특이부분의 미분

2.2 계면경계의 모형화와 초평면함수(Hyperplane function)

이동최소제곱 유한차분법의 차분식에 췌기거동의 효과를 반영하기 위해서는 계면경계의 기하학적 정보를 함수의 근사

에 포함시켜야 한다. 이동최소제곱법으로 Taylor 다항식을 구성할 때 계면경계의 기하학적 묘사가 복잡하면 함수의 미분근사 과정이 복잡해진다. 본 절은 계면경계의 기하학적 정보와 췌기거동을 동시에 반영할 수 있는 새로운 방법을 제시한다.

이동최소제곱법에 의한 Taylor 전개시 함수값을 계산하려는 위치 \bar{x} 에서 가장 가까운 계면경계 상의 점을 투영점 (projection point)이라 부르고 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\bar{x}_\Gamma := \text{proj}_\Gamma \bar{x} = \arg \left(\inf_{x \in \Gamma} \|x - \bar{x}\| \right), \quad \bar{x}_\Gamma \in \Gamma \quad (1)$$

여기서 Γ 는 계면경계이다. \bar{x} 와 투영점 \bar{x}_Γ 를 연결하는 벡터를 이용하여 단위 크기를 갖는 방향벡터를 다음과 같이 결정한다.

$$\mathbf{n}_\Gamma(\bar{x}) := \frac{\bar{x} - \bar{x}_\Gamma}{\|\bar{x} - \bar{x}_\Gamma\|} \quad (2)$$

이제 방향벡터와 투영점을 이용하여 접선초평면함수(tangential hyperplane function) 또는 초평면함수(hyperplane function)

$$H_{\bar{x}}(y) := \mathbf{n}_\Gamma(\bar{x}) \cdot (y - \bar{x}_\Gamma) \quad (3)$$

를 정의하면, 임의의 위치 y 에서 초평면함수값을 구할 수 있다. 초평면함수식은 기하학적으로 투영점에서 그런 접선을 가리키며, 초평면함수값은 접선으로부터 고려하는 위치까지의 부호를 갖는 거리함수 값이다.

그림 3에는 초평면함수의 개념을 도식적으로 나타냈다. 초평면함수로 표현되는 계면경계는 실제 계면경계를 선형근사하지만 직선 세그먼트로 연결된 다중직선(poly line)으로 근사하는 개념과 다르다. 이동최소제곱법에 의한 Taylor 전개시 접선초평면함수가 결정되면 이웃절점들은 이 접선초평면을 계면경계로 인식한다. 따라서 초평면함수는 오직 \bar{x} 만의 함수가 되고 근사에 포함된 다른 이웃절점들과는 상관없게 되

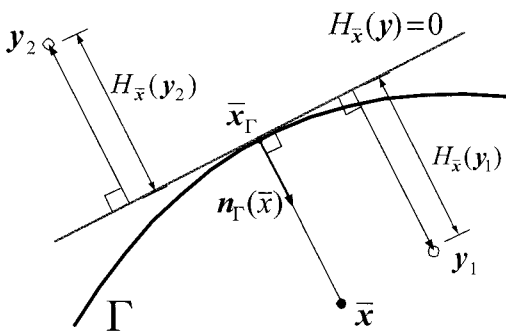


그림 3 계면경계 모형화를 위한 초평면함수의 개념

어 식 (3)의 미분이 간단해진다. 만약, 초평면함수가 근사에 포함된 다른 절점들과 연관되면 미분계산이 복잡해져 실제 계산이 매우 어렵다. 본 연구에서 사용한 초평면함수에 대한 상세한 이론적 배경은 Kim 등(2007a)을 참조할 수 있다.

2.3 췌기함수(Wedge function)

계면경계 주변에서 해의 특이거동을 묘사하기 위한 췌기함수(wedge function)는 초평면함수 개념을 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$b_\Gamma(x, \bar{x}) := |H_{\bar{x}}(x)| \quad (4)$$

거리함수를 의미하는 췌기함수는 계면경계를 지나면서 날카로운 각을 갖고 꺾이는 해의 거동을 묘사한다. 췌기함수를 방향벡터 \mathbf{n}_Γ 에 대해 미분하면 다음과 같이 초평면함수의 부호만 남게 되어 계면경계를 지나면서 함수값에 점프가 일어난다.

$$\frac{\partial b_\Gamma(x, \bar{x})}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} = \text{sign}(H_{\bar{x}}(x)) \quad (5)$$

위의 미분값의 점프값을 취하면

$$\left[\frac{\partial b_\Gamma(x, \bar{x})}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} \right] = [\text{sign}(H_{\bar{x}}(x))] = 2 \quad (6)$$

이고, 항상 2의 크기를 갖는다. 이 때 []는 점프값을 의미한다. 본 해석기법은 계면경계 Γ 상에서는 미분계산을 전혀 하지 않기 때문에 수학적인 문제를 일으키지 않는다. 그림 4에서 보듯이 본 연구에서 사용하는 선형 췌기함수는 미분시 부호함수(sign function)로 간단하게 표현되어 계면경계의 묘사과정이 간단하다.

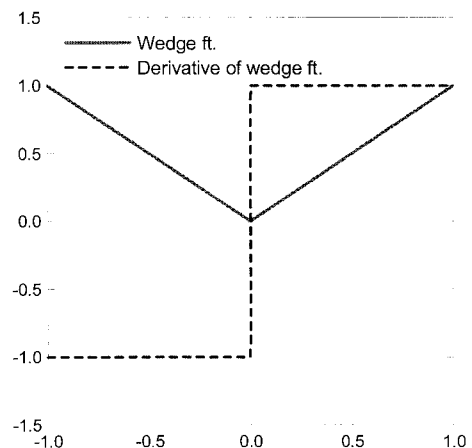


그림 4 계면경계문제 해석을 위한 췌기함수와 그 미분

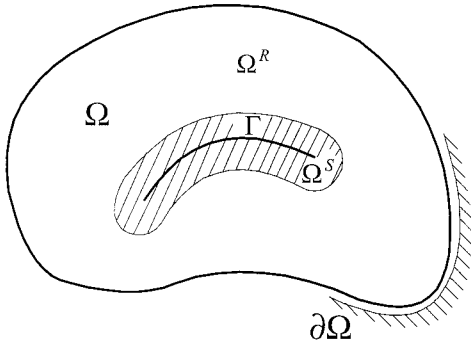


그림 5 계면경계문제 해석을 위한 영역 분리

3. 미분특이성을 갖는 함수의 근사

3.1 계면경계문제의 해의 분해

특이성을 갖는 이중재료 열전달문제의 해석을 위해 그림 5와 같이 특이거동의 지배를 받는 특이영역(Ω^S)과 그 외의 정규영역(Ω^R)을 따로 분리한다. 전체영역(Ω)은 특이영역, 정규영역, 일반경계($\partial\Omega$), 계면경계(Γ)로 구성된다.

특이영역 Ω^S 에서 썩기거동을 나타내는 $u_\Gamma(\mathbf{x})$ 를 분리하면 해는 식 (7)과 같이 정규부분(regular part)와 특이부분(singular part)으로 분해된다.

$$u(\mathbf{x}) = \underbrace{u(\mathbf{x}) - u_\Gamma(\mathbf{x})}_{\text{Regular part}} + \underbrace{u_\Gamma(\mathbf{x})}_{\text{Singular part}} \quad (7)$$

특이영역의 해에서 정규부분만 다시 쓰면 다음과 같다.

$$u(\mathbf{x}) - u_\Gamma(\mathbf{x}) \in C^l(\bar{\Omega}), \quad l \leq m \quad (8)$$

여기서 m 은 다항식의 일관성 차수(consistency order)이다. 특이영역 해의 정규부분은 C^l 연속성을 가지므로 일반적인 다항식으로 근사할 수 있다. 해의 특이부분은 함수공간 $C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^m(\bar{\Omega} \setminus \Gamma)$ 에 속하므로 일반적인 다항식으로는 근사할 수 없고 새로운 함수가 필요하다(Kim 등, 2007b). $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ 는 Lipschitz 연속함수 공간을 의미한다. 그러나 정규영역 Ω^R 에서는 $u_\Gamma(\mathbf{x}) = 0$ 이므로 해는 정규부분만 갖고 다항식으로 정확히 근사할 수 있다.

3.2 정규해의 근사

이동최소제곱법을 이용해 Taylor 전개식의 계수 즉, 주어진 함수의 미분근사값을 계산하는 수치기법은 윤영철 등(2007a, 2007b)이 이미 제시한 바 있으며, 본 연구에서는 동일한 기법을 정규해 근사에 사용한다. 본 절에서는 자세한

정규해 근사과정은 생략하고 최종적인 결과를 중심으로 간단히 언급한다. 1차원 문제에서 미분 가능한 함수 $u(\mathbf{x}) \in C^m(\bar{\Omega})$ 가 주어졌을 때, 한 점 $\bar{\mathbf{x}}$ 를 기준으로 $u(\mathbf{x})$ 의 Taylor 급수 전개식에서 m 차 이상의 고차항을 제외한 다항식은 다음과 같다.

$$u_L^m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) := u(\bar{\mathbf{x}}) + \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \frac{\rho}{1!} u^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + \dots + \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right)^m \frac{\rho^m}{m!} u^{(m)}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}_m^T \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (9)$$

여기서 $\bar{\mathbf{x}}$ 는 함수값을 계산하려는 위치이다. ρ 는 함수값을 계산하는 영향영역을 나타내며, 이동최소제곱법과 조합될 때 가중함수(weight function)의 반경을 의미한다. 미지의 미분계수($u(\bar{\mathbf{x}}), u^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}), \dots$)를 계산하기 위해 근사에 포함된 절점들을 이용하여 다음과 같이 이동최소제곱 잔차식을 구성한다.

$$J := \sum_{l \in \Lambda_{\bar{\mathbf{x}}}} w \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \left[\mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}_l, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) - u_l \right]^2 \quad (10)$$

위 식의 $w\left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho}\right)$ 는 임의의 형상을 갖는 가중함수이고, u_l 는 절점해이다. 잔차식 J 를 최소화하여 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 를 계산한 후 $\bar{\mathbf{x}}$ 를 \mathbf{x} 로 치환하면 Taylor 전개식을 구성하는 미지계수를 쉽게 얻을 수 있고, 이로부터 \mathbf{x} 에서의 함수근사값과 미분근사값을 얻는다.

다차원의 경우에도 1차원 경우와 동일한 방법으로 함수와 미분값을 근사할 수 있으며, 식 (11)과 같이 형상함수를 포함한 형태로 정리할 수 있다(윤영철 등, 2007b).

$$\begin{pmatrix} D_{\mathbf{x}}^{(0, \dots, 0)} u(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ D_{\mathbf{x}}^{(0, \dots, m)} u(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) & \dots & \Phi_N(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(0, \dots, m)}(\mathbf{x}) & \dots & \Phi_N^{(0, \dots, m)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (11)$$

Taylor 다항식의 m 차까지의 미분계수들은 m 차까지의 형상함수의 미분과 절점해의 조합을 통해 얻는다. 편의상 다중지수 표기법(multi-index notation)을 사용했고, 미분연산자는 $D_{\mathbf{x}}^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ 로 표기한다. 식 (11)은 기저다항식 $\mathbf{p}_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 에서 채택한 m 차 다항식에 대해 재생성(reproducing property)을 갖기 때문에 다항식기저의 조합으로 표시될 수 있는 함수와 그 미분은 정확하게 재생할 수 있다.

3.3 특이해의 근사

특이해를 근사하기 위해 식 (9)의 Taylor 다항식에 썩기

함수를 추가하여 다음과 같은 식을 구성한다.

$$u_L(x, \bar{x}) := u(\bar{x}) + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right) \frac{\rho}{\Gamma} u^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^m \frac{\rho^m}{m!} u^{(m)}(\bar{x}) + \alpha(\bar{x}) b_\Gamma(x, \bar{x}) \quad (12)$$

특이해의 계면경계에 대한 수직미분 점프(normal derivative jump)는 식 (12)의 수직미분을 취하여 근사한다. 췌기함수를 제외한 나머지 부분은 미분 점프를 갖지 않으므로 수직 미분점프는 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma = \left[\frac{\partial u_L(x, \bar{x})}{\partial n_\Gamma}\right] = \alpha(\bar{x}) \left[\frac{\partial b_\Gamma(x, \bar{x})}{\partial n_\Gamma}\right] \quad (13)$$

췌기함수의 수직미분 점프값은 식 (6)에서 보듯이 기지의 값이므로 미지계수 $\alpha(\bar{x})$ 는 다음과 같다.

$$\alpha(\bar{x}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma \quad (14)$$

여기서 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma$ 는 지배 미분방정식의 계면경계에 대한 경계조건으로부터 주어진다. 수직미분 점프값이 경계조건에서 직접 주어지지 않은 경우에는 계면경계조건으로부터 찾을 수 있다.

식 (12)에 $\alpha(\bar{x})$ 값을 대입하여 정리하면 다음과 같이 특이해를 근사할 수 있는 수정된 Taylor 근사식을 얻는다.

$$u_L(x, \bar{x}) = \mathbf{p}_m^T(x, \bar{x}) \mathbf{a}(\bar{x}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_{\bar{x}}(x)| \quad (15)$$

만약 계면경계조건에서 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma$ 가 주어지면 $\mathbf{a}(\bar{x})$ 는 윗 식의 유일한 미지벡터이다. $\mathbf{a}(\bar{x})$ 는 췌기거동과는 상관없는 정규부분을 근사하기 위한 미지벡터이므로 정규해를 근사하는 경우와 마찬가지로 계산할 수 있다. 계산된 근사식을 형상함수를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$D_x^{(0, \dots, 0)} u(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_I \Phi_I(\mathbf{x}) \left\{ u_I - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_x(\mathbf{x}_I)| \right\}}_{\text{Regular part}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_x(\mathbf{x})|}_{\text{Singular part}} \quad (16)$$

여기서 $D_x^{(0, \dots, 0)} u(\mathbf{x})$ 는 0차 미분근사이므로 $u(\mathbf{x})$ 의 근사식을 의미한다. 윗 식에서 정규부분을 보면 절점해 u_I 에서 각

절점에 대한 췌기거동의 기여부분이 이동최소제곱 개념(sense)으로 제외되었고, 췌기거동은 특이부분과 별도로 묘사되어 있다. 다차원의 경우, 특이해의 근사식에 대한 m 차까지의 미분근사는 식 (11)과 유사하게 다음과 같은 형태로 얻어진다.

$$\begin{pmatrix} D_x^{(0, \dots, 0)} u(\mathbf{x}) \\ D_x^{(1, \dots, 0)} u(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ D_x^{(0, \dots, m)} u(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_N(\mathbf{x}) \\ \Phi_1^{(1, \dots, 0)}(\mathbf{x}), \dots, \Phi_N^{(1, \dots, 0)}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Phi_1^{(0, \dots, m)}(\mathbf{x}), \dots, \Phi_N^{(0, \dots, m)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\text{Regular part}} \begin{pmatrix} u_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_x(\mathbf{x}_1)| \\ u_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_x(\mathbf{x}_2)| \\ \vdots \\ u_N - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_x(\mathbf{x}_N)| \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma |H_x(\mathbf{x})| \\ n_1 \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Singular part}} \quad (17)$$

본 연구의 미분근사 과정은 실제로 미분값을 계산하는 과정이 거의 없다. 기존의 무요소법이 형상함수의 도함수 계산에 많은 시간이 필요했던 것과 비교하여 계산효율성을 획기적으로 향상시킨 것이다. 정규부분에서는 이동최소제곱법을 적용할 때 형상함수와 그 미분들이 동시에 얻어지기 때문에 미분계산이 필요 없고, 특이부분에서는 췌기함수의 미분계산이 간단하기 때문에 미분근사 과정이 효율적이다.

4. 이중재료 열전달문제 해석

4.1 계면경계문제의 정식화

계면경계를 갖는 이중재료 열전도문제의 지배 미분방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \text{ in } \Omega \setminus \Gamma \quad (18)$$

$$u = \bar{u} \text{ on } \partial\Omega \quad (19)$$

$$\left[\kappa \frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma = \bar{h} \text{ on } \Gamma \quad (20)$$

여기서 f 는 열원(heat source)이다. κ 는 열전도계수이고

이중재료는 서로 다른 열전도계수 값을 갖는다. 계면경계조건은 식 (20)과 같이 계면경계를 통과하는 열전도계수를 포함한 열의 수직미분(heat flux)의 점프값으로 주어진다. 이 때, $[u]_{\Gamma} = 0$ 이다

본 연구에서 제안한 수정된 Taylor 근사는 $\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\Gamma}$ 값을 미지수로 포함하기 때문에 계면경계 조건식을 다음과 같이 수정한다.

$$\left[\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\Gamma} = [\kappa]_{\Gamma} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\Gamma} + \langle \kappa \rangle_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\Gamma} \quad (21)$$

여기서 $\langle \rangle$ 는 계면경계의 양쪽으로 접근하는 함수값의 평균 값 $\langle f \rangle_{\Gamma} = \frac{f^+ + f^-}{2}$ 을 의미한다. 미지계수 $\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\Gamma}$ 값을 계면경계 조건식 식 (21)로부터 얻기 위해 새로운 미지계수를 도입하여 다음과 같이 근사한다.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\Gamma} = g(\mathbf{x}_{\Gamma}) = \sum_{l=1,2} N_l(\mathbf{x}_{\Gamma}) g_l \quad (22)$$

윗 식에서 g_l 는 계면경계에서의 수직 미분점프 크기를 근사하기 위한 새로운 미지계수이다. $N_l(\mathbf{x}_{\Gamma})$ 는 g_l 를 보간하기 위한 선형보간함수이다. g_l 이 부과되는 계면경계점은 해석영역을 모형화하기 위한 절점(node)과 상관없이 계면경계를 따라 배치된다. 2차원 문제의 경우, 계면경계 점프값 근사는 1차원 문제로 국한되기 때문에 계산이 간단하다.

이동최소제곱 유한차분법은 격자망(grid)의 구성없이 절점만으로 지배방정식을 직접 이산화한다. 2차원 계면경계문제의 지배방정식을 이산화과정을 살펴보면, 특이영역에서 $\mathbf{x}_j \in \Omega \setminus \Gamma$ 인 경우, 차분식을 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{aligned} & \kappa \left(\sum_I \left\{ \Phi_I^{(2,0)}(\mathbf{x}_j) + \Phi_I^{(0,2)}(\mathbf{x}_j) \right\} \right. \\ & \left. \left\{ u_I - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1,2} N_l(\mathbf{x}_{\Gamma}) g_l \right) \right\} \right) \left| H_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_j) \right| \\ & + \sum_I \left(\left\{ (D_x^{(1,1)} \kappa) \Phi_I^{(1,0)}(\mathbf{x}_j) + (D_x^{(0,1)} \kappa) \Phi_I^{(0,1)}(\mathbf{x}_j) \right\} \right. \\ & \left. \left\{ u_I - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1,2} N_l(\mathbf{x}_{\Gamma}) g_l \right) \right\} \right) \left| H_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_j) \right| \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1,2} N_l(\mathbf{x}_{\Gamma}) g_l \right) \left((D_x^{(1,1)} \kappa) n_x + (D_x^{(0,1)} \kappa) n_y \right) \\ & = f(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (23)$$

정규영역인 경우는 식 (11)을 적용하므로 차분식 계산이 더 간단하다. 경계에 놓인 절점 $\mathbf{x}_K \in \partial\Omega$ 인 경우, 차분식은 아래와 같다.

$$\sum_I \Phi_I(\mathbf{x}_K) u_I = \bar{u}(\mathbf{x}_K) \quad (24)$$

마지막으로 계면경계점 $\mathbf{x}_{\Gamma} \in \Gamma$ 인 경우, 새롭게 추가된 미지계수 g_l 의 위치에서 식 (21)을 이산화하여 다음과 같은 차분식을 구성한다.

$$\begin{aligned} & [\kappa]_{\Gamma} \left(\sum_I \left\{ \Phi_I^{(1,0)}(\mathbf{x}_{\Gamma}) + \Phi_I^{(0,1)}(\mathbf{x}_{\Gamma}) \right\} u_I \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1,2} N_l(\mathbf{x}_{\Gamma}) g_l \right) \right) \\ & \left(\sum_I \left\{ \Phi_I^{(1,0)}(\mathbf{x}_{\Gamma}) n_x + \Phi_I^{(0,1)}(\mathbf{x}_{\Gamma}) n_y \right\} \left| H_{\mathbf{x}_{\Gamma}}(\mathbf{x}_{\Gamma}) \right| \right) \\ & + \langle \kappa \rangle_{\Gamma} \sum_{l=1,2} N_l(\mathbf{x}_{\Gamma}) g_l = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

해석영역의 절점과 계면경계점에 대한 차분식을 정리하여 계방정식을 구성한다. 계방정식을 풀면 절점해 u_I 와 계면경계점에서의 수직 미분점프 값 g_l 가 얻어진다. 절점해와 미분점프에 대한 해를 식 (17)에 적용하면 해와 m 차까지의 미분을 쉽게 얻을 수 있다.

4.2 이중재료(Bi-material)의 열전달문제의 해석

본 절에서는 앞 절의 정식화를 이용하여 이중재료의 열전달문제를 해석한다(그림 6 참조). 식 (26)과 식 (27)은 각각 본 연구에서 고려하는 계면경계문제의 열원과 열전달계수이다.

$$f = 8r^2 + 4 \quad (26)$$

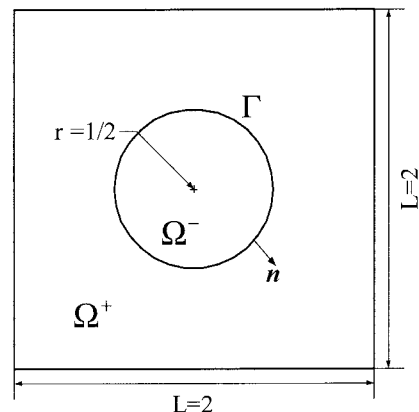


그림 6 상이한 열전달계수를 갖는 이중재료 열전달문제

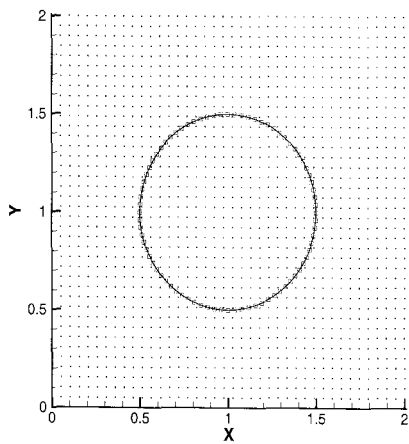


그림 7 이종재료 열전달문제 해석을 위한 절점 및 계면경계점 배치

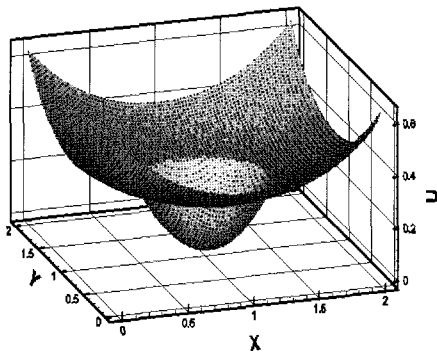
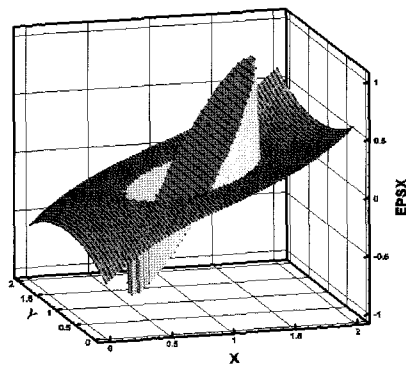


그림 8 κ^+/κ^- 가 크지 않는 경우의 온도분포($b=10$)

(a)



(b)

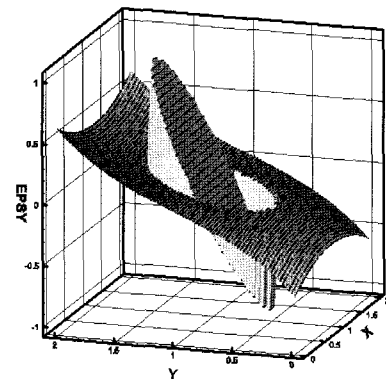


그림 9 κ^+/κ^- 가 크지 않는 경우의 온도 그라디언트 (a) x방향 미분, (b) y방향 미분

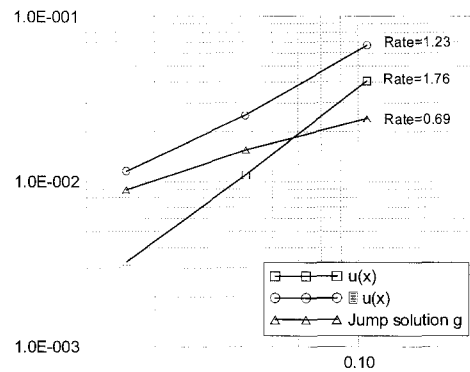


그림 10 κ^+/κ^- 가 크지 않는 경우($b=10$)의 해와 미분, 점프값의 수렴률

$$\kappa(r) = \begin{cases} \kappa^- = r^2 + 1, & r < 1/2 \\ \kappa^+ = b, & r \geq 1/2 \end{cases} \quad (27)$$

여기서 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이고, $b=10$ 또는 $b=100$ 을 적용했다. b 값의 크기에 따라 이종재료의 열전도계수 크기비가 결정된다. 이론해는 다음과 같다.

$$u(x) = \begin{cases} r^2, & r < 1/2 \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{8b} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{r^4}{2} + r^2 + C \log(2r) \right), & r \geq 1/2 \end{cases} \quad (28)$$

여기서 $C=0.1$ 을 적용했다. 그림 7은 문제해석을 위한 절점배치와 계면경계점의 배치를 보여준다.

먼저 두 재료의 열전도계수 크기비가 크지 않은 경우를 고려한다. $b=10$ 이면, 열전도계수비 κ^+/κ^- 는 8~10정도로 그리 크지 않다. 그림 8에는 해석결과로 얻은 온도분포를 도시했다. 그림 9에는 온도 그라디언트(temperature gradient)로서의 x, y 방향 미분값을 도시했다. 본 연구의 해석법이 미분값의 점프를 갖는 해를 성공적으로 묘사하고 있음을 알 수 있다. 날카로운(sharp) 미분점프를 묘사하지 못해 계면경계 주위에서 해가 떨리거나 smearing 되는 현상이 없는 것은 주목할 만하다.

그림 10은 절점해로 얻어진 해와 온도 그라디언트, 계면경계점의 점프값에 대한 수렴률을 보여준다. 해의 수렴률은 1.76, 그라디언트의 수렴률은 1.23으로 나타났으며 본 해석 기법이 2차 정확도(second order accuracy)에 근접하는 것을 알 수 있다. 2차 정확도의 획득에 대한 수학적 근거는 Kim 등(2007a)을 참조할 수 있다. 계면경계점의 수직미분 점프값도 잘 수렴하며, 계면경계점 개수에 상관없이 절점의 개수에 따라 안정적인 수렴률을 보인다.

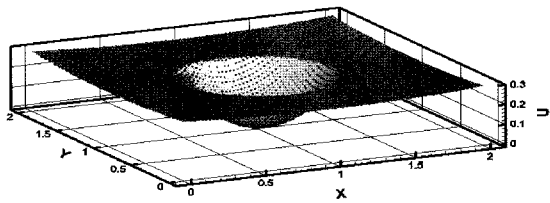
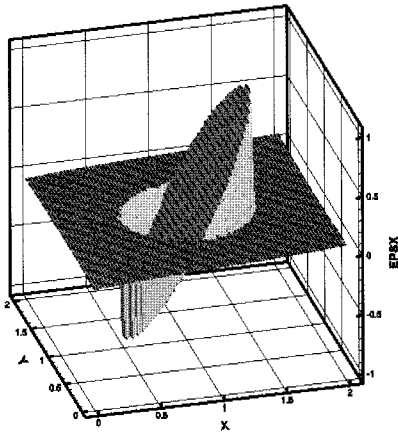


그림 11 κ^+/κ^- 가 큰 경우의 온도분포($b=100$)

(a)



(b)

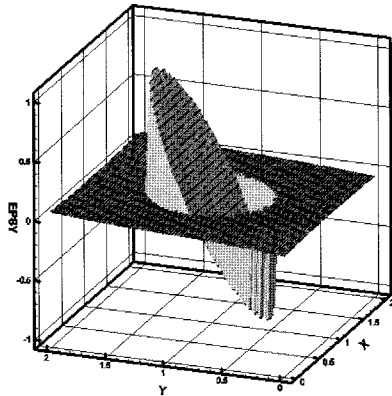


그림 12 κ^+/κ^- 가 큰 경우의 온도 그라디언트
(a) x방향 미분, (b) y방향 미분

다음으로 두 재료의 열전달계수 크기비가 큰 경우를 고려한다. $b=100$ 이면, 열전도계수비 κ^+/κ^- 가 80~100 정도로 상당히 커서 미분방정식의 성질(solvability)이 급격히 나빠진다. 수치해석법에 따라 해의 정확도가 매우 떨어지거나 미분방정식 자체가 잘 풀리지 않는 경우도 많다. 그림 11에는 온도 분포를, 그림 12에는 x , y 방향 미분값으로 주어지는 온도 그라디언트를 도시했다. 열전달계수 크기와 상관없이 썩기와 미분점프에 대해 날카로운 해를 얻었다.

그림 13은 열전도계수비 κ^+/κ^- 가 큰 경우의 해와 온도 그라디언트, 계면경계점의 점프값에 대한 수렴률을 보여준다. 해의 수렴률은 1.71, 미분 수렴률은 1.21로서 열전도계수비가 작은 경우와 거의 차이가 없으며, 본 연구의 해석법이 열전도계수의 크기비에 상관없이 2차 정확도를 보이는 것을 알

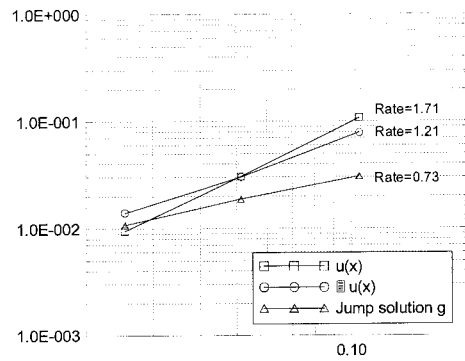


그림 13 κ^+/κ^- 가 큰 경우($b=100$)의 해와 미분, 점프값의 수렴률

수 있다. 이는 매우 고무적인 결과로서 본 연구에서 제안한 수치기법이 계산효율성 뿐만 아니라 정확도 면에서도 우수하다는 것을 보여준다.

5. 결 론

본 논문은 이동최소제곱 유한차분법(MLS FDM: Moving Least Squares Finite Difference Method)이라는 새로운 수치해석기법을 이용하여 계면경계를 갖는 이중재료 열전도문제의 해석기법을 제시했다. 제안한 수치기법은 이동최소제곱법을 이용해 Taylor 전개식을 구성하여 미분을 근사하는 계산의 효율성과 수치적분을 배제하고 미분방정식을 직접 이산화하는 계산의 간편함에 기인한 장점을 특이해를 갖는 계면경계문제에서도 성공적으로 발휘한다. 기존의 수치해석 방법에서 사용되지 않았던 초평면함수 개념을 이용하여 계면경계의 기하학적 특성을 함수와 미분 근사식에 매입하는 방법을 새롭게 제안했다. 초평면함수를 이용한 썩기함수는 이동최소제곱 유한차분법이 갖는 미분계산의 신속성에 대한 이점을 정확성의 손실 없이 계면경계문제에서 그대로 유지하도록 해 주었다.

서로 다른 열전도 계수를 갖는 이중재료 열전도문제를 해석하고 해의 수렴률을 조사한 결과, 본 연구에서 제안한 수치해석 기법이 2차 정확도를 갖는다는 것을 보였다. 특히, 두 재료간에 열전도계수 값의 차이가 큰 경우에도 정확도와 계산 효율성의 손실없이 날카로운 미분 점프를 안정적이고 정확하게 계산했다. 본 연구의 수치기법은 열전도문제 뿐만 아니라 복합구조재료의 응력해석문제나 서로 다른 유체의 흐름문제 등에도 효율적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문은 부분적으로 2006년 한양대학교 이학기술연구소

연구비 지원에 의해 수행된 것으로 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 윤영철, 김동조, 이상호** (2007a) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법. 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.321~327.
- 윤영철, 김효진, 김동조, 왕 캬 리우, 테드 벨리체코, 이상호** (2007b) 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 응력집중문제 해석 (I): 고체문제의 정식화. 한국전산구조공학회 논문집, 20(4), pp.493~499.
- 윤영철, 김효진, 김동조, 왕 캬 리우, 테드 벨리체코, 이상호** (2007c) 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 응력집중문제 해석 (II): 균열과 국소화 밴드 문제로의 적용. 한국전산구조공학회 논문집, 20(4), pp.501~507.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L.** (1994) Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.
- Kim, D. W., Yoon, Y.-C., Liu, W. K., Belytschko, T.** (2007a) Extrinsic Meshfree Approximation Using Asymptotic Expansion for Interfacial Discontinuity of Derivative, *Journal of Computational Physics*, 221, pp.370~394.
- Kim, D. W., Yoon, Y.-C., Liu, W. K., Belytschko, T., Lee, S.-H.** (2007b) Meshfree Collocation Method with Intrinsic Enrichment for Interface Problems, *Computational Mechanics*, 40(6), pp.1037~1052.
- LeVeque, R. J., Li, Z.** (1994) The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31, pp.1019~1044.
- Tu, C., Peskin, C. S.** (1992) Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries: a comparison of three methods. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13, pp.1361~1376.