

영역/경계 분할 정식화에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 검토

Computational Efficiency of 3-D Contact Analysis by Domain/Boundary Decomposition Formulation

김 용 언* 류 한 열* 신 의 섭†
Kim, Yong-Uhn Ryu, Han-Yeol Shin, Eui-Sup
(논문접수일 : 2007년 3월 16일 ; 심사종료일 : 2007년 6월 15일)

요 지

많은 계산량이 요구되는 삼차원 접촉 문제의 효율적인 유한요소 해석을 위하여 영역/경계 분할 기법을 적용하였다. 접촉 경계면의 부등식 적합 조건과 부영역, 공유면, 접촉 공유면의 등식 적합 조건을 모두 벌칙 함수로 처리하였다. 이에 따라 모든 유효 강성 행렬이 양정치화되므로, 역행렬과 같은 각종 행렬 연산이 매우 간편해진다. 또한 전체 영역의 형상이 복잡하더라도, 임의의 부영역, 공유면, 접촉 공유면 단위로 쉽게 유한요소 모델링할 수 있다. 즉, 관련 지배 방정식은 물론 경계 조건도 독립적으로 이산화할 수 있으므로, 국부적인 비선형 접촉 조건에 대한 효율적인 해석이 가능하다. 간단한 수치 예제를 통하여 삼차원 접촉 해석의 효율성에 관한 기본적인 경향을 검토하였다.

핵심용어 : 삼차원 접촉, 영역/경계 분할, 접촉 공유면, 벌칙 함수

Abstract

A domain/boundary decomposition technique is applied to carry out efficient finite element analyses of 3-D contact problems. Appropriate penalty functions are selected for connecting an interface and contact interfaces with neighboring subdomains that satisfy continuity constraints. As a consequence, all the effective stiffness matrices have positive definiteness, and computational efficiency can be improved to a considerable degree. If necessary, any complex-shaped 3-D domain can be divided into several simple-shaped subdomains without considering the conformity of meshes along the interface. With a set of numerical examples, the basic characteristics of computational efficiency are investigated carefully.

Keywords : 3-D contact, domain/boundary decomposition, contact interface, penalty method

1. 서 론

일반적으로 접촉 문제에 대한 정밀한 해석을 위해서는 실제 삼차원 구조 형상에 가까운 유한요소 모델이 필요하다. 삼차원 공간에서 일어나는 접촉 현상을 이차원 모델로 단순화하게 되면, 자연히 계산 오차가 크게 발생할 가능성이 있다. 그러나 직접 삼차원 접촉 문제를 취급하는 경우, 복잡한 형상에 적합한 유한요소 모델링, 매우 큰 자유도에서 기인하는 계산 시간 증가 등의 어려움이 수반된다. 따라서 삼차원 접촉 문제에서는 해석 결과의 정확성과 함께 해석 과정의 효율화가 현실적으로 중요한 과제이다. 그러나 기존 대부분의

해석 기법은 계산의 효율성 또는 소요되는 계산량에 관련된 기준 체시가 다소 미흡하다고 판단된다. 즉, 접촉 해석에 대한 대폭적인 효율성 향상이 가능한 알고리즘의 설정 및 이에 관한 정량적인 분석 결과가 요구된다.

접촉은 고체 또는 구조 표면에서 하중이 전달되는 가장 보편적인 메커니즘이며, 접촉 유무와 그 영역을 사전에 알 수 없으므로 수학적으로 비선형 문제에 해당한다. 이에 대한 일반적인 해석 방법으로 벌칙 함수법과 라그랑지 승수법이 주로 이용되어 왔다(Zhong 등, 1994). 그러나 시간 증분 또는 반복 계산 단계에 있어서 경계면 일부에서만 접촉 상태가 변함에도 불구하고, 전체 영역을 기준으로 각종 수식과 행렬

† 책임저자, 정희원 · 전북대학교 기계항공시스템공학부 교수
Tel: 063-270-3995 ; Fax: 063-270-2472
E-mail: esshin@chonbuk.ac.kr
* 전북대학교 항공우주공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 10월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

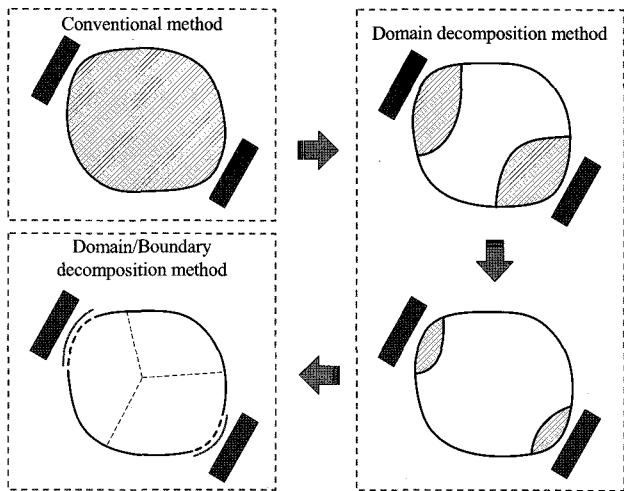


Fig. 1 Domain/boundary decomposition method

을 다룬다는 점이 효율성을 저하하는 근본적인 원인이다. 기하학적 또는 재료 비선형 문제와 달리 접촉의 경우 국부적인 경계면에서 비선형성이 야기됨을 감안하여, 이에 알맞은 정식화 방법과 해석 알고리즘을 고안하여야 한다.

이런 관점에서 가장 효과적인 개념은 해석 영역을 분할한 후 부분적으로 유한요소법을 적용하는 것이다. Fig. 1은 접촉 경계면을 갖는 구조물을 대상으로 일반적인 해석 기법, 영역 분할법, 영역/경계 분할법을 상호 비교한 개념도이다. 빗금 부분은 실제 비선형 계산을 수행해야 하는 영역을 의미한다. 일반적인 해석 기법으로는 영역 전체에서 비선형 계산을 수행해야 하지만, 영역 분할법을 적용하면 접촉 경계면의 인근 영역에서만 비선형 계산을 수행할 수 있다(신의섭 등, 2005). 또한, 영역/경계 분할법은 접촉이 발생하는 경계면 자체를 궁극적으로 영역에서 분리한 후, 비선형 계산을 독립적으로 수행하는 기법이다(류한열, 2007). 즉, 다수의 부영역(subdomain), 공유면(interface), 접촉 공유면(contact interface)을 기준으로 유한요소 정식화를 하면, 접촉 대상이 되는 비선형 경계면을 소수의 접촉 공유면에 할당할 수 있다. 따라서 해석의 효율성이 크게 개선될 수 있음은 물론, 다중 체결과 같은 복잡한 구조 형상에 대한 모델링 문제도 쉽게 해결할 수 있다. 현재까지 영역 분할에 근거한 여러 이산화 기법이 제안되어 왔으나(Bourel 등, 2006; Dureisseix 등, 2001; Farhat 등, 1991; Pantano 등, 2002; Ransom 등, 1993; Shin 등, 2000; Cho 등, 2002), 계산량 절감에 관련된 정량적인 분석 결과는 충분하지 않다.

본 논문에서는 부영역, 공유면, 접촉 공유면에 기반을 둔 영역/경계 분할 유한요소법을 삼차원 접촉 문제 해석에 적용하였다. 외부 벌칙 함수법으로 접촉 부등식 구속 조건을 부과하였고, 부영역과 공유면 또는 접촉 공유면의 결합을 위한

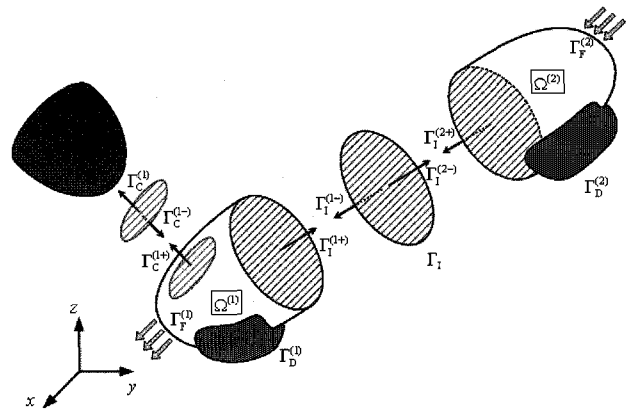


Fig. 2 An example of subdomain, interface, and contact interface

등식 적합 조건에도 벌칙 함수를 이용하였다. 정식화에 따른 알고리즘 설정과 간단한 수치 예제를 통하여, 제안된 기법에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 향상을 면밀히 검토하였다.

2. 영역/경계 분할법

2.1 변분 정식화

Fig. 2와 같이 전체 영역을 N_s 개의 부영역 $\Omega^{(k)}$, 공유면 Γ_i , N_s 개 이하의 접촉 공유면 $\Gamma_c^{(k)}$ 의 집합으로 생각한다. $\Gamma_b^{(k)}$, $\Gamma_f^{(k)}$, $\Gamma_c^{(k)}$ 는 각각 변위, 분포 하중, 접촉 경계면이다. 이에 따라 부영역, 공유면, 접촉 공유면에서의 변위를 다음과 같이 정의한다.

$$u_i^{(k)} \text{ defined in } \Omega^{(k)} \quad (1)$$

$$v_i \text{ defined on } \Gamma_i \quad (2)$$

$$w_i^{(k)} \text{ defined on } \Gamma_c^{(k-)} \text{ or } \Gamma_c^{(k+)} \quad (3)$$

여기서 위 첨자 (k) 는 k 번째 부영역 또는 접촉 공유면에 관련됨을 의미한다.

접촉 경계면에서의 부등식 구속 조건은 외부 벌칙 함수로 처리한다.

$$w_i^{(k)} n_i^{(k)} - s^{(k)} \leq 0, \quad \sigma_n^{(k)} = t_{ci}^{(k)} n_i^{(k)} \leq 0 \quad (4)$$

$$t_{ci}^{(k)} = -\frac{1}{\epsilon_c^{(k)}} \langle w_i^{(k)} n_i^{(k)} - s^{(k)} \rangle^+ n_i^{(k)} \quad (5)$$

여기서 t_{ci} 는 접촉 하중(traction) 벡터, n_i 는 법선 벡터, ϵ_c 는 벌칙 상수, s 는 초기 접촉 간극이다. 벌칙 상수는 10^{-3} 에서 10^{-15} 사이에서 안정적인 결과를 보이며, 여기서는 10^{-8} 의 값을 사용하였다. $\langle f \rangle^+$ 는 $f \geq 0$ 이면 f , $f < 0$ 이면 0의 값이 된다.

한편 공유면과 접촉 공유면에서의 변위 연속 조건을 만족하기 위한 하중 벡터의 벌칙 함수 표현은 다음과 같다.

$$t_{I_i}^{(k+)} = -t_{I_i}^{(k-)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{DI}^{(k)}} (v_i - u_i^{(k)}) \quad (6)$$

$$t_{C_i}^{(k+)} = -t_{C_i}^{(k-)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{CI}^{(k)}} (w_i^{(k)} - u_i^{(k)}) \quad (7)$$

여기서 아래 첨자 D는 변위, I는 공유면, C는 접촉 공유면 또는 접촉 경계면에 관련됨을 의미한다.

변분 정식화를 위한 시험 함수(test function)로서 가상 변위 δu_i , δv_i , δw_i 를 도입하면, 부영역, 공유면, 접촉 공유면에 대한 지배 방정식의 약형(weak form)을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\delta \Pi_D = \sum_{k=1}^{N_S} \delta \Pi_D^{(k)} + \delta \Pi_{DI} + \sum_{k=1}^{N_S} \delta \Pi_C^{(k)} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_D^{(k)} = & \int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} \bar{u}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV + \int_{\Omega^{(k)}} \sigma_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} dV \\ & - \int_{\Omega^{(k)}} \bar{f}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV - \int_{\Gamma_F^{(k)}} \bar{t}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS \\ & + \frac{1}{\mathcal{E}_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_I^{(k+)}} (u_i^{(k)} - v_i) \delta u_i^{(k)} dS \\ & + \frac{1}{\mathcal{E}_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k+)}} (u_i^{(k)} - w_i^{(k)}) \delta u_i^{(k)} dS \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta \Pi_{DI} = \sum_{k=1}^{N_S} \delta \Pi_{DI}^{(k-)} = \sum_{k=1}^{N_S} \frac{1}{\mathcal{E}_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_I^{(k+)}} (v_i - u_i^{(k)}) \delta v_i dS \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_C^{(k)} = & \frac{1}{\mathcal{E}_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k-)}} (w_i^{(k)} - u_i^{(k)}) \delta w_i^{(k)} dS \\ & + \frac{1}{\mathcal{E}_C^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k)}} \langle w_j^{(k)} n_j^{(k)} - s^{(k)} \rangle^+ n_i^{(k)} \delta w_i^{(k)} dS \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 ρ 는 밀도, f_i 는 체적력을 의미한다.

2.2 유한요소 해석 알고리즘

일반적인 삼차원 유한요소법 이산화 과정에 따라 변위와 변형도를 다음과 같이 보간한다.

$$\begin{Bmatrix} u_x^{(k)}(x, y, z; t) \\ u_y^{(k)}(x, y, z; t) \\ u_z^{(k)}(x, y, z; t) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_D^{(k)T} \mathbf{u}^{(k)} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(k)}(x, y, z; t) \\ \varepsilon_y^{(k)}(x, y, z; t) \\ \varepsilon_z^{(k)}(x, y, z; t) \\ \gamma_{yz}^{(k)}(x, y, z; t) \\ \gamma_{xz}^{(k)}(x, y, z; t) \\ \gamma_{xy}^{(k)}(x, y, z; t) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_D^{(k)T} \mathbf{u}^{(k)} \quad (13)$$

여기서 $\mathbf{H}_D^{(k)}$ 는 변위 보간 행렬, $\mathbf{B}_D^{(k)}$ 는 변형도-변위 행렬이며, 변위 v_i 와 w_i 도 같은 방법으로 보간한다. 변분 형태의 지배 방정식 (8)~(11)을 공간과 시간에 대하여 이산화하면, 블록 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_D^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{DI2}^{(1)} & -\mathbf{P}_{CI2}^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \hat{\mathbf{K}}_D^{(N_S)} & -\mathbf{P}_{DI2}^{(N_S)} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{P}_{CI2}^{(N_S)} \\ -\mathbf{P}_{DI2}^{(1)T} & \cdots & -\mathbf{P}_{DI2}^{(N_S)T} & \mathbf{K}_{DI} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_{CI2}^{(1)T} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & t+\Delta t \hat{\mathbf{K}}_{CI}^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{P}_{CI2}^{(N_S)T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & t+\Delta t \hat{\mathbf{K}}_{CI}^{(N_S)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} t+\Delta t \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \\ t+\Delta t \mathbf{u}^{(N_S)} \\ t+\Delta t \mathbf{v} \\ t+\Delta t \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \\ t+\Delta t \mathbf{w}^{(N_S)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t+\Delta t \hat{\mathbf{f}}_D^{(1)} \\ \vdots \\ t+\Delta t \hat{\mathbf{f}}_D^{(N_S)} \\ \mathbf{0} \\ t+\Delta t \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(1)} \\ \vdots \\ t+\Delta t \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(N_S)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서 \mathbf{K}_D , \mathbf{K}_{CI} , \mathbf{K}_{DI} 는 부영역, 공유면, 접촉 공유면에서의 강성 행렬이며, $\hat{\cdot}$ 은 유효(effective) 행렬, $\tilde{\cdot}$ 는 비선형 행렬, 왼쪽 위 첨자 t , $t+\Delta t$ 는 시간을 의미한다. 또한, \mathbf{f}_D 는 하중 벡터, \mathbf{P} 와 \mathbf{p} 는 벌칙 함수에서 기인하는 각종 행렬 또는 벡터를 의미하며, 주요 행렬들을 부록에 정리하였다.

공유면과 접촉 공유면의 변위 연속 조건을 벌칙 함수로 처리하였으므로, 모든 부영역에 대한 유효 강성 행렬은 항상 양정치 성질을 갖는다. 따라서 블록 행렬로 표현된 식 (14)를 분해하여, 모든 행렬의 조립과 계산 과정을 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기본 단위로 하는 병렬화 알고리즘으로 처리할 수 있다.

구체적으로 설명하면, 식 (14)의 블록 행렬을 분해한 후 구하게 되는 미지수(변위 벡터) 순서를 기준으로 네 종류의 해석 알고리즘 $\mathbf{v-w-u}$, $\mathbf{w-v-u}$, $\mathbf{w-u}$, $\mathbf{v-u}$ 를 구성할 수 있다. 여기서 해석 알고리즘 $\mathbf{w-u}$ 는 공유면(\mathbf{v})을 별도로 설정하지 않은 경우이며, $\mathbf{v-u}$ 는 접촉 공유면(\mathbf{w})이 없는 경우이다. 예를 들어, 해석 알고리즘 $\mathbf{v-w-u}$ 에 관련된 수식은 다음과 같다 (주요 행렬에 대한 표현은 부록 참조).

$$^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{DI}^{[i+1]} \mathbf{v} = \sum_{I=1}^{N_S} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(I)T [i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(I)-1 [i]} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(I)} + \sum_{I=1}^{N_S} \mathbf{P}_{DI2}^{(I)T [i+\Delta t]} \hat{\mathbf{u}}^{(I)} \quad (15)$$

$$^{[i+1]} \mathbf{w}^{(k)} = ^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)-1} \left(\hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k) [i+1]} \mathbf{v} + ^{[i]} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} \right) \quad (16)$$

$$^{[i+1]} \mathbf{u}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \left(\mathbf{P}_{DI2}^{(k) [i+1]} \mathbf{v} + \mathbf{P}_{CI2}^{(k) [i+1]} \mathbf{w}^{(k)} \right) + t+\Delta t \hat{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (17)$$

Table 1 FLOPs analysis for solution algorithm v-w-u

연산 종류	행렬	행렬 크기	반복 횟수	비고
[초기 단계]				
f3(D, B)	$\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1}$	$[D_U^{(k)}, B_U^{(k)}]$	1	초기 단계는 Step = 1, Iter = 1을 의미함 (시간 증분 횟수 : Step = 1, 2, ..., N_{TS}) (반복 계산 횟수 : Iter = 1, 2, ...)
f4(D, B)	$\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{CB}^{(k)}$	$[D_U^{(k)}, D_W^{(k)}]$	$1 * D_W^{(k)}$	
f4(D, B)	$\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{D2}^{(k)}$	$[D_U^{(k)}, D_V]$	$1 * D_V^{(k)}$	
[시간 증분 및 반복 계산 단계 : v 계산]				
f1(D)	$^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)-1}$	$[D_W^{(k)}, D_W^{(k)}]$	$1 + \alpha^{(k)}$	Step = 1, Iter = 1 및 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 시
f2(D)	$^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)-1} \tilde{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)}$	$[D_W^{(k)}, D_V]$	$(1 + \alpha^{(k)}) * D_V^{(k)}$	
f1(D)	$^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{DI}^{-1}$	$[D_V, D_V]$	$1 + \gamma$	Step = 1, Iter = 1 및 하나 이상 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 시
f4(D, B)	$^{i+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(k)}$	$[D_U^{(k)}, 1]$	N_{TS}	Iter = 1
f2(D)	$^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)-1} \ ^{[i]} \tilde{\mathbf{P}}_{C2}^{(k)}$	$[D_W^{(k)}, 1]$	$N_{TS} + \alpha^{(k)}$	Iter = 1 및 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 시
f2(D)	$^{[i+1]} \mathbf{v}$	$[D_V, 1]$	$N_{TS} + \gamma$	Iter = 1 및 하나 이상 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 시
[시간 증분 및 반복 계산 단계 : w 계산]				
f2(D)	$^{[i+1]} \mathbf{w}^{(k)}$	$[D_W^{(k)}, 1]$	$N_{TS} + \gamma$	Iter = 1 및 하나 이상 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 시
[시간 증분 및 반복 계산 단계 : u 계산]				
f4(D, B)	$\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} (\mathbf{P}_{D2}^{(k)[i+1]} \mathbf{v} + \mathbf{P}_{C2}^{(k)[i+1]} \mathbf{w}^{(k)})$	$[D_U^{(k)}, 1]$	N_{TS}	Iter = 1

Table 2 FLOPs results for solution algorithms, FULL and v-w-u

Algor.	$\Omega / \Gamma_I / \Gamma_C$	Decomposition			Substitution		
FULL	Ω	$(1 + \gamma)$	X	$f_3(D_U, B_U)$	$(N_{TS} + \gamma)$	X	$f_4(D_U, B_U)$
v-w-u	$\Omega^{(k)}$	1	X	$f_3(D_U^{(k)}, B_U^{(k)})$	$(D_V^{(k)} + D_W^{(k)} + N_{TS})$	X	$f_4(D_U^{(k)}, B_U^{(k)})$
	Γ_I	$(1 + \gamma)$	X	$f_1(D_V)$	$(N_{TS} + \gamma)$	X	$f_2(D_V)$
	$\Gamma_C^{(k)}$	$(1 + \alpha^{(k)})$	X	$f_1(D_W^{(k)})$	$\{(1 + \alpha^{(k)}) * D_V^{(k)} + N_{TS} + \alpha^{(k)}\}$	X	$f_2(D_W^{(k)})$

여기서 왼쪽 위 첨자 $[j]$, $[i+1]$ 은 반복 계산(iteration) 횟수를 의미한다. 접촉 상태의 변화에 따른 비선형 행렬 또는 벡터가 식 (15)와 (16)에 국한되므로, 반복 계산 단계에서는 식 (15)와 (16)에 표현된 역행렬만 계산하면 된다. 즉, 식 (17)의 역행렬은 반복적으로 구할 필요가 없으며, 계산 초기 단계에서 한 번만 수행하면 된다.

2.3 총 연산 횟수

계산 시간의 효율성을 정밀하게 측정하기 위하여 해석 알고리즘 v-w-u에 소요되는 연산 횟수 FLOPs(Floating-Point OPERations) 분석 내역을 Table 1에 정리하였다. 연립 방정식의 해법으로 가우스 소거법에 근거한 LU 분해법을 이용하였으며, 이는 전체 행렬에 대한 삼각 분해 단계 $f_1(D)$ 와 대입 단계 $f_2(D)$, 대역 행렬에 대한 삼각 분해 단계 $f_3(D, B)$ 와 대입 단계 $f_4(D, B)$ 로 구분된다. 여기서 D 는 총 자유도, B 는 대역폭의 크기를 의미한다. 연산 반복 횟수에

영향을 미치는 주요 인자인 $\alpha^{(k)}$ 는 k 번째 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 횟수, γ 는 전체 영역 차원의 접촉 상태 변화 횟수, N_{TS} 는 총 시간 증분 횟수이다. 또한, D_U , D_V , D_W 는 부영역, 공유면, 접촉 공유면의 자유도, B_U 는 부영역의 대역폭이다. 참고로, 행렬의 조립과 같은 단순 연산 과정은 삼각 분해와 대입 단계에 비하여 상대적으로 계산량이 적기 때문에, FLOPs 분석에서 제외하였다.

이와 같이 해석 알고리즘 v-w-u에 소요되는 FLOPs를 Table 2에 정리하였다. FULL은 영역/경계 분할법을 적용하지 않은 경우이다. 나머지 해석 알고리즘 w-v-u, w-u, v-u에 대해서도 Table 1과 같은 분석 과정을 거쳐 총 연산 횟수 FLOPs를 산출할 수 있다.

3. 수치 예제 결과 및 고찰

여기서는 간단한 수치 예제를 통하여 영역/경계 분할법을 적용한 삼차원 유한요소 접촉 해석의 효율성을 집중적으로

Table 3. FLOPs results for simple rectangular parallelepiped model ($\Omega^{(1)}:\Omega^{(2)}=5:5$)

Problem ID	$\Omega/\Gamma_1/\Gamma_0$	Nodes	Elements	Nodes on Γ_1	Nodes on Γ_0	Contact Boundary	Size of Matrix		No. of Calculations		Total GFLOPs			
							D.O.F	H.B.W	Decomp.	Substi.	Decomp.	Substi.	Total	Percent.
FULL	Ω	445,511	400,000			○	1,336,533	3,372	20,001	30,000	303,351,915	405,019	303,756,934	100.000
v-u	Ω	445,511	400,000		1,111	△	1,336,533	3,372	1	13,333	15,167	180,004	195,171	0.064
	Γ_0	1,111	1,000			○	3,333		20,001	30,000	246,852	500	247,352	0.081
	Total	446,622	401,000	-	-	-	-	-	-	-	262,019	180,504	442,523	0.146
v-w-u	$\Omega^{(1)}$	223,311	200,000	1,111	1,111	△	669,933	3,372	1	16,666	7,590	112,640	120,229	0.040
	$\Omega^{(2)}$	223,311	200,000	1,111	0	X	669,933	3,372	1	13,333	7,590	90,113	97,703	0.032
	Γ_1	1,111	1,000				3,333		1	13,333	12	222	234	0.000
	$\Gamma_0^{(1)}$	1,111	1,000			○	3,333							
	Γ_0	1,111	1,000				3,333		20,001	30,000	246,852	500	247,352	0.081
	Total	448,844	402,000	-	-	-	-	-	-	-	262,043	203,475	465,518	0.153
v-w-u	$\Omega^{(1)}$	223,311	200,000	1,111	1,111	△	669,933	3,372	1	16,666	7,590	112,640	120,229	0.040
	$\Omega^{(2)}$	223,311	200,000	1,111	0	X	669,933	3,372	1	13,333	7,590	90,113	97,703	0.032
	Γ_1	1,111	1,000				3,333		20,001	30,000	246,852	500	247,352	0.081
	$\Gamma_0^{(1)}$	1,111	1,000			○	3,333		20,001	66,693,333	246,852	1,111,222	1,358,074	0.447
	Total	448,844	402,000	-	-	-	-	-	-	-	508,883	1,314,475	1,823,358	0.600
v-u	$\Omega^{(1)}$	223,311	200,000	1,111		○	669,933	3,372	20,001	66,693,333	151,799,334	450,757,018	602,556,352	198.368
	$\Omega^{(2)}$	223,311	200,000	1,111		X	669,933	3,372	1	13,333	7,590	90,113	97,703	0.032
	Γ_1	1,111	1,000				3,333		20,001	30,000	246,852	500	247,352	0.081
	Total	447,733	401,000	-	-	-	-	-	-	-	152,053,775	450,847,631	602,901,406	198.482

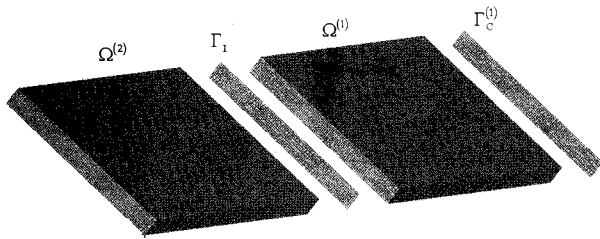


Fig. 3 Simple rectangular parallelepiped model

고찰하였다.

3.1 단순 직육면체 모델

단순 직육면체 형상을 갖는 구조물에 영역/경계 분할법을 적용한 사례를 Fig. 3에 도시하였다. 전체 영역을 2개의 부영역(8절점 육면체 요소, 400×100×10개), 공유면(4절점 사각형 요소, 100×10개), 1개의 접촉 공유면(4절점 사각형 요소, 100×10개)으로 분할한 경우이다. 접촉 해석의 효율성 검토를 위하여 시간 증분 횟수(N_{ts}), 부영역의 대역폭, 접촉 상태 변화 횟수(γ), 접촉 경계면의 크기에 따른 전체 계산량의 변화를 확인하였다.

Table 3은 각각의 해석 알고리즘에 대한 FLOPs 산출 내역을 보여준다. FLOPs 계산을 위한 주요 정보는 절점 수, 대역폭, 반복 연산 횟수 등이다. 모델은 $\Omega^{(1)}:\Omega^{(2)}=5:5$, $N_{ts}=10,000$, $\gamma=20,000$, $\alpha^{(k)}=20,000$ 으로 설정하였다. 해석 알고리즘 **w-u**를 보면, 비선형 계산을 수행하는 접촉 공유면의 행렬 크기가 매우 작으며, 이에 따라 FLOPs가

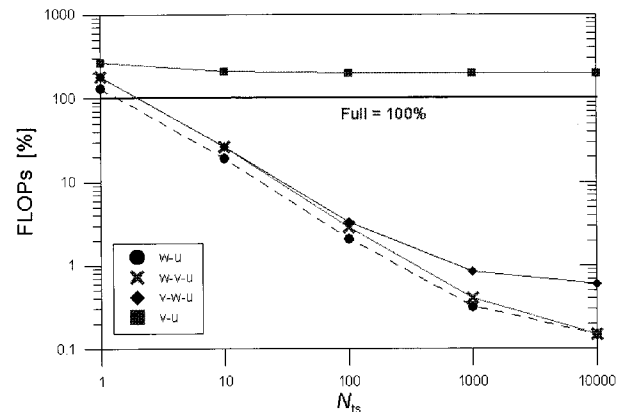


Fig. 4 FLOPs vs. number of time steps

0.146% 수준으로 감소하였다. **v-u**는 비선형 계산을 수행하는 부영역의 대역폭이 크기 때문에 FLOPs가 증가하였다.

Fig. 4는 $\Omega^{(1)}:\Omega^{(2)}=5:5$ 인 경우, 시간 증분 횟수의 변화(1~10,000)에 따른 FLOPs 결과이다. 접촉 상태 변화는 시간 증분 횟수의 2배가 되도록 고정하였다. 영역/경계를 분할하지 않은 FULL의 계산량을 기준 값 100%로 잡았다. 영역/경계 분할법을 적용한 **v-w-u**, **w-v-u**, **w-u**의 계산량이 각각 0.600%, 0.153%, 0.146%까지 감소하였으며, 이는 해석의 효율성이 167배, 654배, 685배 획기적으로 향상됨을 의미한다. 그러나 영역만을 분할한 **v-u**의 경우는 $\Omega^{(1)}$ 행렬의 대역폭이 크기 때문에, 상대적으로 많은 계산량이 요구된다.

시간 증분 횟수와 접촉 상태 변화 횟수를 각각 10,000, 20,000으로 고정한 후, $\Omega^{(1)}:\Omega^{(2)}$ 의 변화에 따른 FLOPs

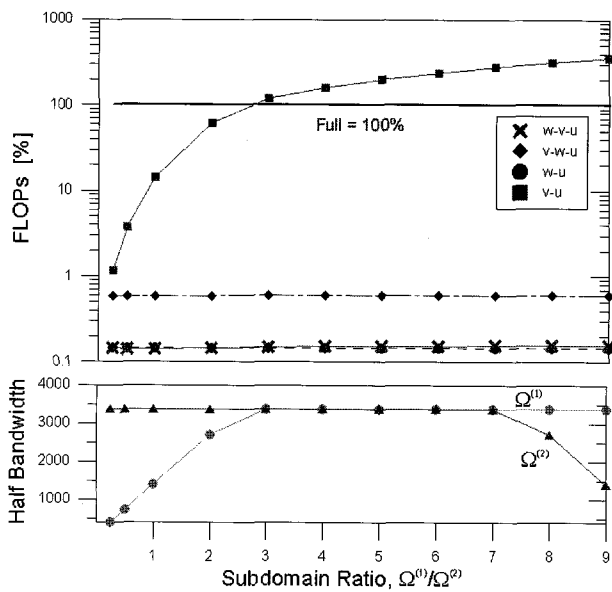


Fig. 5 FLOPs vs. half bandwidth

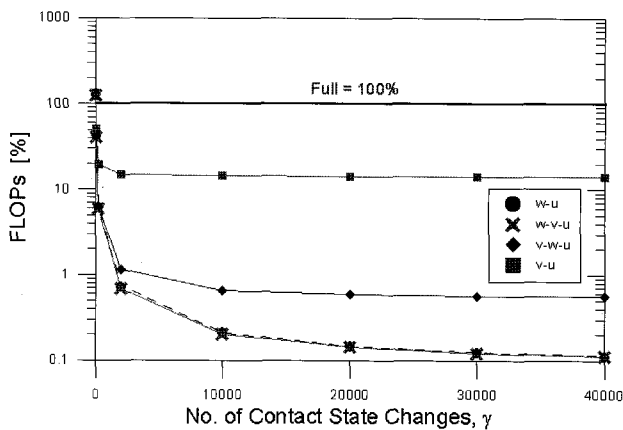


Fig. 6 FLOPs vs. number of contact state changes

결과를 Fig. 5에 도시하였다. 접촉 경계면이 포함된 부영역 $\Omega^{(1)}$ 의 크기가 작아질수록 $v-u$ 의 계산량이 급격하게 감소하며, 영역/경계 분할법의 결과에 근접함을 알 수 있다.

경계면을 분할한 나머지 세 경우에는 대역폭의 영향이 거의 나타나지 않는다. 이는 접촉 현상에서 기인하는 비선형성이 접촉 공유면에 국한되기 때문이다.

Fig. 6은 $\Omega^{(1)} : \Omega^{(2)} = 1:9$, $N_{TS} = 10,000$ 인 상태에서 접촉 상태 변화 횟수 γ 에 따른 FLOPs 결과이다. 비선형성이 강할수록 γ 가 증가하며, 이는 더 많은 반복 계산이 수행됨을 의미한다. 네 해석 알고리즘의 결과 모두, 계산량이 감소하면서 일정 수준으로 수렴하는 경향을 나타낸다.

마지막으로 $\Omega^{(1)} : \Omega^{(2)} = 1:9$, $N_{TS} = 10,000$, $\gamma = 20,000$ 에서 접촉 경계면의 크기(요소 수)에 따른 FLOPs 결과를 Fig. 7에 도시하였다. 설정된 접촉 경계면의 넓이가 작을수록 계산 효율성이 증가하였다. 이는 접촉 경계면에 관련된

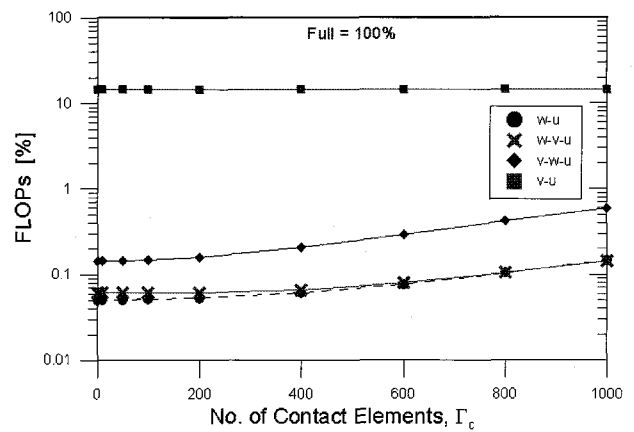


Fig. 7 FLOPs vs. number of contact elements

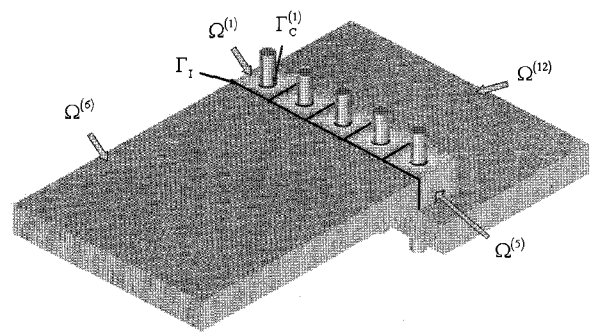


Fig. 8 Finite element model for multi-pin joints

비선형 행렬의 크기가 상대적으로 감소하기 때문이다.

3.2 삼차원 다중 접촉 모델

삼차원 다중 접촉(multi-contact) 모델의 형상을 Fig. 8에 도시하였다. 다중 접촉 모델은 상판과 하판이 5개의 강체 핀으로 결합되어 있다. 전체 모델은 173,250개의 요소와 197,472개의 절점을 갖는다. 상판에 주기적으로 동적 하중을 부가하면, 상판과 하판의 핀 결합 부위에서 접촉이 발생하게 된다. 전체 모델에 영역/경계 분할법을 적용하여 12개의 부영역, 1개의 공유면, 10개의 접촉 공유면으로 해석 모델을 구성하였다. 즉, 상판과 하판을 각각 6개의 부영역과 5개의 접촉 공유면으로 분할하였다.

Fig. 9는 10개의 접촉 경계면 전체에서 접촉이 일어나는 경우, 시간 증분 횟수의 변화에 따른 FLOPs 결과이다. 접촉 상태 변화 횟수는 시간 증분 횟수의 2배로 고정하였다. 단순 직육면체 모델의 경우와 같이, N_{TS} 가 증가할수록 모든 해석 알고리즘의 계산량이 감소하였다. $v-w-u$ 의 계산량이 3.10%로서 가장 효율적이었으며, $w-v-u$, $w-u$, $v-u$ 는 각각 18.12%, 18.19%, 14.4% 수준까지 감소하였다. 해석 알고리즘 $v-w-u$ 의 경우 식 (16)과 같이, 10개의 접촉 공유면

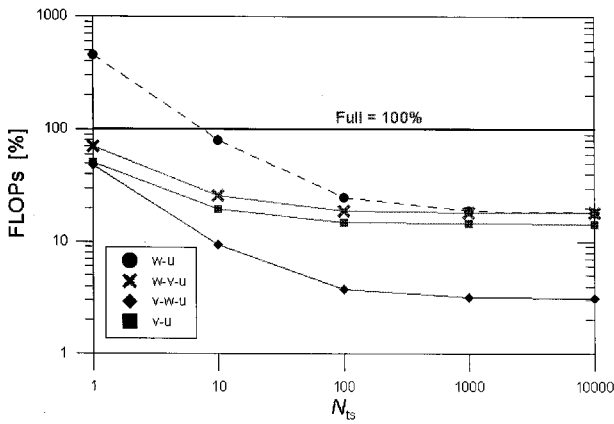


Fig. 9 FLOPs vs. number of time steps

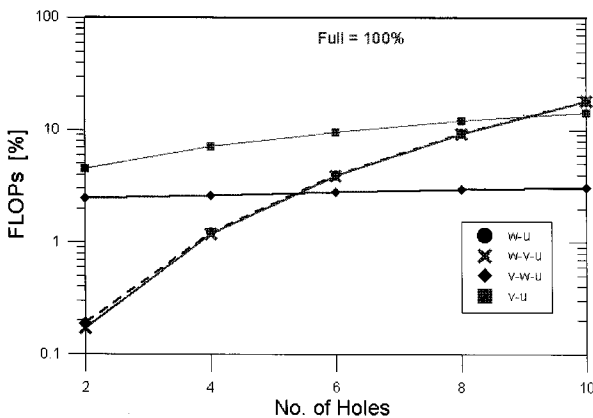


Fig. 10 FLOPs vs. number of pin joints

에 대한 행렬 연산을 개별적으로 수행함으로써 계산 효율성이 크게 향상되기 때문이다.

Fig. 10에서는 접촉이 발생하는 원공 개수를 조절하면서 FLOPs의 변화를 검토하였다. 접촉이 발생하는 원공이 적은 경우(2~4개) w-v-u와 w-u 계산량이 가장 적은 반면, 원공 개수가 많은 경우(6~10개) v-w-u 계산량이 가장 적어진다.

4. 결 론

본 논문에서는 삼차원 접촉 해석의 효율성 향상을 위하여 유한요소 영역/경계 분할법을 적용하였다. 공유면과 접촉 공유면에서의 연속 조건을 모두 별칭 함수로 처리함으로써, 라그랑지 승수와 같은 변수를 추가적으로 고려하지 않아도 된다. 또한, 전체 영역을 자유자재로 분할하고, 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기준으로 각종 수치 연산을 독립적으로 수행할 수 있다. 즉, 블록 행렬 형태로 유도된 최종 지배 방정식을 이용하여 해석 순서에 따른 네 종류의 알고리즘을 구성하였다.

제시된 해석 알고리즘별로 실제 소요 계산량을 정량적으로 분석하였다. 효율성에 영향을 미치는 주요 인자로서 부영역,

공유면, 접촉 공유면의 분할 방법, 시간 증분 횟수, 접촉 상태 변화 횟수, 대역폭, 접촉 경계면의 크기 등을 고려하였다. 이에 대한 간단한 수치 예제 설정을 통하여, 해석 과정에 소요되는 계산량이 대략 0.05~3.1% 수준까지도 감소됨을 확인하였다. 이는 약 32~2,000배의 효율성 향상을 의미한다. 다시 요약하면, 영역/경계 분할법을 접촉 문제에 적용함으로써 해석의 효율성을 획기적으로 향상시킬 수 있음을 제시하였다.

감사의 글

이 논문은 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다(KRF-2006-331-D00087).

참고 문헌

류한열 (2007) 효율적인 접촉 해석을 위한 유한요소 영역/경계 분할법의 제안, 전북대학교 석사학위논문.
 신의섭, 진지만 (2005) 유한요소 부영역 결합법을 이용한 열기계학적 접촉 해석, 한국항공우주학회지, 33(11), pp.7~14.
 Bathe, K.J. (1982) Finite Element Procedures, Prentice-Hall, NJ, p.1039.
 Bourel, B., Combescure, A., Valentin, L.D. (2006) Handling Contact in Multi-Domain Simulation of Automobile Crashes, *Finite Element in Analysis and Design*, 42, pp.766~779.
 Cho, M.H., Kim, W.B. (2002) A Coupled Finite Element Analysis of Independently Modeled Substructures by Penalty Farme Method, *KSME International Journal*, 16(10), pp.1201~1210.
 Dureisseix, D., Farhat, C. (2001) A Numerically Scalable Domain Decomposition Method for the Solution of Frictionless Contact Problems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 50, pp.2643~2666.
 Farhat, C., Roux, F.X. (1991) A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and Its Parallel Solution Algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 32, pp.1205~1227.
 Pantano, A., Averill, R.C. (2004) A Mesh-Independent Interface Technology for Simulation of Mixed-Mode Delamination Growth, *Int. J. Solids and Structures*, 41, pp.3809~3831.
 Ransom, J.B., McCleary, S.L., Aminpour, M.A. (1993) A New Interface Element for Connecting Independently Modeled Substructures, *AIAA Pa-*

per, No.93-1503.

Shin, E.S., Kim, S.J. (2000) Finite Element Analysis of Pin-load Composite Laminates by Connecting Independently Modeled Subdomains, *Composites B: Eng.*, 31, pp.47~56.

Zhong, Z.H., Mackerle, J. (1994) Contact- Impact Problems: A Review with Bibliography, *Applied Mech. Review*, 47, pp.55~76.

부 록

[공유면에 관계된 벌칙 행렬]

$$\mathbf{P}_{DI1}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_1^{(k+)}} \mathbf{H}_D^{(k)T} \mathbf{H}_D^{(k)} ds \quad (A1)$$

$$\mathbf{P}_{DI2}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_1^{(k+)}} \mathbf{H}_D^{(k)T} \mathbf{H}_{DI} ds = \mathbf{P}_{DI3}^{(k)T} \quad (A2)$$

$$\mathbf{P}_{DI4}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_1^{(k-)}} \mathbf{H}_{DI}^T \mathbf{H}_D ds \quad (A3)$$

[접촉 공유면에 관계된 벌칙 행렬]

$$\mathbf{P}_{CI1}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k+)}} \mathbf{H}_D^{(k)T} \mathbf{H}_D^{(k)} ds \quad (A4)$$

$$\mathbf{P}_{CI2}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k+)}} \mathbf{H}_D^{(k)T} \mathbf{H}_C^{(k)} ds = \mathbf{P}_{CI3}^{(k)T} \quad (A5)$$

$$\mathbf{P}_{CI4}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k-)}} \mathbf{H}_C^{(k)T} \mathbf{H}_C^{(k)} ds \quad (A6)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_C^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{CI}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} \quad (A7)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{CI}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_C^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k)}} \mathbf{H}_C^{(k)T} \mathbf{n}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)T} \mathbf{H}_C^{(k)} ds \quad (A8)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_C^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k)}} S^{(k)} \mathbf{H}_C^{(k)T} \mathbf{n}^{(k)} ds \quad (A9)$$

[해석 알고리즘 v-w-u에 관계된 행렬]

$$\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}_D^{(k)} + \mathbf{K}_D^{(k)} + \mathbf{P}_{DI1}^{(k)} + \mathbf{P}_{CI1}^{(k)} \quad (A10)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(k)} = \mathbf{M}_D^{(k)} \left(\frac{4}{\Delta t^2} {}^t \mathbf{u}^{(k)} + \frac{4}{\Delta t} {}^t \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + {}^t \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \right) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_D^{(k)} \quad (A11)$$

$$\mathbf{K}_{DI} = \sum_{k=1}^{N_S} \mathbf{P}_{DI4}^{(k)} \quad (A12)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)} = \mathbf{P}_{CI4}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{CI}^{(k)} \quad (A13)$$

$${}^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{DI}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{(k)} - \sum_{l=1}^{N_S} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(l)T [i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(l)-1} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(l)} \quad (A14)$$

$${}^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)} = {}^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)} - \mathbf{P}_{CI2}^{(k)T} \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{CI2}^{(k)} \quad (A15)$$

$${}^{[i]} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} = {}^{[i]} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} + \mathbf{P}_{CI2}^{(k)T} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (A16)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{DI} = \mathbf{K}_{DI} - \sum_{l=1}^{N_S} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)T} \hat{\mathbf{K}}_D^{(l)-1} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)} \quad (A17)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)} = \mathbf{P}_{CI2}^{(k)T} \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{DI2}^{(k)} \quad (A18)$$

$${}^{[i]} \tilde{\mathbf{K}}_{CI}^{(k)} = \mathbf{P}_{CI4}^{(k)} + {}^{[i]} \tilde{\mathbf{p}}_{CI}^{(k)} \quad (A19)$$

$${}^{[i]} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{E}_C^{(k)}} \int_{\Gamma_C^{(k)}} S^{(k)} \mathbf{H}_C^{(k)T} \mathbf{n}^{(k)} ds \quad (A20)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(k)} \quad (A21)$$