

점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 성능 향상에 관한 연구

A Study on Improving the Capacity of Absorbing Boundary Using Dashpot

김 희 석* 이 종 세*

Kim, Hee-Seok Lee, Jong-Seh

(논문접수일 : 2007년 6월 4일 ; 심사종료일 : 2007년 7월 24일)

요 지

본 논문에서는 무한영역을 유한의 요소영역으로 표현하는데 있어서 가장 폭넓게 사용되는 점성감쇠기를 이용한 흡수경계의 성능을 향상시키기 위한 연구를 수행하였다. 2차원 평면조화파동방정식을 이용하여 응력파의 경계면으로의 입사각에 따른 흡수경계조건을 최적화 하였으며, Miller 등이 제안한 반무한 단성체에서의 주기하중에 의한 전파식을 최적화된 점성감쇠기를 이용한 흡수경계 조건식에 삽입한 후 방정식의 해를 직접 비교함으로써 해석적인 검증을 수행하였다. 또한 수치적 검증을 위해 유한요소법을 사용하여 Miller 등의 파진행 문제를 구현하였으며, 이때 흡수경계를 구현하기 위해 점성감쇠기를 부착시킨 수치모형에서의 변위와 파의 도달시간을 고려하여 반사파의 영향을 제거시킨 수치모형에서의 변위를 비교함으로써 흡수율을 산정하였다. 흡수율은 수치모형의 경계와 내부점에 대해 각각 산정되었으며 이를 통해 수치적 검증을 수행하였다.

핵심용어 : 점성감쇠기, 흡수경계, Miller 등의 파진행 문제, 흡수율

Abstract

In this paper an analytical study is carried out to improve the capacity of absorbing boundary using dashpot, one of the most widely used absorbing boundaries in FEM. Using 2-D harmonic plane wave equation, absorbing boundary condition is modified to maximize its capacity according to the incident angle. Validity of the absorbing boundary conditions which is modified is investigated by adopting the solution of Miller and Pursey. The Miller and Pursey's problem is then numerically simulated using the finite element method. The absorption ratios are calculated by comparing the displacements at the absorbing boundary to those at the free field without the absorbing boundary. The numerical study is carried out through comparison of displacement at the interior region and the boundary of the numerical model.

Keywords : dashpot, absorbing boundary, Miller and Pursey's problem, absorption ratios

1. 서 론

초음파 탐상, 폭발 효과, 기초의 진동 등 다양한 동적문제의 해석적 연구에 있어서의 합리적인 접근방법은 이 문제들을 무한 또는 반무한 영역에서의 파의 진행문제로서 고려하는 것이지만 대부분의 문제들이 복잡한 형상 때문에 해석적인 해(closed form solution)를 찾는 것이 거의 불가능하며, 따라서 수치적인 방법을 이용하는 것이 필요하다. 지금까지 (반)무한영역에서의 파진행 문제에 널리 쓰이던 수치해석 방법은 경계요소법(Boundary Element Method)이며, 이

외에도 유한요소법과 경계요소법을 조합하는 방법 등이 있으나 이러한 방법은 반해석적-반수치적 방법으로서 요소의 복잡성을 피할 수 없는 단점이 있다(이종세 등, 1998; 김희석 등, 2003; 김희석 등, 2007).

유한요소법은 다양한 형태의 비균질성을 쉽게 모형화할 수 있다는 장점과 함께 요소화된 모든 영역에 있어서 운동방정식을 그대로 사용하기 때문에 불연속면에서의 모드변환 등 여러 가지 중요한 현상들을 직접 관찰할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 이 방법은 유한의 요소를 가지고 있으므로 직접적으로 무한영역으로의 적용이 불가능하다. 유한의 요소영역

† 책임저자. 정회원 · 한양대학교 토목공학과 박사과정

Tel: 031-409-7201 ; Fax: 031-400-4103

E-mail: lagoon@ihanyang.ac.kr

* 정회원 · 한양대학교 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 12월 31일까지 본 학회에 보내주 시면 2008년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

으로 무한 영역을 모형화하는 경우에 파가 제한된 대상 모형의 유한 경계에 도달한 후 반사 현상이 발생하게 되며 이로 인해 구조계 전체의 응답에 큰 영향을 미치게 된다.

이러한 반사파의 영향을 상쇠 시키기 위해서는 인공적인 경계요소가 필요한데, 이러한 인공적인 경계요소를 흡수경계 (absorbing boundary)라고 하며 파진행의 문제에 널리 쓰이고 있다. 지금까지는 Lysmer 등(1969), Smith(1974), Engquist 등(1977), White 등(1977), Cundal 등(1978) 그리고 Liao 등(1984) 등이 제안한 경계요소들이 쓰이고 있다. 이중 Lysmer 등(1969) 그리고 White 등(1977)에 의해 제안된 흡수경계는 점성감쇠기를 이용하는 방법으로써 요소의 경계에 점성감쇠기를 부착하여 흡수효과를 구현하므로 일반적인 FEM프로그램에 응용이 용이하다.

동적문제를 파의 진행문제고 고려함에 있어 가진원의 종류 및 대상영역의 조건에 따라 다양한 특성의 파 및 이에 따른 주파수 성분이 발생하게 된다. 흡수경계는 이러한 모든 종류의 파 및 주파수 성분에 대해 충분한 성능을 가지고 있어야 하며, 따라서 광범위한 공학적 문제에 대해 흡수경계를 적용한 수치해석을 수행하기 위해서는 다양한 형태의 하중에 대한 흡수경계의 성능에 대해 규명이 이루어져야 한다. Lysmer 등(1969)과 White 등(1977)은 주기하중에 의한 반무한 영역에서의 변위의 이론해(Lysmer 등, 1966)와, 흡수경계가 적용된 점성감쇠기를 이용한 유한요소모델에서의 수치해를 비교함으로써 흡수경계의 성능을 고찰하였다. 그러나 이론해의 해석상의 제한성으로 인해 비교되는 변위의 위치가 하중재하점 아래로 제한되어 경계면에서의 입사파의 입사각에 따른 성능고찰을 하지 못하였으며, 또한 흡수율을 산정하지 못함으로 해서 흡수경계에 대한 온전한 성능 고찰이 이루어졌다고 보기 어렵다.

따라서 본 연구에서는 보다 합리적인 방법으로 점성감쇠기를 이용한 흡수경계의 성능을 고찰하고자 하였으며, 이를 통해 흡수경계의 성능을 향상시키고자 하였다. 이는 해석적인 영역과 수치적인 영역으로 나누어진다. 해석적인 영역은 기존에 제시된 흡수경계조건을 분석을 통해 흡수경계의 성능을 향상시키는 부분으로서, 조화평면 파동방정식을 이용하여 응력파의 경계면으로의 입사각에 따른 흡수경계조건을 최적화하였으며 최적화된 경계조건에 Miller 등(1954)의 파동방정식을 삽입하여 방정식의 해를 직접 비교함으로써 입사각과 포아송비에 따른 흡수경계의 성능을 고찰하였다. 수치적인 영역은 개선된 흡수경계조건을 수치모형에 삽입하여 그 성능을 고찰하는 부분으로서, Miller 등(1954)의 파진행 문제를 유한요소해석을 통해 구현하였으며, 이때 점성감쇠기를 부착시켜 흡수경계를 구현한 수치모형에서의 변위와 파의 도달시

표 1 흡수경계 계수 값 (White 등, 1977)

Poisson's ratio	a	b	Poisson's ratio	a	b
0.00	0.959	0.769	0.25	0.986	0.744
0.05	0.967	0.761	0.30	0.986	0.742
0.10	0.975	0.756	0.35	0.992	0.74
0.15	0.982	0.751	0.40	1.007	0.746
0.20	0.986	0.747	0.45	1.011	0.773

간을 고려하여 반사파의 영향을 제거시킨 수치모형에서의 변위를 비교함으로써 흡수율을 산정하였다. 흡수율은 수치모형의 경계와 내부점에 대해 각각 산정되었으며 그 결과를 Lysmer 등(1969) 및 White 등(1977)에 의한 결과와 비교함으로써 본 연구의 타당성을 입증하였다.

2. 점성감쇠기 흡수경계조건

식 (1)과 (2)는 본 논문에서 성능을 향상시키고자 하는 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계조건을 나타낸다.

$$\sigma = apV_p\dot{u}_1, \quad \tau = bpV_s\dot{u}_3 \quad (1), (2)$$

여기서 \dot{u}_1 과 \dot{u}_3 은 x_1 방향과 x_3 방향의 입자운동속도를 각각 나타내며 p 는 밀도를, V_p 와 V_s 는 P파와 S파의 속도를 각각 나타낸다.

이러한 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계는 전파되는 응력이 단지 전파속도에 비례한다고 가정하였기 때문에 그 응력이 입사각에 의존적일 수밖에 없다. 식 (1)과 (2)에서 a 와 b 는 이러한 입사각에 따른 의존성을 보완하기 위해 도입된 계수로써 Lysmer 등(1969)은 모든 포아송비에 대해 $a = b = 1$ 의 값을 제안하였고, White 등(1977)은 표 1의 값을 제안하였다.

본 논문에서는 포아송비 뿐만 아니라 입사각에 대해서도 계수 값을 보정해줌으로써 흡수경계의 성능을 향상시키고자 하였다.

3. 조화평면파동식을 이용한 흡수경계조건 최적화

3.1 조화평면파동방정식

2차원 무한영역으로 전파하는 평면파의 변위는 식 (3)과 같이 두 개의 x_1 , x_3 방향 스칼라 포텐셜(ϕ , ψ)의 형태로 표현할 수 있다.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{i(k_{1(P)}x_1 + k_{3(P)}x_3 - \omega t)} \\ \psi_2 &= Ce^{i(k_{1(S)}x_1 + k_{3(S)}x_3 - \omega t)} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 A, $k_{1(P)}$, $k_{3(P)}$ 은 체적파(P파)의 진폭과 x_1 , x_3 방향 파수(wave number)를 각각 나타내며, C, $k_{1(S)}$, $k_{3(S)}$ 은 전단파(S파)의 진폭 및 x_1 , x_3 방향 파수를 각각 나타낸다. 식 (3)에서의 포텐셜 ϕ 및 ψ_2 는 P파 및 S파가 x_1 축에 경사각 θ 를 가지고 입사하는 경우 식 (5)~(7)과 같이 가정할 수 있다. 이때, S파가 경계면에 입사하는 경우는 임계각(critical angle)이 발생하게 되는데, 임계각 이상의 입사각에 대해서는 P파와 S파가 동시에 반사되게 되나, 임계각 이하의 입사각에 대해서는 S파만이 반사되고 P파는 x_1 축을 따라 전파하게 된다. 따라서, 임계각보다 큰 경우(CASE I)와 작은 경우(CASE II)로 구분하여 각각의 포텐셜을 가정하였다.

Incident P-wave :

$$\begin{aligned} \phi &= Ie^{i(k_P x_1 \cos \theta - k_P x_3 \sin \theta - \omega t)} \\ &\quad + Pe^{i(k_P x_1 \cos \theta - k_P x_3 \sin \theta_P - \omega t)} \\ \psi_2 &= Se^{i(k_S x_1 \cos \theta_S + k_S x_3 \sin \theta_S - \omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Incident S-wave : CASE I - Angle θ greater than the critical angle θ_C

$$\begin{aligned} \phi &= Pe^{i(k_P x_1 \cos \theta + k_P x_3 \sin \theta_P - \omega t)} \\ \psi_2 &= Ie^{i(k_S x_1 \cos \theta - k_S x_3 \sin \theta - \omega t)} \\ &\quad + Se^{i(k_S x_1 \cos \theta_S + k_S x_3 \sin \theta_S - \omega t)} \end{aligned} \quad (6)$$

CASE II - Angle θ less than the critical angle θ_C

$$\begin{aligned} \phi &= Pe^{-hx_3} e^{i(k_P x_1 - \omega t)} \\ \psi_2 &= Ie^{i(k_S x_1 \cos \theta - k_S x_3 \sin \theta - \omega t)} \\ &\quad + Se^{i(k_S x_1 \cos \theta_S + k_S x_3 \sin \theta_S - \omega t)} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$h = \left(k_P^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} \right)^{1/2}$$

이며, I, P 및 S는 입사파와 반사되는 P파 및 S파의 복소 진폭을 각각 나타내고, k_P , k_S 는 P파 및 S파의 파수를 각각 나타낸다. 이제 식 (5)~(7)를 식 (3)에 삽입하면 경계면에서의 입사파와 반사되는 P파 및 S파의 변위성분을 얻을

수 있다.

식 (3)은 입사파와 반사파에 대해 식 (8)과 같이 표현할 수 있으며, 이때 $(u_1)_I$, $(u_1)_P$, $(u_1)_S$ 및 $(u_3)_I$, $(u_3)_P$, $(u_3)_S$ 는 입사파와 반사되는 P파 및 S파의 x_1 및 x_3 방향 변위성분을 각각 나타낸다.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = (u_1)_I + (u_1)_P = (u_1)_S, \\ u_3 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = (u_3)_I + (u_3)_P + (u_3)_S \end{aligned} \quad (8)$$

식 (1)과 (2)는 다음 식 (9) 및 (10)과 같이 표현할 수 있다

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) + 2\mu\epsilon_{11} \\ &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{3,3} = a\rho V_P \ddot{u}_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tau = 2\mu\epsilon_{13} = \mu(u_{1,3} + u_{3,1}) = b\rho V_S \ddot{u}_3 \quad (10)$$

3.2 P파 입사에 따른 흡수경계조건의 최적화

식 (5)를 식 (8)에 삽입하여 u_1 과 u_3 를 구한 후, 이를 식 (9)와 (10)에 삽입하면 다음 식 (11) 및 (12)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - 2s^2 \cos^2 \theta_P + a \sin \theta_P \right\} \left(\frac{P}{I} \right) + \left\{ \sin 2\theta_S \right. \\ \left. + a \cos \theta \right\} \left(\frac{S}{I} \right) = 2s^2 \cos^2 \theta - 1 + a \sin \theta \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left\{ b \cos \theta_S + s^2 \sin 2\theta_P \right\} \left(\frac{P}{I} \right) + \left\{ \cos 2\theta_S \right. \\ \left. - b \sin \theta_S \right\} \left(\frac{S}{I} \right) = s^2 \sin 2\theta - b \cos \theta_S \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 s 는 P파 및 S파의 전파속도 비로써 식 (13)과 같이 포아송비(ν)로서 정의된다.

$$s = \frac{V_S}{V_P} = \left(\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \right)^{1/2} \quad (13)$$

식 (8)로부터 입사파(P파)와 반사파(P파, S파)의 진폭을 식 (14)와 같이 나타낼 수 있으며,

$$\begin{aligned} |u_I| &= |(u_1)_I \cos \theta - (u_3)_I \sin \theta| = k_P |I| \\ |u_P| &= |(u_1)_P \cos \theta_P + (u_3)_P \sin \theta_P| = k_P |P| \\ |u_S| &= |(u_1)_S \sin \theta_S - (u_3)_S \cos \theta_S| = k_S |S| \end{aligned} \quad (14)$$

표 2 P파 입사시 흡수경계 계수 값

Poisson's ratio	Coefficient	Incident angle								
		10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0.10	a	0.794	0.629	0.667	0.744	0.826	0.898	0.954	0.988	1.000
	b	0.232	0.456	0.667	0.857	1.021	1.155	1.253	1.313	1.345
0.20	a	1.570	0.987	0.875	0.871	0.901	0.938	0.971	0.992	1.000
	b	0.213	0.419	0.612	0.787	0.938	1.061	1.151	1.206	1.236
0.30	a	2.568	1.449	1.143	1.034	0.997	0.990	0.993	0.998	1.000
	b	0.186	0.366	0.535	0.687	0.819	0.926	1.005	1.053	1.081
0.4	a	3.898	2.063	1.500	1.251	1.126	1.058	1.023	1.005	1.000
	b	0.142	0.279	0.408	0.525	0.625	0.707	0.767	0.804	0.828

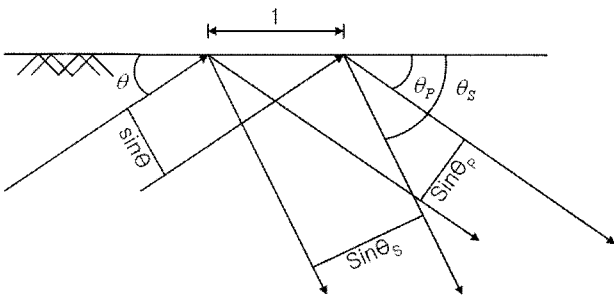


그림 1 P파 입사시 단위면적 및 단위시간당 입사파와 반사파

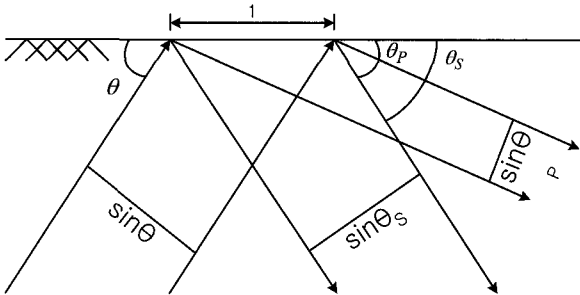


그림 2 S파 입사시 단위면적 및 단위시간당 입사파와 반사파

식 (14)로부터 입사파(P파)에 대한 반사파(P파, S파)의 진폭비를 식 (15)와 같이 정의할 수 있다.

$$|u_p/u_I| = |P/I|$$

$$|u_s/u_I| = (k_s/k_p)|S/I| = \frac{1}{s}|S/I| \quad (15)$$

흡수경계의 성능을 정량적으로 산출하기 위해 그림 1과 식 (15)를 이용하여 경계면에서의 단위 면적 및 단위시간당 입사파 에너지에 대한 반사파의 에너지비(E_R)를 식 (16)과 같이 정의한다.

$$E_R = |u_p/u_I|^2 + s \frac{\sin \theta_s}{\sin \theta} |u_s/u_I|^2 \quad (16)$$

경계면에서의 단위 면적당 도달하는 에너지는 그림 1과

같이 $\sin \theta$ 에 비례하므로 입사각에 따른 흡수경계의 흡수율 $AR(\theta)$ 는 식 (17)과 같이 정의할 수 있으며, 이로부터 모든 입사각에 대한 평균 흡수율을 식 (18)로 정의할 수 있다. 여기서 AR (Absorption Ratio)은 흡수율을 의미한다.

$$AR(\theta) = 1 - E_R \sin \theta \quad (17)$$

$$AR_{ave} = \frac{\int_{\theta} 1 - E_R \sin \theta d\theta}{\int_{\theta} d\theta} \quad (18)$$

이제 식 (1), (2)에서의 a, b값을 식 (17)의 입사각에 따른 흡수율이 최대가 되도록 결정하면 표 2의 값을 얻을 수 있다.

그림 3은 표 2의 값을 적용하여 산출된 식 (17)의 흡수율을 나타낸다.

그림 3으로부터 P파의 입사각에 따라 식 (17)의 값을 극대화 시키는 계수 a, b값을 사용하였을 경우, 모든 입사각에서 기존 연구결과보다 향상된 흡수율을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

3.3 S파 입사에 따른 흡수경계조건의 최적화

P파가 입사하는 경우와 같은 방법으로 식 (6), (7)을 식 (8)에 삽입하여 얻어진 u_1 과 u_3 를 식 (9), (10)에 삽입하여 해를 구한 후, 다음 식 (19), (20)에 삽입하여 진폭비를 구한다.

CASE I : Angle θ greater than the critical angle θ_c

$$|u_p/u_I| = (k_p/k_s)|P/I| = s|P/I|$$

$$|u_s/u_I| = |S/I| \quad (19)$$

CASE II : Angle θ less than the critical angle θ_c

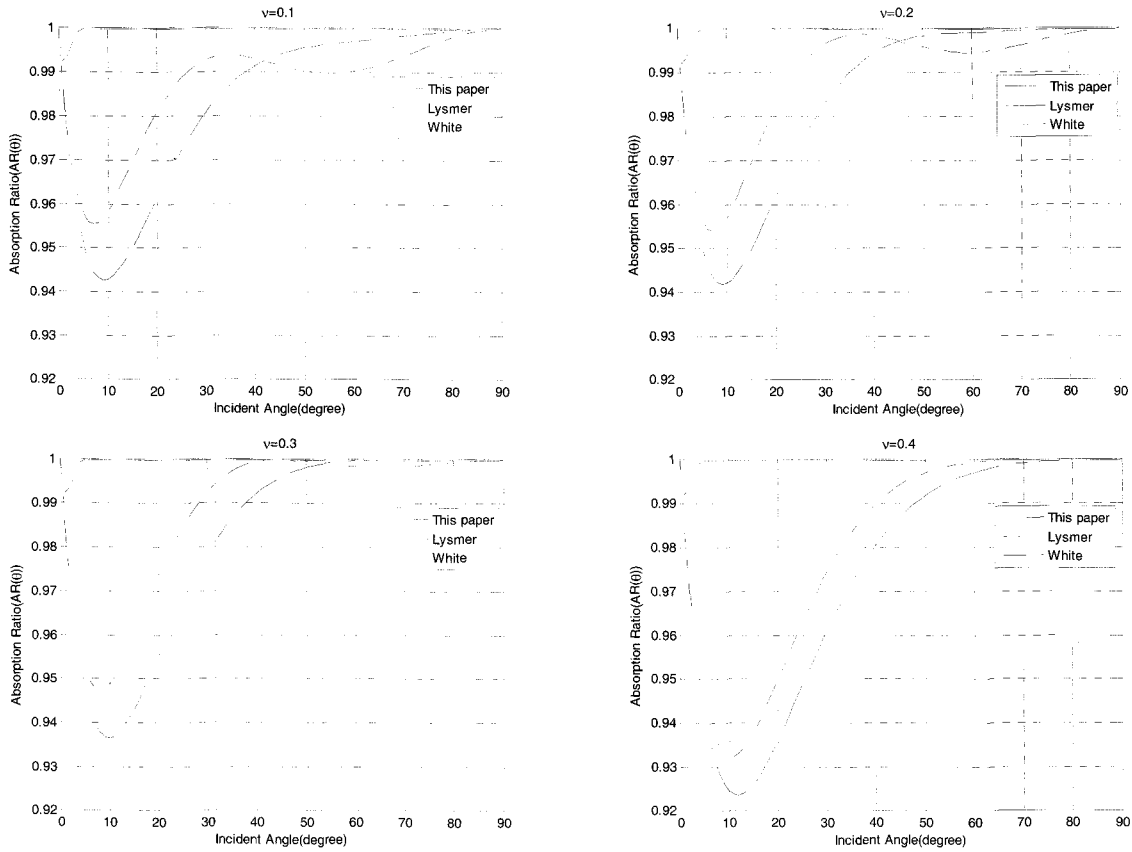


그림 3 P파 입사시의 입사각에 따른 흡수율

표 3 S파 입사시 흡수경계 계수 값

Poisson's ratio	Coefficient	Incident angle								
		10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0.10	a	0.928	0.999	1.044	1.007	1.021	1.155	1.253	1.313	1.341
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.227	0.577	0.815	0.954	1.000
0.20	a	0.813	0.895	0.952	0.925	0.935	1.061	1.151	1.206	1.232
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.223	0.577	0.815	0.954	1.000
0.30	a	0.675	0.763	0.825	0.807	0.823	0.926	1.005	1.053	1.075
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.232	0.577	0.815	0.954	1.000
0.4	a	0.487	0.569	0.627	0.616	0.628	0.703	0.767	0.804	0.821
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.231	0.574	0.815	0.954	1.000

$$\begin{aligned}
 |u_p/u_l| &= \cos \theta |P/I| \\
 |u_s/u_l| &= |S/I|
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

그림 2와 식 (19), (20)을 이용하여 경계면에서의 단위면적 및 단위시간당 입사파 에너지에 대한 반사파의 에너지비 (E_R)를 식 (21)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 E_R &= |u_s/u_l|^2 + \frac{1}{s} \frac{\sin \theta_p}{\sin \theta} |u_p/u_l|^2 \text{ for } \theta \geq \theta_c, \\
 E_R &= |u_s/u_l|^2 \text{ for } \theta < \theta_c
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

이제 식 (1), (2)에서의 a, b값을 식 (17)의 입사각에 따른 흡수율이 최대가 되도록 결정하면 표 3의 값을 얻을 수 있다.

그림 4는 표 3의 값을 적용하여 산출된 식 (17)의 흡수율을 나타낸다.

그림 4로부터 S파의 입사각에 따라 식 (17)의 값을 극대화 시키는 계수 a, b값을 사용하였을 경우, 모든 입사각에서 기존 연구결과보다 향상된 흡수율을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

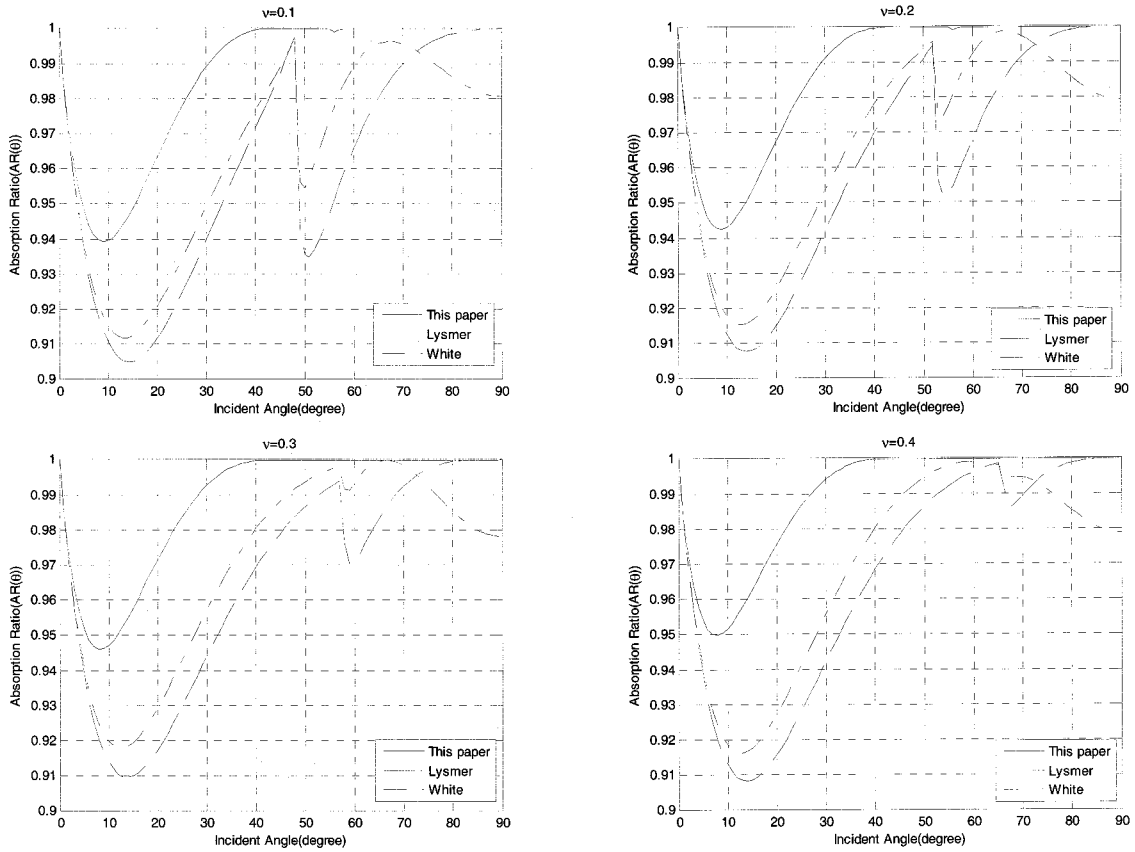


그림 4 S파 입사시의 입사각에 따른 흡수율

표 4 P & S파 입사시 흡수경계 계수 값

Poisson's ratio	Coefficient	Incident angle								
		10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0.10	a	0.878	0.830	0.835	0.884	0.925	0.992	1.010	1.005	1.000
	b	0.209	0.396	0.589	0.792	0.654	0.714	0.858	0.963	1.000
0.20	a	0.987	0.915	0.928	0.963	1.019	0.984	1.005	1.004	1.000
	b	0.189	0.351	0.509	0.664	0.856	0.680	0.845	0.959	1.000
0.30	a	1.191	1.022	1.012	1.022	1.033	0.967	0.995	1.001	1.000
	b	0.161	0.299	0.431	0.558	0.683	0.642	0.829	0.956	1.000
0.4	a	1.732	1.146	1.081	1.057	1.041	1.029	0.967	0.992	1.000
	b	0.141	0.241	0.357	0.482	0.623	0.779	0.815	0.952	1.000

4. 흡수경계조건의 적용

3장에서 P파 및 S파의 입사각에 따른 최적화된 흡수경계 조건 값을 제시하였다. 그러나 대부분의 일반적인 문제에 있어서 이러한 두 종류의 파(P파, S파)는 동시에 경계면에 입사하게 되므로 이러한 경우 흡수경계조건의 적용을 위해서는 계수 값에 대한 보정이 필요하다. 다음 표 4는 식 (16)과 (21)을 동시에 고려하여 식 (17)의 흡수율이 최대가 되도록 산정된 계수 값을 나타낸다.

위와 같이 산정된 표 2~4의 흡수경계조건을 주기하중에

의한 반무한 탄성영역에서의 전파방정식(Miller 등, 1954)에 적용하였다. 식 (22)와 (23)은 본 연구를 위해 수정된 주기하중에 의한 전파식을 나타낸다.

$$u_x(x, y) = \frac{ae^{i\pi} \cos \theta}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{k_2^{\frac{5}{2}} \sin 2\theta (k_2^2 \sin^2 \theta - k_1^2)^{\frac{1}{2}}}{F(-k_2 \sin \theta)} e^{-ik_2 R} \right.$$

$$\left. \frac{k_1^{\frac{3}{2}} \sin \theta (k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta)}{F(-k_1 \sin \theta)} e^{-ik_1 R} \right\} \quad (22)$$

$$u_y(x, y) = \frac{ae^{\frac{i\pi}{4}} \cos \theta \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mu}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2k_2^{\frac{5}{2}} \sin^2 \theta (k_2^2 \sin^2 \theta - k_1^2)^{\frac{1}{2}}}{F(-k_2 \sin \theta)} e^{-ik_2 R} \\ & + \frac{k_1^{\frac{3}{2}} \cos \theta (k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta)}{F_0(-k_1 \sin \theta)} e^{-ik_1 R} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

여기서

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - k_2^2)^2 - 4\zeta^2(\zeta^2 - k_1^2)^{1/2}(\zeta^2 - k_2^2)^{1/2}$$

이며, k_1 및 k_2 는 P파 및 S파의 파수(wave number)를 각각 나타낸다.

위 식은

$$u_R = u_y \cos \theta + u_x \sin \theta, \quad u_\theta = u_x \cos \theta - u_y \sin \theta$$

와 같은 관계에 의해 식 (24), (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_R = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{4} - k_1 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{k_1^{\frac{3}{2}} \cos \theta (k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta)}{F(-k_1 \sin \theta)} \quad (24)$$

$$u_\theta = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{5\pi}{4} - k_2 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2k_2^5}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\sin 2\theta (k_2^2 \sin^2 \theta - k_1^2)^{1/2}}{F(-k_2 \sin \theta)} \quad (25)$$

식 (24)와 (25)는 각각 P파와 S파의 변위성분으로써 최대 진폭이 경계면에서 입사각에 따라 그림 5와 같이 변하게 된다.

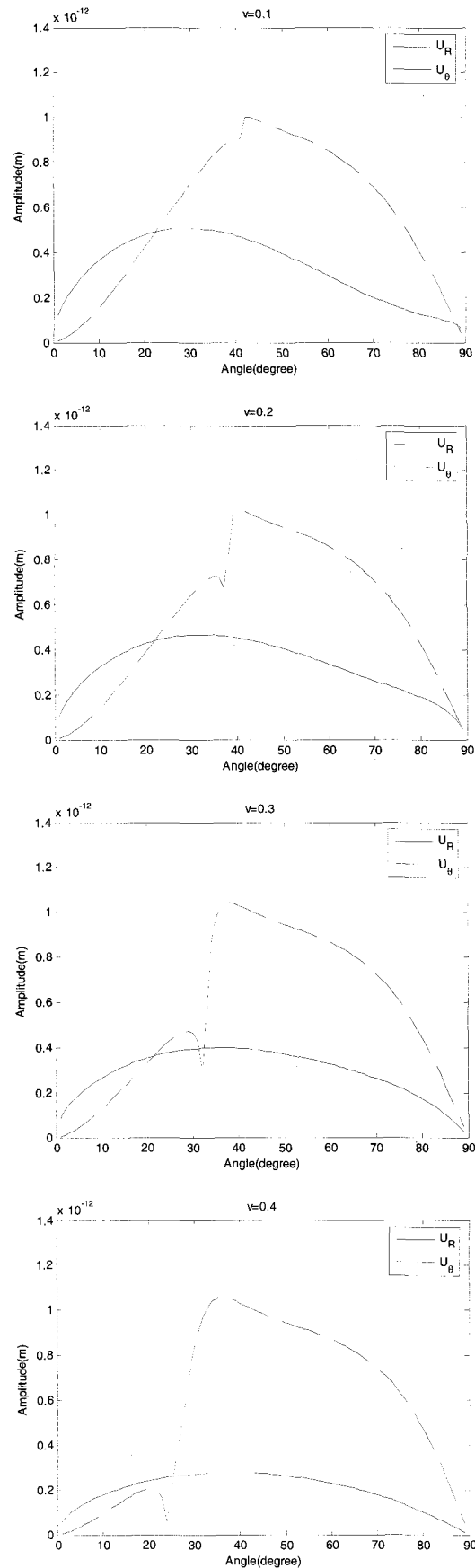


그림 5 포아송비별 전파각에 따른 P파 및 S파의 진폭

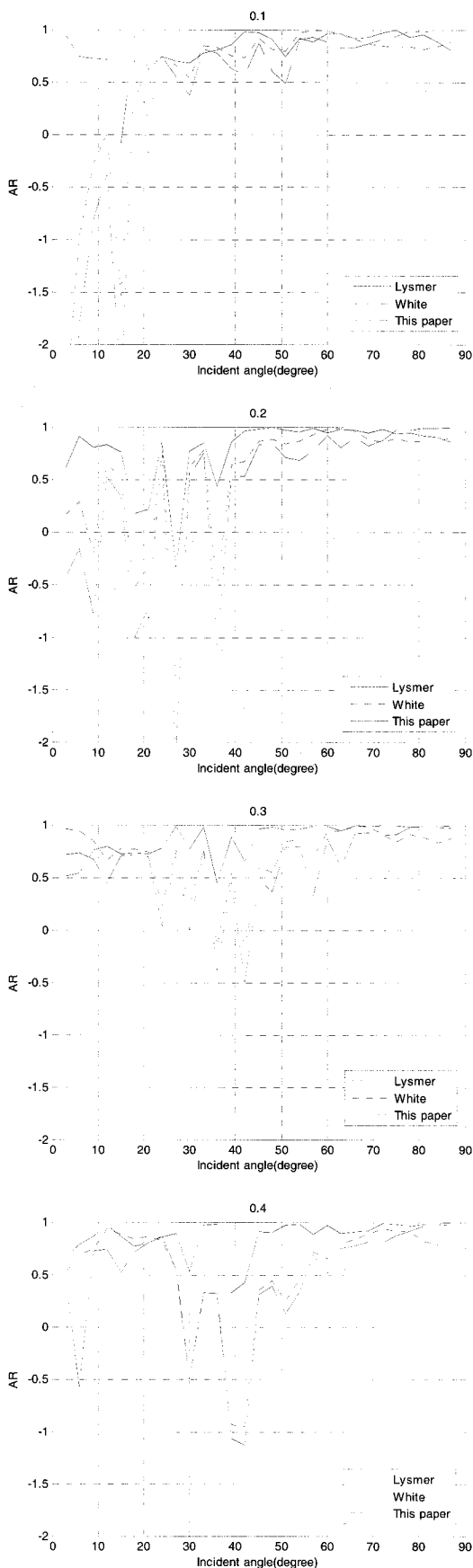


그림 6 입사각에 따른 흡수경계의 흡수율

본 연구에서는 흡수경계조건 적용시 이러한 입사각에 따른 진폭크기의 관계를 고려하였다. 즉, $|u_\theta| > |u_R|$ 인 경우 표 3의 값을, $|u_\theta| < |u_R|$ 인 경우 표 4의 값을 적용하였다.

주기하중에 의한 전파식에 대해 흡수경계의 성능을 정량적으로 표현하기 위해서는 새로운 흡수율의 정의가 필요한데, 이는 주기하중에 대한 전파식에 대해서는 반사파의 진폭성분을 구하기 어려우므로 식 (17)의 흡수율을 사용할 수 없기 때문이다. 따라서 식 (26)과 같이 흡수율을 정의 한다.

$$AR = 1 - \left| \frac{LHS - RHS}{LHS} \right| \quad (26)$$

여기서 LHS는 식 (22)와 (23)을 식 (9)와 (10)에 삽입하여 얻어진 좌항의 $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ 값을 나타내며, RHS는 우항의 $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ 값을 나타낸다.

그림 6은 각 포아송비별 입사각에 따른 식 (26)의 값을 나타낸 것이다.

그림 6으로부터 대부분의 입사각에서 본 연구에서 제안한 방법이 보다 우수한 성능을 가짐을 볼 수 있으며, 이로부터 입사각 및 진폭크기를 고려하여 흡수경계조건을 적용할 경우 보다 흡수율을 높일 수 있음을 확인할 수 있다.

5. 수치해석 예제

5.1 해석 모형

본 절에서는 수치해석(유한요소해석)시 입사각에 따른 흡수경계의 성능을 조사하기 위한 연구를 수행하였다. 이를 위해 그림 7의 모형 A와 모형 B에서의 변위를 비교하였다. 여기서 모형 A는 96km×48km의 모형으로 수신점을 가진점으로부터 7.2km와 12km에 위치시켜 경계면으로 부터의 반사파가 수신점에 도달하기 전인 12초까지의 변위를 측정하였다. 모형 B는 24km×24km의 모형으로써 경계면에 점성감쇠기를 부착시켜 흡수경계를 구현하였으며 수신점을 모형 A와 동일하게 위치시켜 역시 12초까지의 변위를 측정하였다.

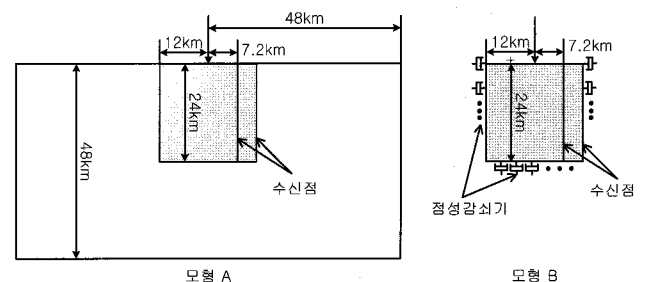


그림 7 입사각에 따른 흡수효과 고찰에 사용된 모형

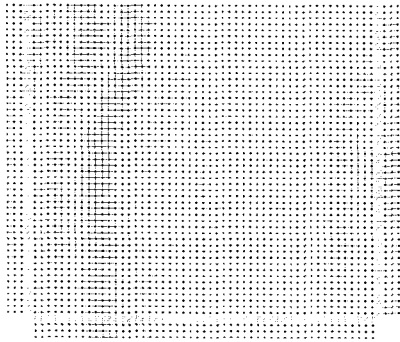


그림 8 수치모형

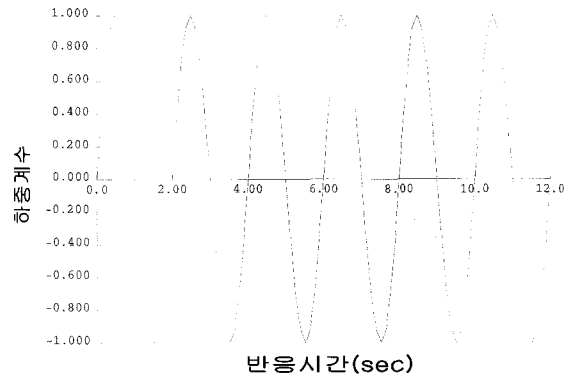


그림 9 사용하중

표 5 매질의 물성 및 강제 진동수

포아송비	밀도 (kg/m ³)	탄성계수 (kgf/m ²)	강제 진동수 (Hz)
0.3	7,800	209E9	0.5

또한, 흡수경계의 성능을 정량적으로 나타내기 위해 식 (27)과 같이 흡수율을 정의하였다.

$$AR = 1 -$$

$$\left| \frac{\text{displacement at model A} - \text{displacement at model B}}{\text{displacement at model A}} \right| \quad (27)$$

여기서 모형 A의 변위는 수신점까지의 반사파가 도달하기 전까지 측정된 값이므로 식 (27)의 흡수율을 산출하는데 있어서 정확해로 간주하였으며, 모형 B의 변위는 점성감쇠기가 부착된 경계면에서의 반사파가 고려된 값이므로 수치해로 간주하였다.

5.2 해석방법

파의 전파문제를 정확히 구현하기 위해서는 파장(wave length)에 대한 최적의 요소크기 및 해석시간 간격을 결정하여야 한다. 일반적으로 요소크기와 해석시간 간격은 정밀도에 반비례하지만 지나치게 많은 요소의 사용 및 작은 해석시간 간격은 전산적 부담을 가중시킨다. 따라서 본 논문에서는 정밀도를 확보하면서도 파의 전파문제 해석에 적합하다고 알려져 있는 최소파장의 약 1/12 크기의 요소를 사용하였다. 해석시간 간격은 가진 하중 시간의 1/10로 하였는데, 이는 가진하중의 재하시간에 따라 달라지는 표면파의 파장을 정확히 표현하기 위함이며 이 시간간격은 안정조건(stability condition)을 충분히 만족시키는 값이다. 또한 시간이력해석을 위해 음해법(implicit method)을 사용하였다. 이는 양해법(explicit method)에 비해 보다 안정성(stability)이 보

장되며, 음해법으로도 본 연구에서 사용할 요소개수가 확보되기 때문이다.

그림 8과 표 5는 해석에 사용된 수치모형과 물성을 나타낸다. 그림 8에서 경계면에 점성감쇠기를 설치하여 입사되는 파가 반사되지 않고 흡수되게 함으로써 흡수경계를 구현하였다.

그림 8에서 모형의 지표면 중앙에 하중을 재하시켰으며, 이때 그림 9의 주기하중을 사용하여 동적 해석을 실시하였다.

5.3 흡수경계조건의 적용

그림 3과 4의 결과로부터 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 흡수효과는 경계면으로의 입사각에 종속적임을 알 수 있었다. 여기서 경계면에 수직으로 입사하는 P파 및 S파에 대해서는 완전한 흡수효과를 가지게 할 수 있으나, 경계면에 수직으로 입사하는 Rayleigh파에 대해서는 완전한 흡수효과를 가지게 할 수 없다. 이는 P파와 S파가 파의 진행방향에 수평 및 수직방향으로 입자운동을 하는데 반해, Rayleigh파는 타원형의 입자운동을 하므로 경계면에 대해 항상 입사각이 존재하기 때문이다. Rayleigh파에 대해서도 최적의 흡수효과를 가지도록 식 (9)와 (10)에서 계수 a, b값을 조절할 수는 있겠으나, Rayleigh파의 입자운동은 주파수에 종속적이어서 주파수에 따라 계수의 값들이 변화되므로 Rayleigh파에 대한 최적의 계수값들을 산출한다는 것은 실용적이지 못하다. 특히 여러 주파수 대역이 섞여있는 경우 이러한 경계조건의 사용은 흡수율을 오히려 저하시킬 수 있다. 따라서 본 연구에서는 P파 및 S파에 대해 최적화된 계수값들을 적용하여 해석을 수행하였다.

그림 10은 모형 A의 수치모형에서 하중제하 이후 12초 경과시의 응력전파를 나타낸 것이다. 여기서 지표면으로부터 약 480m 사이에 응력이 집중되어 전파하는 파와 480m~4.800m 사이에서 응력이 집중되어 전파하는 파를 관찰할 수



그림 10 모형 A에서의 응력전파(T=12sec)

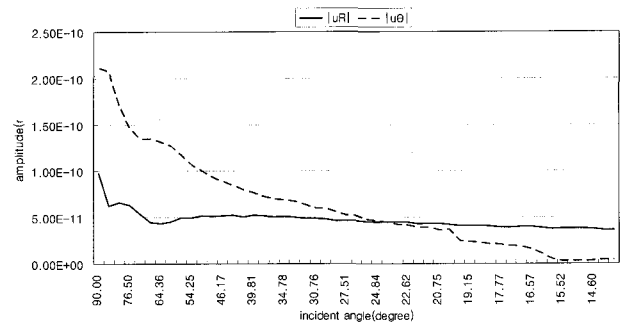


그림 11 입사각에 따른 P파 및 S파의 최대진폭

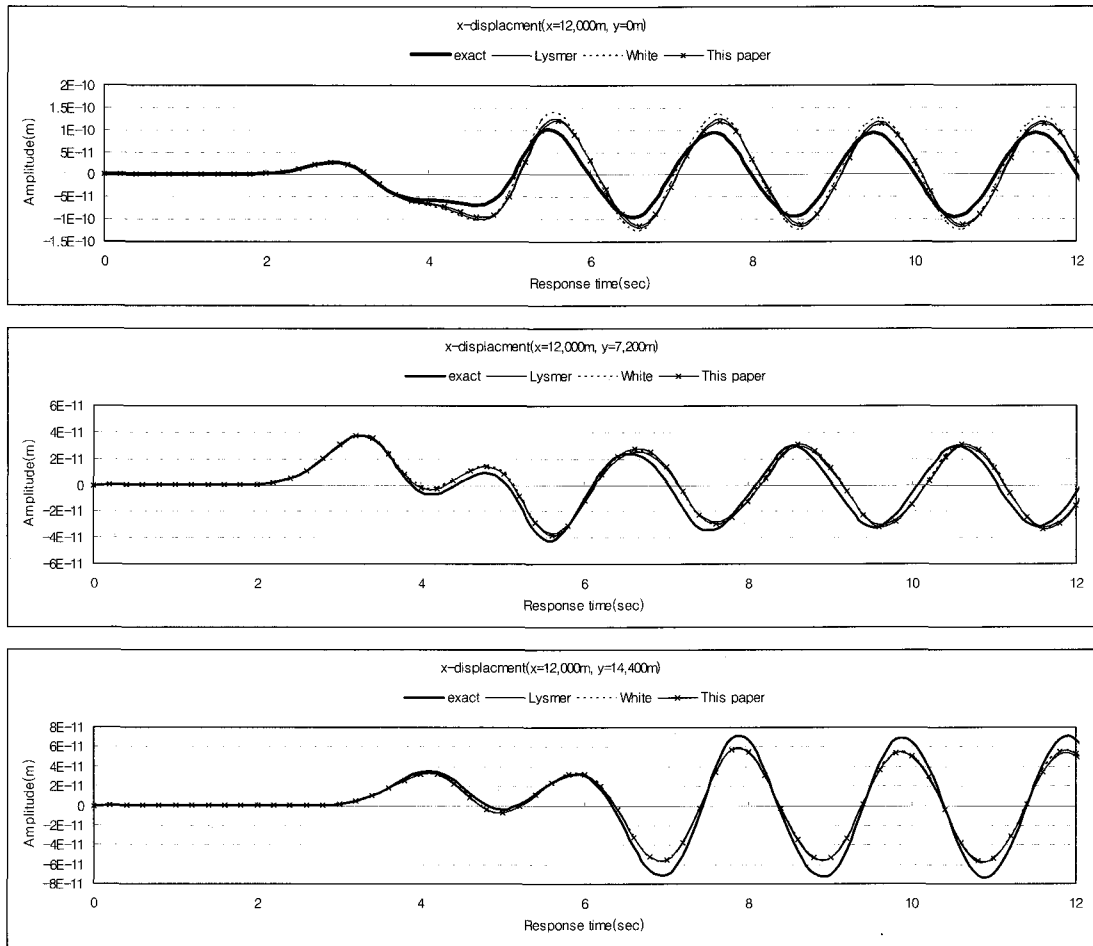


그림 12 모형 B의 경계면(x=12,000)에서의 깊이에 따른 x방향 변위

있는데, 이는 각각 Rayleigh파와 S파의 전파시간과 정확히 일치한다. 따라서 이들을 각각 Rayleigh파와 S파로 간주할 수 있으며, Rayleigh파는 S파에 비해 속도가 느리므로 그림 10에서 약간의 간격을 가지고 전파하는 것을 볼 수 있다.

그림 10에서와 같이 지표면과 수평한 방향으로 전파하는 체적파(P파, S파)는 깊이의 증가에 따라 진폭이 급격히 감소하게 된다. 따라서 지표면으로부터 약 4,800m까지는 S파가 경계면에 수직으로 입사하는 경우인 표 3의 90°에 해당하는 값을 적용하며, 그 이하에 대해서는 입사각을 고려하여 표 4의

값을 적용한다. 그림 11은 모형 A의 수신점($x = 12,000m$, $y = 0 \sim 24,000m$)에서 입사각에 따른 P파 및 S파의 최대진폭 성분을 나타낸 것이다. 여기서 입사각은 하중재하점과 수신점을 잇는 직선이 y 축과 이루는 각을 의미한다.

5.4 해석결과에 따른 흡수경계의 성능 분석

다음 그림 12는 기존의 연구(Lysmer 등, 1969; White 등, 1977)와 본 연구에 의한 모형 B의 수신점 위치별 x 방

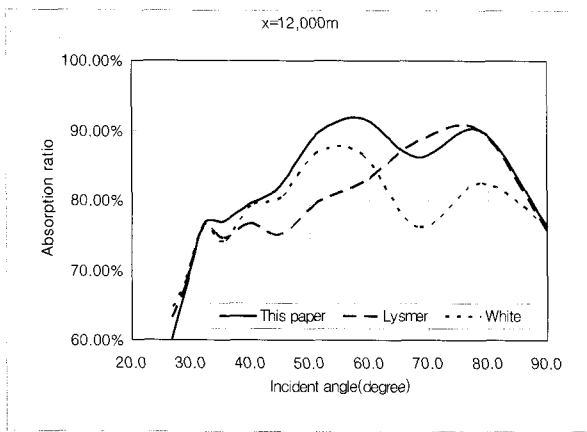


그림 13 입사각에 따른 흡수율(x=12,000m)

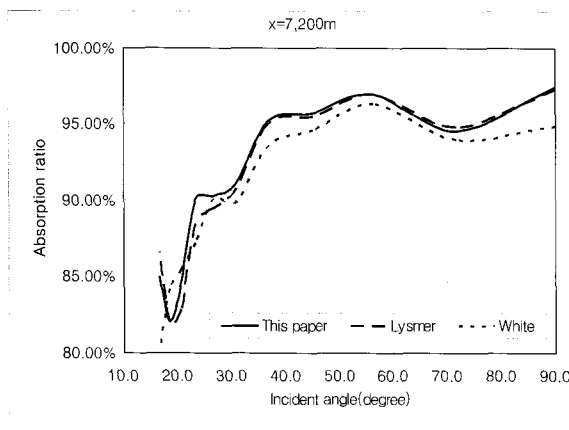


그림 14 입사각에 따른 흡수율(x=7,200m)

향 변위 ($x = 12,000m$)를 나타낸 것이다. 그림 12에서 exact는 그림 7의 모형 A에서의 변위를 나타낸 것이다.

그림 12에서 모든 연구결과가 모형 A의 변위를 잘 나타내고 있음을 알 수 있다. 다음 그림 13과 14는 모형 B의 수신점에서의 흡수율을 나타낸 것이다. 이때 흡수율은 식 (27)에 의해 계산되어진 값으로서, x 및 y 방향 변위를 같이 고려 ($\sqrt{x^2 + y^2}$)하였다.

그림 13에서 입사각이 감소할수록 흡수율이 감소하는 것을 볼 수 있는데, 이는 3장의 결과와 일치하는 것으로서 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계는 흡수율이 입사각에 종속적임을 확인할 수 있다. 또한 80° 이상의 입사각에서, 즉 수신점이 지표면에 가까워질수록 흡수율이 급격히 감소하는 것을 볼 수 있는데, 이는 앞에서 언급한 바와 같이 지표면에서 발생하는 Rayleigh파의 영향으로써, 타원형으로 입자운동을 하는 Rayleigh파가 경계면에 경사각을 가지고 입사하기 때문으로 판단된다. 그러나 그림 14의 내부점의 경우 이러한 Rayleigh파의 영향은 크게 작용하지 않음을 볼 수 있는데, 이는 내부점의 경우 경계면에서 한번 흡수된 반사파가 측정

되기 때문으로써 경계점보다 상대적으로 반사파의 영향이 작기 때문으로 분석되며, 이것은 그림 14의 내부점이 그림 13의 경계점에 비해 높은 흡수율을 보이는 것으로부터 확인할 수 있다.

그림 13과 14에서 일부구간을 제외한 전 구간에서 본 연구에서 제안한 방법이 보다 우수한 흡수율을 보이는 것을 볼 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 성능을 향상시키기 위한 연구를 수행하였다. 해석적인 영역과 수치적인 영역으로 나누어 연구를 수행하였으며, 이를 통한 결론은 다음과 같다.

1. 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 성능은 입사각에 종속적이므로, 이를 이용하여 입사각에 따른 최적의 흡수경계조건을 제시하였으며, 2차원 조화평면파동방정식을 사용하여 제시된 흡수경계조건의 우수성을 입증하였다.
2. Miller 등의 주기하중에 의한 전파방정식을 변형시켜 흡수경계조건에 삽입한 후 응력벡터를 비교함으로써 흡수율을 산정하였으며, 이때 입사각과 함께 P파 및 S파의 진폭을 고려하여 흡수경계조건을 적용시킴으로써 흡수율을 향상시킬 수 있음을 보였다.
3. 수치해석을 통한 흡수율 산정을 위해 Miller 등의 파진행 문제를 수치적으로 모사하였다. 입사각에 따라 제시된 흡수경계조건을 파의 전파특성과 함께 고려하여 수치모형에 반영하였으며, 수치모형의 내부점과 경계점에서의 변위를 측정함으로써 흡수율을 산정하였다. 그 결과 흡수경계의 흡수효과가 보다 향상됨을 확인 하였다.

참 고 문 헌

- 김희석, 이종세 (2003) 유한요소법에서의 파진행 문제를 위한 흡수경계 성능에 관한 연구, 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 16(2), pp.413~420.
- 김희석, 이종세 (2007) 파진행 문제를 위한 Paraxial 경계조건인 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.303~309.
- 이종세, 손운기 (1998) 표면파 산란거동의 유한요소 해석, 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 11(1), pp.383~389.
- Cundal P.A., Kunar R.R., Carpenter P.C., Marti J. (1978) Solution of Infinite Dynamic Problems by

- Finite Modelling in the Time Domain, *Proceeding 2nd International Conference on Applied Mathematics Modeling*, Madrid.
- Engquist, B., Majda, A.** (1977) Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves, *Mathematics of computation*, 31(139), pp.629~651.
- Liao, Z. P., Wong, H. L.** (1984) A Transmitting Boundary for the Numerical Simulation of Elastic Wave Propagation, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 3(4), pp.174~183.
- Lysmer, J., Kuhlemeyer, R. L.** (1969) Finite Dynamic Model for Infinite Media, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 95, EM4, pp.859~877.
- Lysmer, J., Richart, F. E., Jr.** (1966) Dynamic Response of Footings to Vertical Loading, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, 92, SM1, pp.65~91.
- Miller, G. F., Pursey, H.** (1954) The Field and Radiation Impedance of Mechanical Radiators on the Free Surface of a Semi-Infinite Isotropic Solid, *Proceeding Royal Society*, A223, pp.521~541.
- Smith, W. D.** (1974) A Non-reflecting Plane Boundary for Wave Propagation Problems, *Journal of Computational Physics*, 15, pp.492~503.
- White, W., Valliappan, S., Lee, I. K.** (1977) Unified Boundary for Finite Dynamic Models, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 103, EM5, pp.949~964.