휨을 받는 L-형 평판의 적응적 세분화를 위한 선택적 p-분배

The Selective p-Distribution for Adaptive Refinement of L-Shaped Plates Subjected to Bending

우 광 성† 조 준 형* 이 승 준**
Woo, Kwang-Sung Jo, Jun-Hyung Lee, Seung-Joon
(논문접수일 : 2007년 2월 28일 ; 심사종료일 : 2007년 7월 23일)

요 지

계층적 p-세분화를 위해 Zienkiewicz-Zhu 오차평가법이 약간 수정되었으며, 이 방법의 유효성을 보이기 위해 휨을 받는 개구부를 갖는 Reinssner-Mindlin C^0-평판에 적용하였다. 유한요소해석상의 적응적 체눈을 결정하는 단계는 초수렴 팻취복구기법에 기초를 둔 사후오차평가자와 연계된 p-세분화에 의해 제안되었다. 요소내의 변위장을 정의하기 위해 적분형 르장드르 고차 형상함수가 사용되는 반면 복구응력을 보간하기 위해 파스칼의 삼각수에 기초를 둔 같은 차수의 고차다항식이 사용되는 이유로 수정 Z/Z 오차평가는 종래의 방법과 다소 차이를 보여준다. 가우스 적분점에서의 응력을 최적화하기 위해 필요한 다항식으로 표현되는 응력함수를 얻기 위해 최소제곱법이 사용되었다. 고정된 요소망에 거의 최적의 형상함수 차수의 분배를 찾기 위한 전략이 논의되었는데, 허용되는 정확도를 얻을 수 있을 때까지 각 요소마다 형상함수의 차수를 불균등하게 증가시키는 방법으로, 소위 최적의 선택적 p-분배를 자동으로 결정하도록 되어있다. 위의 사항들을 L-형 평판 해석에 적용한 결과, 적응적 p-체눈설계 단계가 진행됨에 따라 자유도의 증가에 따라 오차량은 급격히 감소되는 것을 알 수 있었고, 제안된 오차 지시자에 의한 적응적 p-체눈 세분화는 최적 p-분배 진행방향에 근접하는 것을 볼 수 있었다.

핵심용어 : 수정 Zienkiewicz-Zhu 오차평가, 초수렴 팻취복구기법, 계층적 p-세분화, L-형 평판, 선택적 p-분배

Abstract

The Zienkiewicz-Zhu(Z/Z) error estimate is slightly modified for the hierarchical p-refinement, and is then applied to L-shaped plates subjected to bending to demonstrate its effectiveness. An adaptive procedure in finite element analysis is presented by p-refinement of meshes in conjunction with *a posteriori* error estimator that is based on the superconvergent patch recovery(SPR) technique. The modified Z/Z error estimate p-refinement is different from the conventional approach because the high order shape functions based on integrals of Legendre polynomials are used to interpolate displacements within an element, on the other hand, the same order of basis function based on Pascal's triangle tree is also used to interpolate recovered stresses. The least-square method is used to fit a polynomial to the stresses computed at the sampling points. The strategy of finding a nearly optimal distribution of polynomial degrees on a fixed finite element mesh is discussed such that a particular element has to be refined automatically to obtain an acceptable level of accuracy by increasing p-levels non-uniformly or selectively. It is noted that the error decreases rapidly with an increase in the number of degrees of freedom and the sequences of p-distributions obtained by the proposed error indicator closely follow the optimal trajectory.

Keywords : *Modified Zienkiewicz-Zhu(Z/Z) error estimate, superconvergent patch recovery technique, hierarchical p-refinement, L-shaped plates, selective p-distribution*

1. 서 론

적응적 유한요소해석은 일반적으로 두 가지 단계를 필요로 한다. 사후오차평가(*a posteriori* error estimate) 기능과 자동요소분할(automatic mesh refinement) 기능이다. 사후오차평가를 위해 지금까지 제안된 방법은 잔차기법(residual

† 책임저자, 영남대학교 건설환경공학부 교수
Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622
E-mail: kswoo@yu.ac.kr
* 한국전력공사 서울전력구건설처
** (주)현대산업개발 설계팀 공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

technique)과 후처리법(post-processing) 또는 복구기법(recovery technique)이라 할 수 있다. 잔차기법은 경계치문제(boundary value problem)로부터 묵시적(implicit) 또는 명시적(explicit) 방법에 의해 엄밀하게 구해진 정해와 유한요소 해석에 의한 근사해 와의 오차를 사용하는 방법이다(Ainsworth 등, 1997). 이에 비해 후처리법 또는 복구기법은 유한요소 해석을 수행한 후에 얻어진 응력값 등을 이용하여 비교적 정확한 초수렴해(superconvergent solution)를 팻취조립점을 따라 결정하는 방식인 초수렴팻취복구(superconvergent patch recovery technique; 이하 SPR; Zienkiewicz, 1992) 기법에 의해 추정하여, 이를 정해로 대체하는 방식이다. 이 방법은 알고리즘이 단순하며 연산효율이 높으며, 이미 Zienkiewicz와 Zhu(이하 Z/Z; 1987)에 의해 h-체분 세분화에 사용되어 왔다. 다시 말하면 보통 4개의 요소로 구성되는 팻취의 가우스적분점에서 계산된 응력값들을 최적으로 보간(fitting)할 수 있는 응력함수를 구한 후 응력값과 응력함수로부터 추정되는 응력값의 오차를 응력노름이나 L_2-노름 형태로 정규화(normalization)하는 방식을 말한다. 일명 절점평균화법(nodal averaging method)이라고도 하며 허용오차내에 들 수 있을 때까지 체눈 세분화를 반복적으로 진행하게 된다.

한편, p-체눈 세분화 및 hp-체눈 세분화에 대한 연구(Basu 등, 1983; Demkowicz 등, 1989; Oh, 1999)도 지속적으로 진행되어 왔다. 이들의 연구는 주로 잔차기법에 기초를 둔 방식인데 일정단계 h-체눈세분화를 진행하다가 요소의 형상함수를 전 요소에 균등하게 1차에서 2차로 증가시키는 방식이거나, p의 차수를 고차로 증가시킬 경우는 요소망의 p-차수 분배를 수동으로 증가시키는 등 p-체눈에 대한 요소자동화가 미흡한 단계(Dunuvant 등, 1983; Bertoti 등, 1998)라 할 수 있다. Z/Z가 제안한 오차평가기법의 p-체눈 세분화는 Oh와 Batra(1999)에 의해 시도되었다. 이들은 형상함수의 차수를 p=1차에서 최대 p=4차까지 균등하게 증가시키는 방식을 택하고 있기 때문에 초기체눈은 비교적 많은 개수의 요소망으로 시작하게 된다. 요소내의 변위장을 정의하기 위해 적분형 르장드르 고차 형상함수가 사용되는 반면 복구응력을 보간하기 위해 파스칼의 삼각수에 기초를 둔 동일 차수의 고차다항식이 사용되는 이유로 기존의 Z/Z 오차평가는 p-체눈 세분화를 하기 위해서는 다소 수정이 불가피하게 된다. 다시 말하면, p-체눈 세분화 절차는 해의 정확도를 높이기 위해 자유도를 많이 필요로 하는 위치인 응력특이부 및 응력의 변화 양상이 급한 곳에 많은 수의 자유도 또는 고차의 형상함수를 배치함과 동시에 상대적으로 응력의 변화가 작은 곳에 자유도 수를 줄임으로써 효율성을 높이는 방법이라고 할 수 있다. 평면응력, 평면변형문제를 다룬 논문에 대해서 이와 같은 양상을 보였다. 본 연구에서는 가우스 적분점에서의 응력을 최적화하기 위한 필요한 다항식으로 표현되는 응력함수를 얻기 위해 최소제곱법이 사용되었는데, 이 방법은 이미 인장력을 받는 L-형 평판문제와 균열판 문제에 적용하여 좋은 결과를 보여주고 있다. 물론, 응력함수를 구하기 위해 Z/Z가 제안한 최소제곱법 대신에 정규크리깅 보간법을 사용하여 복구응력에 가중치를 부여하여 최적으로 보간하려는 시도(우광성 등, 2006)도 있었다.

본 논문에서는 기존에 제안된 p-체눈 세분화 방법의 검증을 하기 위해 역학적 거동이 보다 보잡한 휨을 받는 L-형 평판문제에 적용하였다. p-체눈 세분화에 사용된 오차평가기법은 Z/Z에 의해 제안된 응력값 복구를 이용하는 방법이 일차적으로 모색되었으며, 기존의 방식을 적응적 p-체눈 세분화를 위해 다소 수정하였다. 즉, Z/Z 접근법으로 불리는 SPR 기법을 계층적 형상함수에 기초를 두는 기존의 p-version 유한요소법에 적용할 때 나타나는 결과와 오차를 평가하였다. 이 때 평면응력 문제나 평면변형 문제의 유한요소해석 후에 계산되는 2차원 응력(우광성 등, 2003) 대신 휨모멘트와 전단력으로 정의되는 합응력을 복구하는 방식을 취했다. 이를 기반으로 형상함수의 차수를 요소망에 합응력의 수준이 높은 곳에서는 고차의 형상함수로, 낮은 곳에서는 저차의 형상함수를 불균등(non-uniformly)하게 또는 선택적으로 배치하는 선택적 p-분배(selective p-distribution) 방식이 사용된다. 아울러 본 연구에서는 Z/Z의 초수렴해를 정해로 가정하는 것은 물론, Babuska가 제안한 p-Version 유한요소법의 오차추정식에 기초를 둔 외삽방정식에도 근거하여 정해를 추정한 후 사후오차평가를 별도로 실시하였다. 이 두 가지 방법을 서로 비교하여 제안하고 있는 오차평가 알고리즘의 적정성을 평가하였다. 연구결과로부터 적응적 p-체눈설계 단계가 진행됨에 따라 자유도의 증가에 따라 오차량은 급격히 감소되는 것을 알 수 있었고, 제안된 오차지표(error indicator)에 의한 적응적 p-체눈 세분화는 최적 p-분배 진행방향에 근접하는 것을 볼 수 있었다.

2. 평판해석의 오차평가

2.1 평판문제

본 논문에 사용된 요소는 Reissner-Mindlin C^o-평판이론에 기초를 두었고, 기본적인 형태는 다음과 같다.

$$M_{ij} + Q_i = 0 \tag{1}$$

$$-Q_{i,i} = 0 \tag{2}$$

$$M_i = D_{ij} L_{jk} \theta_k \tag{3}$$

$$Q_i = \alpha_{ij}(-\theta_j + w_{,j}) \tag{4}$$

$$M_i^n = M_{ij}\, n_j = \widehat{M_i^n} \qquad M_1^n = M_n \qquad M_2^n = M_{ns}$$

$$Q_i = \widehat{Q_i} \qquad on \qquad \Gamma_2 \tag{5}$$

$$w = \widehat{w},\ \ \theta_i = \widehat{\theta_i} \qquad on \qquad \Gamma_1 \tag{6}$$

이 식들에서 M_{ij}, Q_i는 합응력을 나타내고, D_{ij}는 평판의 휨강성, α_{ij}는 평판의 전단강성, L_{jk}은 미분연산자, θ_k와 w는 회전각과 처짐을 나타내는 변위이다. Γ_1, Γ_2는 또한 경계조건을 나타낸다. 합응력은 응력을 두께방향으로 적분한 것으로 [FL/L] 혹은 [F/L]의 차원을 가진다.

2.2 휨을 받는 평판문제에 적용된 수정 SPR법

기존의 h-법과 p-법 사이에는 사용되는 형상함수와 형상함수의 차수에 따라 달라지는 가우스 적분점 등의 차이점이 존재하므로 Z/Z(Zienkiewicz 등, 1987; Zienkiewicz 등, 1992)에 의해 h-법에 적용된 초수렴팻취복구(SPR) 기법의 수정이 불가피하게 된다. 즉, p-version 유한요소법의 수행으로부터 산정된 합응력값(M_i^p, Q_i^p)을 최소제곱법으로 보간하여 얻어진 복구합응력(이하 M_i^*, Q_i^*)과 M_i^p, Q_i^p를 일반적인 n차원의 벡터로 인정하고, 두 벡터의 차를 나타내는 e_{MQ}(= $M^* - M^p$ 그리고 $Q^* - Q^p$) 벡터의 노름(norm)을 구하는 식을 이용해 에너지노름을 식 (7)과 같이 정의할 수 있다.

$$\| e_{MQ}^* \|_E^p = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega (M_i^* - M_i^p)\, D_{ij}^{-1}\, (M_j^* - M_j^p)\, d\Omega \\ + \displaystyle\int_\Omega (Q_i^* - Q_i^p)\, \alpha_{ij}^{-1}\, (Q_j^* - Q_j^p)\, d\Omega \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

여기서, $\| e_i \|^2$는 i-번째 요소에서의 에너지노름, Ω_i는 i-번째 요소의 체적, D_{ij}는 재료상수행렬(constitutive matrix)을 나타낸다. 한편, M^*는 평활화된 복구합응력(smooth stress resultant)을 나타낸다. p-version 유한요소로 구성되는 한 팻취(patch)는 그림 1과 같이 통상 4개로 구성된다.

식 (8)의 a_j, ϕ_j는 보간을 위한 상수와 Pascal의 삼각수에 의한 기저함수(basis function)를 나타낸다. 한편, 다항식의 차수 p는 유한요소 해석시 사용되는 형상함수의 차수와 동등한 수준으로 근사하였다. 근사는 식 (9), (10), (11)에 의해 최소제곱법으로 수행되었다.

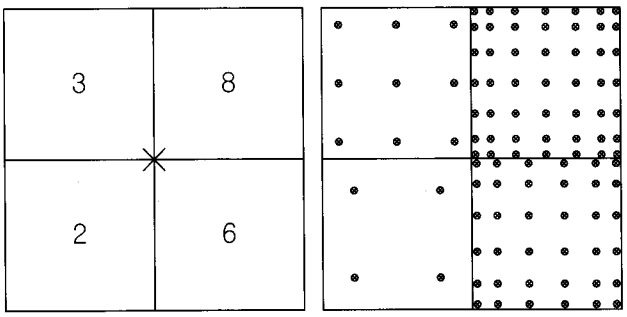

그림 1 p-차수의 불균등분포에 따른 가우스적분점의 배치

$$M^*(x,y) = \sum_{j=1}^{k} a_j \Phi_j\ , \quad Q^*(x,y) = \sum_{j=1}^{k} a_j \Phi_j \tag{8}$$

$$\int_{\Omega_i} \| e(x,y,a_j) \|^2 d\Omega = 0 \tag{9}$$

$$-M_i^p (P_k)_i + (P_{kj})_i (a_j)_i = 0 \tag{10}$$

$$-Q_i^p (P_k)_i + (P_{kj})_i (a_j)_i = 0 \tag{11}$$

$$N_G \geq \frac{2p+1}{2} \tag{12}$$

h-version의 경우는 요소간에 사용되는 형상함수의 차수 p가 고정되어있다. 반면에, p-version의 경우는 요소간의 형상함수의 차수를 불균등하게 사용할 수 있으므로 그림 1과 같이 비대칭의 가우스 적분점을 가질 수 있고, 차수가 증가함에 따라 가우스적분점의 갯수는 $N_G \times N_G$가 되며, 식 (12)에 의해 N_G를 결정하도록 하였다. 요컨대, p-version 유한요소법에 사용된 형상함수에 맞추어 가우스적분점을 변화시키고 이에 대응하는 합응력을 이용함과 동시에 최소제곱법의 기저함수의 차수를 변화시켜서 오차량을 평가하였다.

한편, 요소별로 수렴정도를 판단하기 위해 M, Q – 공간상의 상대적 거리를 측정할 수 있는 η를 식 (13)로 정의한다. η는 각 해석단계에서 수렴정도를 판단할 수 있는 오차지표로 사용된다. 식 (14)의 의미는 전체 M^*및 Q^*함수가 공간에서 나타내는 거리와 e_σ^*함수가 공간에서 나타내는 거리의 비를 나타내고 있다. 따라서, 식 (13)은 해석영역 전체에 대한 정규화된 오차를 나타내며, 식 (15)는 전영역의 오차를 나타낸다. 식 (16)은 팻취가 겹친 요소에서 합응력의 노름값이며, 식 (17)은 팻취가 겹친 요소에서 요소별 발생되는 오차를 나타낸다. 아래 식에서 η_Ω : 해석영역 전체의 오차, n : 해석단계, m : 특정 요소가 각 팻취에 속한 회수를 나타낸다.

$$\eta_\Omega^n = \frac{\| e_{MQ}^* \|_\Omega^n}{(\| M^* Q^* \|_\Omega^{n2} + \| e_{MQ}^* \|_\Omega^{n2})^{\frac{1}{2}}} \times 100(\%) \tag{13}$$

$$\| M^* Q^* \|_{\Omega}^{n2} = \left\{ \sum_{e=1}^{\Omega} \| M^* \|_{e}^{n2} + \sum_{e=1}^{\Omega} \| Q^* \|_{e}^{n2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\| e_{MQ}^* \|_{\Omega}^{n} = \left\{ \sum_{e=1}^{\Omega} \| e_{MQ}^* \|_{e}^{n2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

$$\| M^* \|_{e}^{n} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \| M^* \|_{e}^{i} \right\} \frac{1}{m},$$

$$\| Q^* \|_{e}^{n} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \| Q^* \|_{e}^{i} \right\} \frac{1}{m} \tag{16}$$

$$\| e_{MQ}^* \|_{e}^{n} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \| e_{MQ}^* \|_{e}^{i} \right\} \frac{1}{m} \tag{17}$$

일반적인 경우 팻취는 4개의 요소로 구성된다. 그러나 요소의 조합형태가 기하형상에 따라 항상 4개로 고정되지 않으므로 팻취를 구성할 때는 3개 이상의 요소를 하나의 팻취로 인정하였다. 팻취를 구성하면 여러 개의 요소가 서로 만나게 되며, 이와 같이 교점 또는 교선에서 각각 가우스 적분점에서 계산된 요소내 합응력값의 차이로 인한 합응력 불연속이 발생된다. 따라서, 합응력 불연속의 분배는 특정요소의 합응력값이 둘러 싸여진 다른 요소들 중 어떤 요소들에 의해 영향을 크게 받는지를 평가하는 의미를 담고 있다. 즉, 합응력 불연속을 최소제곱법의 원리에 따라 주위의 요소로 배분시키는 과정이 일어나는데, 여기서 인접 요소의 영향을 가장 크게 받는 경우를 평가하도록 하였다.

한편, 팻취가 겹칠 경우 한 개의 요소에 겹쳐진 횟수만큼의 에너지노름 값이 계산될 수 있다. 본 연구에서는 이 경우 각 노름(norm)값의 국부적 평균을 고려중인 요소의 노름으로 인정했다. 이 값을 각 요소에서 요소의 차수를 상승시키는 지표로 이용한다.

$$\eta_e^m = \frac{\| e_{MQ}^* \|_{e}^{n}}{\left(\| M^* Q^* \|_{e}^{n2} + \| e_{MQ}^* \|_{e}^{n2} \right)^{\frac{1}{2}}} \% \tag{18}$$

$$\xi_e = \frac{\eta_e^m}{\eta_{\Omega}} \tag{19}$$

식 (18), (19)에서 m은 특정 요소가 각 팻취에 속한 회수, η_e^m는 노름값의 국부적 평균값을 이용해 계산된 요소의 상대오차를 나타낸다. 따라서, 새로운 오차지표 ξ_e는 식 (19)로 정의하였다. 즉, $\xi_e > 1$일 경우 p의 차수를 증가시키게 된다.

휨을 받는 평판문제가 정의된 영역은 2차원(R^2)이므로 절점의 생성부분은 인장력을 받는 2차원 평면응력문제에 사용되었던 알고리즘(우광성 등, 2003)을 사용할 수 있다. 단 각 절점이 보유한 자유도는 증가하므로 요소를 재 생성시키는 알고리즘에 자유도와 경계조건의 생성부분을 수정하여 적용했다.

2.2 극한치 접근법에 의한 사후 오차평가

기존의 Z/Z에 의한 SPR법에 의한 사후 오차평가는 식 (7)에서 보는 바와 같이 유한요소해석의 해를 복구하여 얻어진 복구 합응력을 준정해(estimated exact solution)로 대체하여 에너지 노름 또는, 합응력노름(stress resultant norm)을 산정하며, 이를 이용하여 각 요소의 상대오차를 평가한다. 따라서, 유한요소해석에 의한 정해를 추정할 수 있게 되면 준정해를 사용하지 않고 직접적으로 오차를 정확하게 평가할 수 있게 된다.

일반적으로 유한요소해석은 자유도가 증가되면서 정해에 수렴되는데 자유도가 증가를 확장(extension)이라 한다. 본 연구에서는 p-확장법을 사용하므로 이에 대한 해의 수렴성에 대한 점근적 수렴구간(asymptotic range)은 Babuska가 제안한 식 (20)(우광성 등, 2003)이 유효하다.

$$| U_{ex} - U_p | \leq \frac{k}{N_p^{2\alpha}} \tag{20}$$

$$\frac{Log \dfrac{U_{ex}{}^{L} - U_p}{U_{ex}^{L} - U_{p-1}}}{Log \dfrac{U_{ex}{}^{L} - U_{p-1}}{U_{ex}^{L} - U_{p-2}}} = \frac{Log \dfrac{N_{p-1}}{N_p}}{Log \dfrac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} \tag{21}$$

식 (20), (21)에서 U_{ex}는 실제변형에너지(exact strain energy), U_p는 p-version 유한요소법에 의한 근사변형에너지, 2α는 응력특이 정도를 나타내며 통상 수렴률(convergence rate)을 의미한다. 그리고, k는 임의의 양수, N_p는 형상함수의 차수가 p일 때의 자유도를 나타낸다. 한편, 유한요소의 해가 수렴구간 내에 있을 정도의 충분한 자유도를 갖고 있다고 가정할 때 식 (20)는 부등호 대신 등호로 대치할 수 있게 된다. 예를 들면, 연속된 p-2, p-1, p차의 형상함수가 사용될 때 근사변형에너지도 수렴구간 내에 있기 때문에 수렴성에 대한 3개의 방정식을 세울 수 있게 된다. 그리고, 미지수 2α, k를 제거하여 정리하면 식 (21)을 유도할 수 있다. 이를 사용하면 변형에너지의 정확한 값을 예측할 수 있게 되며 이러한 방법에 의해 계산된 실제변형에너지를 극한치(limit value)라하며 U_{ex}^{L}로 정의한다. 이 값은 자유도

가 무한대일 때 유한요소법을 통해 추정할 수 있는 정해로 이와 같은 외삽방정식(extrapolation equation)으로 구할 수 있다. 식 (21)의 U_{p-2}, U_{p-1}, U_p와 N_{p-2}, N_{p-1}, N_p는 형상함수 차수를 전 영역에 걸쳐 균등하게 $p-2$, $p-1$, p로 증가시킬 때의 유한요소법에 의해 산정된 근사변형에너지와 자유도수를 나타낸다. 따라서, 실제변형에너지인 극한치 U_{ex}^L를 구하게 되면, 식 (7)에서의 에너지노름은 수정될 수 있다. 즉, 최소제곱법으로 근사하여 얻어진 복구 합응력의 준정해 대신에 극한치U_{ex}^L를 사용하여 식 (22)로 에너지노름을 정의할 수 있기 때문이다. 식 (22), (23)에서 U_p^i는 적응적 p-체눈 단계 i-번째에서 계산되는 전영역의 근사변형에너지를 의미한다.

$$\| e \|_E = \sqrt{\frac{U_{ex}^i - U_p^i}{U_{ex}^L}} \tag{22}$$

$$\zeta_\Omega = \sqrt{\frac{U_{ex}^L - U_p^i}{U_{ex}^L}} \times 100(\%) \tag{23}$$

4. 수치해석 예제

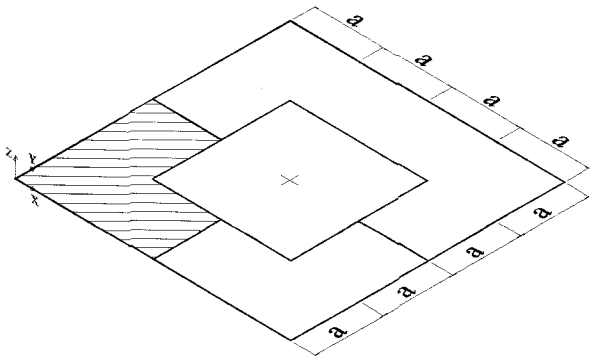

그림 2 등분포하중을 받는 L-형 평판의 기하형상

해석예제는 그림 2와 같이 적응적 유한요소법의 예제로 많이 사용되는 휨을 받는 L-형 평판을 선택하였다. 영역은 a =0.125이며, 두께는 0.01이다. 재료상수는 각 E=10.29, ν=0.3으로 설정했고 등분포하중 1.0을 재하하였다. 여기서, 단면치수나 하중의 단위를 나타내지 않은 이유는 유한요소해석 결과는 선형탄성해석에 기초를 두고 있으면 모든 값이 정규화(normalization)를 시키기 때문에 실제 수치값이나 단위는 무차원이 되기 때문에 큰 의미가 없다고 할 수 있다. 외부경계의 사변을 모두 고정단으로 설정하고 내부경계의 사변은 자유단으로 했다. 또한 그림에 나타난 길이의 단위는 모두 cm를 나타낸다. 처음 시작되는 초기체눈은 모두 p=1차로 고정하였다. 체눈설계는 그림 3과 그림 4에 나타난 바와 같이 대칭성을 감안하여 1/4모델을 해석하였으며 12-요소, 27-요소로 초기 요소망을 구축하였다. 각 해석단계에서 형상함수는 불균등하게 분포되었으며 Energy Norm을 이용해 상대오차를 계산하여 수렴정도를 판단하였다.

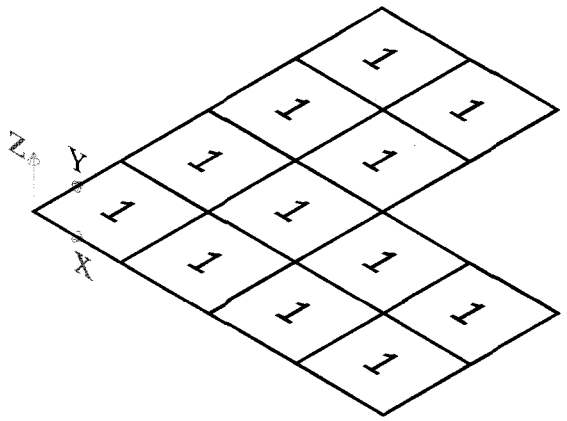

그림 3 12-요소 모델

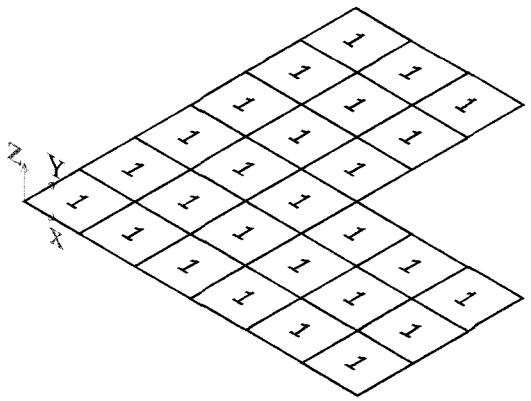

그림 4 27-요소 모델

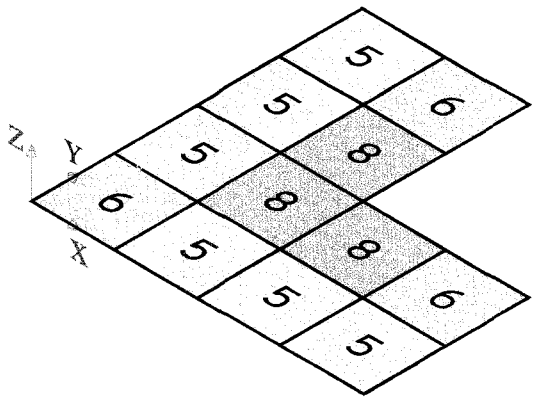

그림 5 12-요소모델의 9번째 반복후의 오차(η_Ω=3.69 %)

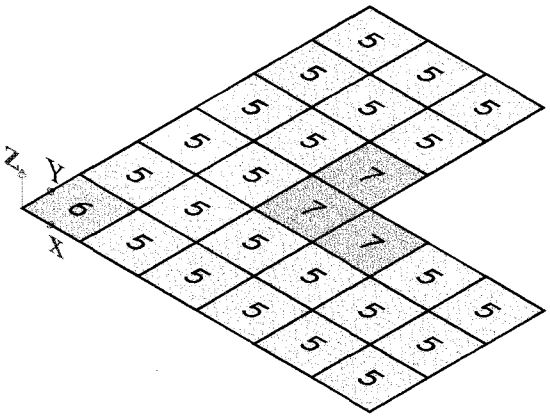

그림 6 27-요소모델의 8번째 반복후의 오차(η_Ω=2.16 %)

그림 5는 12-요소를 사용했을 때 차수의 분배상황을 나타낸다. 등분포하중을 재하하였으므로 형상대로 1/8 대칭축을 중심으로 차수분배가 대칭으로 나타났다. 또한 평판의 모멘트 특이(moment singularity)가 일어나는 내부직각부위에서 고차의 형상함수가 사용된 것을 볼 수 있다. 오차량도 5%이하를 만족하는 수준으로 해석이 되었다. 그림 6의 27-요소를 사용했을 때의 차수 분배상황도 12-요소의 경우와 유사하게 나타난다. 모멘트특이가 일어나는 내부 직각부위에서 고차의 형상함수가 사용된 것을 확인할 수 있다.

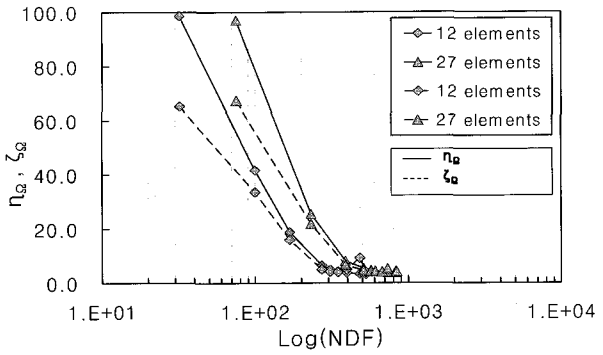

그림 7 각 요소망에 따른 η_Ω와 ζ_Ω의 변화 양상

그림 7과 표 1은 본 논문에서 제안하고 있는 오차지수를 나타내었고 그 값은 5% 내외의 값에서 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 그림 8과 표 2에서는 극한치 해석에 의한 오차량 분석을 나타내고 있다.

그림 7과 표 1과 표 2에서 적은 자유도에서 두 값이 다소간 차이를 나타내나 수렴이 일어난 이후 즉 500 자유도 이상 사용된 경우 η_Ω, ζ_Ω 두 값이 흡사하게 나타나는 현상은 주목할 만하다. 이렇게 적은 자유도에서 두 가지 방식이 약간의 차이를 보이는 것은 극한치 해석법의 경우 총변형에너지를 구한 후 단지 그 하나의 값으로 오차를 평가하고 본 논문에서 사용하는 방법은 요소전체에 분포하는 가우스 적분점

표 1 자유도 증가에 따른 해석영역 전체의 오차 η_Ω

No. of Iteration	12 -element model			No. of Iteration	27 -element model		
	NDF	η_Ω(%)	η_Ω/DOF(%)		NDF	η_Ω(%)	η_Ω/1DOF(%)
1	32	6.528E+01	2.040E+00	1	75	6.743E+01	8.991E-01
2	100	3.355E+01	3.355E-01	2	231	2.181E+01	9.440E-02
3	168	1.592E+01	9.474E-02	3	387	6.702E+00	1.732E-02
4	272	4.940E+00	1.816E-02	4	508	4.638E+00	9.129E-03
5	308	4.144E+00	1.345E-02	5	568	4.402E+00	7.750E-03
6	347	4.018E+00	1.158E-02	6	607	4.325E+00	7.125E-03
7	395	5.068E+00	1.283E-02	7	673	4.144E+00	6.158E-03
8	480	9.230E+00	1.923E-02	8	730	5.272E+00	7.222E-03
9	526	3.962E+00	7.533E-03	9	826	4.263E+00	5.162E-03
10	526	3.962E+00	7.533E-03	10	838	4.225E+00	5.042E-03

표 2 자유도 증가에 따른 해석영역 전체의 오차 ζ_Ω

No. of Iteration	12 -element model			No. of Iteration	27 -element model		
	NDF	ζ_Ω(%)	ζ_Ω/DOF(%)		NDF	ζ_Ω(%)	ζ_Ω/1DOF(%)
1	32	9.854E+01	3.079E+00	1	75	9.706E+01	1.294E+00
2	100	4.163E+01	4.163E-01	2	231	2.551E+01	1.104E-01
3	168	1.882E+01	1.120E-01	3	387	8.107E+00	2.095E-02
4	272	6.474E+00	2.380E-02	4	508	5.482E+00	1.079E-02
5	308	4.968E+00	1.613E-02	5	568	4.749E+00	8.362E-03
6	347	4.270E+00	1.231E-02	6	607	4.385E+00	7.224E-03
7	395	3.777E+00	9.563E-03	7	673	4.103E+00	6.097E-03
8	480	3.372E+00	7.026E-03	8	730	3.936E+00	5.391E-03
9	526	3.128E+00	5.946E-03	9	826	3.865E+00	4.679E-03
10	526	3.128E+00	5.946E-03	10	838	3.864E+00	4.612E-03

에서 직접 오차를 평가하는데서 기인한 것으로 생각된다. 두 값이 수렴된 상황에서 흡사한 값을 보인다면 일차미분량(응력, 합응력)의 복구기법에 의한 오차평가는 단지 적응적 해석을 위한 도구로의 오차평가기법일 뿐 아니라 정해로 다가가는 기법으로서의 수학적 의미를 가진 것으로 생각된다. 결국 정해로 다가가는 의미를 가진 오차량을 계산하는 것으로 생각되며 그 증거는 극한치계산법에 의한 오차량을 정확한 오차량으로 인정한다면 그 값과 흡사한 값을 도출하는 현상에서 찾아볼 수 있다.

최종의 해석값을 제외한다면 12-요소의 경우 6번째 해석에서 그리고 27-요소의 경우 7번째 해석에서 η_Ω/DOF의 값이 최소값을 가진다. 이는 한 개의 자유도에 배분된 오차량이 최소임을 의미한다. 이 경우 표 3와 표 4에서 형상함수의 분포를 살펴보면 다음과 같은 것을 볼 수 있는데, 최대 6차 정도의 함수가 사용된다면 오차의 지속적인 감소를 취할 수 있을 것이라 생각된다. 이후 오차량이 증가가 일어나는데 이러한 해의 진동현상은 해석이 심화됨에 따라 일반적으로 일어나는 현상이라 생각되며, 이를 제거하기 위해서는 요소를 나누는 방식으로 변화를 주어야할 것으로 생각된다.

요소망의 구성에 비해 자유도의 사용이 해의 수렴에 직접

표 3 12-요소의 해석에 따른 요소별 형상함수차수 분포

해석 회수	요소번호											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	4	4	4	4	5	5	4	4	5	4	4
6	5	4	4	4	4	6	6	4	4	6	4	4
7	5	4	4	4	4	7	7	4	4	7	4	4
8	5	4	4	4	4	8	8	5	4	8	4	5
9	5	5	4	5	5	8	8	5	4	8	5	5
10	5	5	4	5	5	8	8	5	4	8	5	5

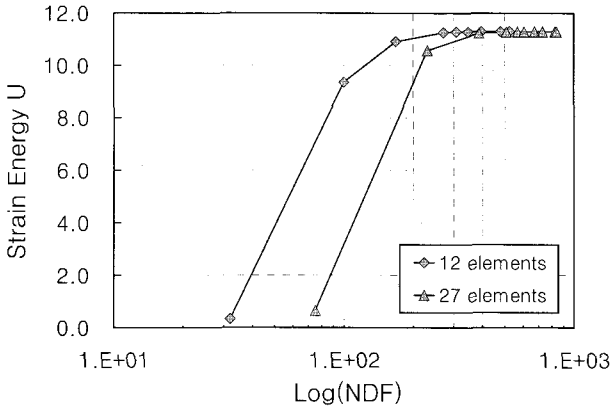

그림 8 각 요소망에 따른 변형에너지 수렴성 조사

표 5 자유도 증가에 따른 변형에너지 U

No. of Iteration	12 elements		No. of Iteration	27 elements	
	NDF	Strain Energy U		NDF	Strain Energy U
1	32	3.2716E-01	1	75	6.5499E-01
2	100	9.3520E+00	2	231	1.0575E+01
3	168	1.0912E+01	3	387	1.1237E+01
4	272	1.1265E+01	4	508	1.1277E+01
5	308	1.1284E+01	5	568	1.1286E+01
6	347	1.1292E+01	6	607	1.1289E+01
7	395	1.1296E+01	7	673	1.1292E+01
8	480	1.1299E+01	8	730	1.1294E+01
9	526	1.1301E+01	9	826	1.1295E+01
10	526	1.1301E+01	10	838	1.1295E+01

적인 영향을 미치는 것을 볼 수 있다. 그림 9 및 표 5는 약 300 자유도 정도에서 요소망에 상관없이 비슷한 변형에너지 값을 나타내고 있다. 이는 p-Version 유한요소법의 특성상 요소망의 구성은 문제를 해석하기 위해 영역을 이산화하는 정도의 의미만을 가지는 데에서 기인한다. 결국 h-Version 유한요소법과 p-Version 유한요소법을 비교할 때도 자유도에 중점을 두어야 한다. 하지만 더 엄밀히 하자면 자유도에 곱해져 있는 고차형상함수를 계산하는 시간소모를 고려해야

표 4 27-요소의 해석에 따른 요소별 형상함수차수 분포

해석 회수	요소번호																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	5	4	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	3	4	4	3	3	4	3	3	4
5	5	4	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	4	5	5	5	4	3	4	5	3	3	5	3	3	4
6	5	4	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	4	6	6	5	4	3	4	6	3	3	5	3	3	4
7	5	4	3	3	3	3	4	4	4	4	4	3	3	4	7	7	5	4	3	4	7	3	4	5	3	3	4
8	5	4	3	3	3	3	4	4	4	4	4	3	3	5	7	8	5	4	3	5	8	3	4	5	3	3	4
9	5	4	3	3	3	3	4	4	5	5	4	3	3	6	8	8	5	4	3	6	8	3	5	6	3	3	4
10	5	4	3	3	3	3	4	5	5	5	4	3	3	6	8	8	5	4	3	6	8	3	5	6	3	3	4

지만 알고리즘의 능률에 대한 정확한 평가가 된다. h-Version 유한요소법과 p-Version 유한요소법에 대한 이러한 비교는 깊이 있게 다루어 져야한다.

6. 결론 및 고찰

인장력을 받는 2차원 평면응력/변형 문제에 적용되어 유효함을 보인 적응적 p-세분화는 평판의 휨문제에 적용되어도 역시 유효함을 알 수 있었다. p-세분화의 경우 응력의 변화가 완만한 곳에서 저차함수, 즉 자유도의 양을 줄이고 합응력 또는 응력의 변화가 급한 곳은 고차함수 즉 자유도의 수를 늘려서 계산하기 때문에 그 효율성은 더 높다고 할 수 있다. 즉, 필요한 곳에 더 많은 자유도를 분배하는 개념이라 할 수 있다. 이러한 개념은 더 나아가 같은 요소의 비선형 문제에서도 훨씬 더 효율적인 해를 찾아낼 수 있는 수단을 제공할 것으로 생각된다.

특히, 휨의 문제에서 합응력의 집중이 일어나는 문제에 형상함수를 고차화 시키는 것은 효율적이라 할 수 있다. 평판의 휨문제에서 제안된 오차평가기법은 휨에 의한 합응력이 집중되는 경우를 인식하여 형상함수의 차수를 높이는 효과를 볼 수 있었다.

또한, 극한치 방법에 의한 오차량과 제안된 수정 SPR법(Z/Z법)에 의한 오차량의 비교는 오차량이 수렴구간에 들어간 이후는 거의 일치하는 형태를 볼 수 있다. 이는 매우 중요한 특성으로 수정된 SPR법이 정확한 오차평가를 하고 있는 것을 입증하는 결과라 할 수 있다. 정확한 오차평가는 적응해석을 위해서도 중요하지만 해의 신뢰성을 높이는 목적을 위해 중요하다. 해의 신뢰성이 높다면 그 해를 사용 할 경우도 훨 씬 더 안정적으로 사용할 수 있을 것이다. 엄밀히 보면 근사해석을 수행해 문제를 해석한 후 오차량을 모른다는 것은 해석을 완전히 수행했다고 볼 수 없다. 그만큼 근사해석의 경우 오차평가는 필수적인 부분이다. 또한, 적응적 유한요소해석을 수행하기 위해 사용된 오차평가법의 오차를 현재 해석값의 오차로 인정할 수 있다면 정확한 오차계산을 위해 더 이상의 부가적 계산이 필요 없으므로 계산효율을 높일 수 있다. 이러한 효율성을 더 높이기 위해, 그리고 좀 더 안정적인 수치연산을 도모하기 위해서 hp-체눈 세분화 방식을 택해야할 것으로 생각된다.

알고리즘의 비효율성을 제거하고 새로운 알고리즘을 고안하는 것은 컴퓨터의 물리적 능력 극대화를 진일보시킬 수 있다. 본 논문에서 제안한 방법은 요소의 절점자유도가 높아지면 높아질수록 줄어드는 자유도의 수도 많아지므로 더욱 더 높은 계산 효율을 나타내게 된다. 근래에 컴퓨터의 발달로 인해 상상을 초월하는 수억 단위 자유도 수를 사용해 해석을 수행하는 경우를 볼 수 있는데 결국 이러한 수행들은 적응적 해석을 동반하지 않는다면 그만큼의 자원낭비를 부른다.

아울러 수학적인 논의이며 본 논문의 바탕이 되는 유한요소법의 초수렴점의 위치에 관한 수학적인 고찰과 오차량 계산시 응력복구기법이 가진 수학적 의미는 깊이 있게 고려되어야 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

우광성, 조준형, 박미영 (2006) 2차원 균열판의 p-적응적 유한요소해석을 위한 정규크리깅 보간법의 적용, 한국전산구조공학회 논문집, 19(4), pp.429~440.

우광성, 조준형, 안재석 (2003) 사후 오차평가에 의한 적응적 p-체눈 세분화, 대한토목학회논문집, 23(2A), pp.177~185.

우광성, 조준형, 이동진 (2006) 적응적 p-Version 유한요소법에서 정규크리깅에 의한 응력복구기법, 대한토목학회 논문집, 26(4A), pp.677~687.

Ainsworth, M., Oden, J.T. (1997) A posteriori error estimation in finite element analysis, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 101, pp.1~88.

Basu, P.K., Szabo, B.A. (1978) Adaptive control in p-convergent approximations, *Proc. 15th Annual Meeting, Society of Engineering Science*, Gainesville, Florida.

Bertoti, E., Szabo, B.A. (1998) Adaptive Selection of Polynomial Degrees on a Finite Element Mesh, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 42, pp.461~478.

Demkowicz, L., Oden, J.T., Rachowicz, W., Hardy, O. (1989) Toward a universal h-p adaptive finite element strategy Part II : A Posteriori Error Estimation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 77, pp.113~180.

Dunavant, D.A., Szabo, B.A. (1983) A Posteriori Error Indicators for the p-Version of The Finite Element Method, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 19, pp.1851~1870.

Oh, H.S., Batra, R.C. (1999) Application of Zienkiewicz-Zhu's error estimate with superconvergent patch recovery to hierarchical p-refinement, *Finite Elements in Analysis and Design*, 31, pp.273~280.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1987) A Simple Error Estimator and Adaptive procedure for Practical Engineering Analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 24, pp.337~357.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992) The Supercon-

vergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate Part I : The Recovery Technique, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33, pp.1331~1364.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992) The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate Part II : Error Estimaties and Adaptivity, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33, pp.1365~1382.