비정합 불확실성을 갖는 선형 시스템을 위한 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계

Static Output Feedback Sliding Mode Control Design for Linear Systems with Mismatched Uncertainties

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : We consider the problem of designing a static output feedback sliding mode control law for linear dynamical systems with mismatched uncertainties in the state matrix. We assume that an output dependent sliding surface guaranteeing the quadratic stability of the sliding mode dynamics is given, the reachability condition is not required to be satisfied globally, and the output feedback sliding mode control law complises both linear and discontinuous parts. We reduce the problem of designing the linear part of the sliding mode control law to a simple LMI problem which offers design flexibility for combining various useful convex design specifications. Our approach does not require state transformation and it can be applied to mismatched uncertain systems.

Keywords : Linear Matrix Inequality(LMI), uncertain system, sliding mode, output feedback

I. 서론

대부분의 슬라이딩 모드 제어기 설계방법은 모든 상태 정보가 이용 가능하다는 매우 제한적인 가정하에 제안되었다[1]. 최근 몇몇 연구자들에 의하여 정적 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 방법이 제안되었다. [2,3]의 방법들은 특별한 구조적 제한조건을 요구하고 슬라이딩 평면의 특별한 선택을 요구한다. 이러한 제한은 [4]와 [5]에서 극복되었다. [4]의 방법이 동적인 제어기를 요구하는데 반해 [5]의 방법은 정적인 제어기를 요구한다. [5]에서는 도달조건(reachability condition)을 광역적으로 만족시키는 제어기의 이득을 찾는 대신에 sliding patch를 최대화하는 제어기의 이득을 찾았다. 그러나 [3-5]의 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기는 불확실성이 정합조건을 만족시켜야 한다는 가정을 요구한다. 이러한 가정은 매우 제한적이라 flexible arm과 같은 다양한 기계 시스템의 불확실성을 모델하기에는 부적절하다. 이를 고려하여 본 논문에서는 상태행렬에 비정합 불확실성이 존재하는 선형 시스템을 위한 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계문제를 다룬다. [5]에서 처럼 슬라이딩 모드 동역학의 quadratic 안정성을 보장하는 출력 종속의 슬라이딩 평면이 존재하고, 도달조건이 광역적으로 요구되지 않으며, 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기가 선형부분과 불연속부분으로 구성된다고 가정한다. 슬라이딩 모드 제어기의 선형부분 설계문제를 다양한 볼록 설계 사양을 포함시킬 수 있는 융통성을 제공하는 간단한 LMI 문제로 단순화한다. 제안된 설계 방식은 [5]의 결과와 유사하나 [5]에서처럼 시스템 행렬을 canonical form으로 변환할 필요가 없고 비정합 불확실성을 갖는 시스템에도 적용 가능하므로 [5]을 일반화한 설계 방법이라 할 수 있다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2006. 7. 4., 채택확정 : 2006. 11. 28.
최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

II. 대상 시스템과 예비 결과들

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다.

$$\dot{x} = [A+DH(t)E]x+B[u+\xi(t)], \quad y=Cx \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m, y(t)\in R^p$로 각각 상태, 입력, 출력을 가리키며, A, B, C, D, E는 적절한 차원을 갖는 알려진 상수 행렬들이고 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $\xi(t)$는 알려진 상수 $\rho_0\le 1$와 함수 $\rho_1(t,y)$에 대해 $\|\xi(t)\|\le\rho_0\|u(t)\|+\rho_1(t,y)$를 만족시킨다.

A2: $\mathrm{rank}(C)=p\ge m=\mathrm{rank}(B)$

A3: $\|H(t)\|\le 1$.

A4: 다음 조건 P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면 행렬 $S\in R^{m\times n}$이 존재한다. P1) SB는 역행렬이 존재한다. (간단히 하기 위해 $SB=I$라고 가정하자); P2) $(n-m)$차의 슬라이딩 모드 동역학은 quadratically 안정하다; P3) $S=FC$를 만족시키는 행렬 $F\in R^{m\times p}$가 존재한다.

다음과 같은 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기를 고려하자.

$$u(t)=-Gy(t)-\rho(t)\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \tag{2}$$

여기에서 $\sigma=Sx(t)=Fy(t)$이며 $G\in R^{m\times p}$이다. $\rho(t)$는 다음처럼 주어진다.

$$\rho(t)=\frac{1}{1-\rho_0}(\rho_0\|Gy(t)\|+\rho_1(t,y)+\eta)$$

여기에서 η는 양수이다. $\rho(t)$를 매우 크게 증가시키면서 선형부분 $-Gy(t)$를 없앨 수도 있다. 그러나 이는 실

제적인 면에서는 별로 바람직스럽지 않다. 그리고 선형부분 $-Gy(t)$는 안정한 슬라이딩 모션을 얻는데 도움을 주기위해 이전의 논문들에서 사용되었다[3-5]. 결국 P1-3의 조건을 만족시키는 임의의 주어진 S에 대하여 적절한 이득행렬 G를 구하는 것으로 문제 설정할 수 있다.

다음의 보조정리는 주요결과를 얻기 위해 사용될 것이다.

보조정리 1 [6]: 주어진 행렬 A, B, C에 대하여 행렬식 $AXB=C$를 만족시키는 해 X를 찾는 문제를 고려하자. 행렬식 $AXB=C$가 해를 갖을 필요충분조건은 $AA^{g}CB^{g}B=C$가 성립하는 것으로 여기에서 A^{g}, B^{g}는 A, B의 Moore-Penrose 역행렬이다. 그리고 행렬식 $AXB=C$의 일반해는 $X=A^{g}CB^{g}+Y-A^{g}AYBB^{g}$로 주어진다. 여기에서 Y는 적절한 차원을 갖는 임의의 행렬이다.

보조정리 2: 주어진 적절한 차원을 갖는 임의의 행렬 D, E에 대하여 항상 다음의 부등식이 성립한다.

$$DE+E^{T}D^{T}\le\beta DD^{T}+\frac{1}{\beta}E^{T}E$$

여기에서 β는 임의의 양수이다.

III. 주요 결과

정리 1: P1-3를 만족시키는 슬라이딩 행렬 S에 대하여 다음 행렬부등식을 만족시키는 (X,ε)가 존재한다.

$$\begin{aligned}&X>0,\quad \Phi^{T}(AX+XA^{T}+DD^{T}+XE^{T}EX)\Phi<0,\\&\varepsilon>0,\quad \varepsilon B^{T}=SX=FCX\end{aligned}\tag{3}$$

여기에서 $\Phi\in R^{n\times(n-m)}$는 $B^{T}\Phi=0,\ \Phi^{T}\Phi=I$를 만족시키는 임의의 행렬이다.

증명: 역행렬이 존재하는 변환행렬 M과 이에 대응하는 벡터 $v=Mx$를 아래와 같이 정의하자.

$$M=\begin{bmatrix}\Phi^{T}\\(B^{T}B)^{-1}B^{T}\end{bmatrix}\in R^{n\times n},\quad M^{-1}=[\Phi\quad B],$$
$$v=Mx=\begin{bmatrix}\Phi^{T}x\\(B^{T}B)^{-1}B^{T}x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

그러면 (1)을 다음의 regular 형태로 바꿀 수 있다.

$$\dot{v}=\begin{bmatrix}\overline{A_{11}}(t) & \overline{A_{12}}(t)\\ \overline{A_{21}}(t) & \overline{A_{22}}(t)\end{bmatrix}v+\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix}[u+\xi(t)]$$

여기에서 $\overline{A_{ij}}(t)$는 다음처럼 정의된다.

$$\begin{aligned}\overline{A_{11}}(t)&=\Phi^{T}[A+DH(t)E]\Phi,\\ \overline{A_{12}}(t)&=\Phi^{T}[A+DH(t)E]B,\\ \overline{A_{21}}(t)&=(B^{T}B)^{-1}B^{T}[A+DH(t)E]\Phi,\\ \overline{A_{22}}(t)&=(B^{T}B)^{-1}B^{T}[A+DH(t)E]B\end{aligned}$$

P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면 $Sx=S\Phi v_1+SBv_2=0$이 존재한다고 가정하자. $SB=FCB=I$와 위에 주어진 regular 형태를 이용하여 $Sx=S\Phi v_1+SBv_2=0$에 구속된 $(n-m)$차의 슬라이딩 모드 동역학이 다음처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1=[\overline{A_{11}}(t)-\overline{A_{12}}(t)S\Phi]v_1,\quad v_1=\Phi^{T}x\tag{4}$$

[7]의 결과와 P2는 다음을 만족시키는 양한정 리아프노프 행렬 $Y_0\in R^{(n-m)\times(n-m)}$의 존재를 의미한다.

$$\begin{aligned}&(\Phi^{T}A\Phi-\Phi^{T}ABS\Phi)Y_0+Y_0(\Phi^{T}A\Phi-\Phi^{T}ABS\Phi)^{T}\\&+\Phi^{T}DD^{T}\Phi+(E\Phi Y_0-EBS\Phi Y_0)^{T}(E\Phi Y_0-EBS\Phi Y_0)<0\end{aligned}\tag{5}$$

다음처럼 X를 정의하자.

$$X=[\Phi\quad B]\begin{bmatrix}Y_0 & *\\ -S\Phi Y_0 & \varepsilon I+S\Phi Y_0\Phi^{T}S^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi^{T}\\B^{T}\end{bmatrix}\tag{6}$$

여기에서 ε는 양수이며 $*$는 대칭성에 의해서 쉽게 유추될 수 있는 행렬블록을 의미한다. [7]의 Schur complement 공식을 이용하여 $X>0$임을 쉽게 보일 수 있다. (5)는 (6)의 X가 (3)을 만족시킴을 의미한다. 또한 $SX=\varepsilon B^{T}$가 성립함은 명백하다. ■

Schur complement 공식과 Finsler의 보조정리[7], 보조정리 1, 그리고 정리 1을 이용하여 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 2: P1-3를 만족시키는 슬라이딩 행렬 S에 대하여 다음 LMI를 만족시키는 (Y,β,G)가 존재한다.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}[\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S]A-S^{T}GC+* & * & *\\ D^{T}[\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S] & -\beta I & 0\\ \beta E & 0 & -\beta I\end{bmatrix}<0,\\&\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S>0,\quad Y=Y^{T}\end{aligned}\tag{7}$$

증명: 정리 1에 의하여 P1-3를 만족시키는 임의의 슬라이딩 행렬 S에 대하여 행렬부등식 (3)을 만족시키는 (X,ε)가 존재한다. [7]에 주어진 Finsler의 보조정리를 이용하여 (3)은 다음과 동치임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}&X>0,\quad AX+XA^{T}+DD^{T}+XE^{T}EX<2\mu BB^{T},\\&\varepsilon>0,\quad \varepsilon B^{T}=SX=FCX\end{aligned}\tag{8}$$

또한 (8)은 다음의 Riccati 부등식 조건이 $P=\varepsilon X^{-1}>0$, $\beta=\varepsilon>0$, $G=\mu F$에 대하여 성립함을 의미한다.

$$\begin{aligned}&PA+A^{T}P-S^{T}GC-C^{T}G^{T}S+\beta E^{T}E+\frac{1}{\beta}PDD^{T}P<0,\\&B^{T}P=S=FC\end{aligned}\tag{9}$$

보조정리 1과 $B^{T}P=S$는 행렬 P가 $P=\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S$로 매개변수화 할 수 있음을 의미한다. 여기에서 Y는 임의의 $(n-m)\times(n-m)$ 대칭행렬이다. (9)는 다음처럼 다시 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned}&(\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S)A+A(\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S)-S^{T}GC-C^{T}G^{T}S\\&+\beta E^{T}E+\frac{1}{\beta}(\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S)DD^{T}(\Phi Y\Phi^{T}+S^{T}S)<0\end{aligned}\tag{10}$$

결국 Schur complement 공식의 (10)에 적용함으로써 (7)을

얻을 수 있다. ■

다음의 정리는 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 (2)의 선형부분의 이득행렬 G를 구하는데 중요한 역할을 한다.

정리 3: P1-3를 만족시키는 임의의 슬라이딩 행렬 S에 대하여 LMI (7)을 만족시키는 (Y, β, G)가 존재한다. 그리고 제어기 (2)의 G가 LMI (7)의 해로 주어지면 지수적인 안정성이 보장된다. 또한 유한한 시간내에 슬라이딩 모션이 발생한다.

증명: 정리 2는 (7) 또는 등가의 행렬 부등식 (10)을 만족시키는 $P = \Phi Y \Phi^T + S^T S > 0$의 존재를 보장한다. 리아푸노프 함수를 $V(x) = x^T P x$로 정의하면 그 도함수가 다음처럼 주어진다.

$$\dot{V} = 2x^T P[A + DH(t)E - BGC]x - 2x^T PB[\rho(t)\frac{\sigma}{\|\sigma\|} - \xi(t)]$$

보조정리 2와 A3는 임의의 $\beta > 0$에 대하여 다음이 성립함을 의미한다.

$$2x^T PDH(t)Ex \le \beta x^T E^T Ex + \frac{1}{\beta} x^T PDD^T Px$$

그러므로 $\dot{V}$는 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\dot{V} \le -x^T Qx - 2x^T PB[\rho(t)\frac{\sigma}{\|\sigma\|} - \|\xi(t)\|]$$

여기에서 Q는 다음을 만족시킨다.

$$-Q = P(A - BGC) + (A - BGC)^T P + \beta E^T E + \frac{1}{\beta} PDD^T P$$

A1과 $\sigma = Sx = FCx = B^T Px$를 이용하여 $\dot{V}$는 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -x^T Qx - 2\|B^T Px\|[\rho(t) - \|\xi(t)\|] \\ &\le -x^T Qx - 2\|\sigma\|[\rho(t) - \rho_0\|Gy\| - \rho_0\rho(t) - \rho_1(t, y)] \\ &\le -x^T Qx - 2\|\sigma\|\eta\end{aligned}$$

(10)은 Q가 양한정 행렬임을 의미한다. 결국 x가 지수적으로 안정함을 알 수 있다. 슬라이딩 모션이 유한한 시간내에 일어남을 보이기 위해서는 도달조건(reachability condition) $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$이 만족됨을 보이기만 하면된다. $SB = I$, $\sigma = Sx$, A1, A3를 이용하여 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\sigma^T \dot{\sigma} \le \|\sigma\|[(\|SA - GC\| + \|SD\| \cdot \|E\|)\|x\| - \eta] \qquad (11)$$

x가 지수적으로 안정하기 때문에 x는 유한한 시간내에 sliding patch $\Omega = \{x : \|x\| < \eta\gamma^{-1}\}$에 들어가고 그 안에 머물것이다. 여기에서 $\gamma = \|SA - GC\| + \|SD\| \cdot \|E\|$이다. 결국 (11)은 슬라이딩 모션이 유한한 시간 내에 일어남을 의미한다. ■

주 1: 정리 3은 이득행렬 G를 설계하는 문제는 다양한 볼록 설계 사양을 포함시킬 수 있는 융통성을 제공하는 간단한 LMI 문제로 단순화시킬 수 있음을 의미한다. 이득행렬 G의 선택에 따라 sliding patch Ω의 크기가 변한다. 제어기 설계의 관점에서 [5]에서처럼 sliding patch Ω의 크게 하기 위해 γ를 될 수 있으면 작게 만드는 G를 찾는 것을 설계사양으로 정할 수 있다. 만약 구속조건 $tI > (SA - GC)(SA - GC)^T$를 만족시키는 스칼라변수 t를 최소화하면 γ를 최소화할 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 결국 다음의 LMI 최적화 문제의 최적 argument G^*를 이득행렬 G 값으로 선정하면 sliding patch Ω의 크기를 최대화할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\min imize && t \\ &\text{subject to} && (7),\ \begin{bmatrix} tI & SA - GC \\ * & I \end{bmatrix} > 0\end{aligned} \qquad (12)$$

주 2: 결국 주요결과는 다음과 같은 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 (2)의 설계과정으로 요약될 수 있다.

Step 1: 주어진 B에 대하여 Φ를 구하라.

Step 2: LMI 문제 (12)를 해결하는 최적 argument G^*를 구하라.

Step 3: $G = G^*$로 하여 제어기 (2)를 구성하라.

주 3: [5]에서는 시스템 행렬 (A, B, C)를 특정한 형태의 canonical form으로 변환시키는 좌표변환 행렬을 구하고 이를 이용하여 시스템 행렬 (A, B, C)를 변환하는 부가적인 과정을 요구하나 본 논문의 방법은 이러한 과정을 요구하지 않고 단지 LMI 문제 (12)만을 풀기만 하면 된다. 또한 비정합 불확실성을 갖는 시스템에도 적용가능하므로 본 논문에서 제안된 방법이 [5]를 일반화한 설계 방법이라 할 수 있다.

IV. 수치적 예

(1)은 L-1011 비행기의 lateral axis 동역학을 표현할 수 있다. 데이터는 다음과 같다[8].

$$A = \begin{bmatrix} -2.98 & 0.93 & 0 & -0.0340 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.8900 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T,\ D = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,\ H(t) = \frac{\zeta}{1.5}$$

여기에서 ζ는 $|\zeta| \le 1.5$를 만족시키는 불확실한 값이다. 상태값은 각각 yaw rate, side-slip angle, bank angle, roll rate이며 입력은 aileron deflection이다. 슬라이딩 평면 행렬은 다음처럼 주어진다고 가정하자.

$$S = [0,\ 0,\ -0.625,\ -0.625] \qquad (14)$$

(4)를 이용하여 슬라이딩 모드 동역학이 다음처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} -2.9878 & -0.0559 & -1.0409 \\ 0 & -1.0000 & 0 \\ 0.9902 & 0.0559 & -0.2100 \end{bmatrix} v_1 \qquad (15)$$

슬라이딩 모드 동역학 (15)의 고유값이 복소평면의 좌반

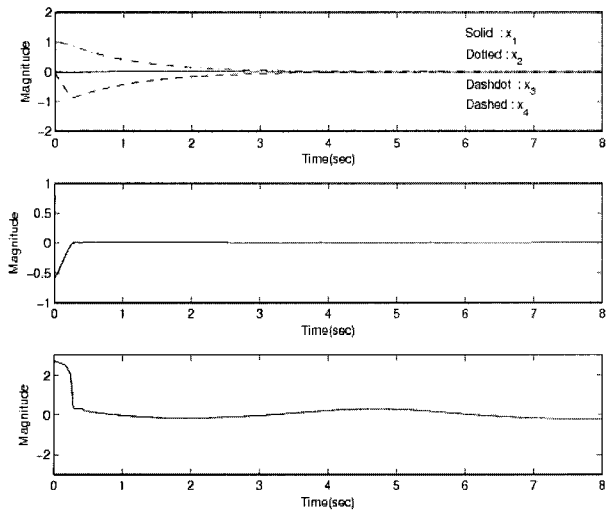


그림 1. 시뮬레이션 결과. (위) 출력 x. (중간) 슬라이딩 변수 σ. (아래) 제어입력 u.

Fig. 1. Simulation results. (top) State x. (middle) sliding variable σ. (bottom) control input u.

면에 위치함을 알 수 있다. 결국 (14)의 슬라이딩 평면 S는 성질 P1-3를 만족시키며 $F=[-0.625,\ -0.625]$로 주어짐을 알 수 있다. (13)은 불확실한 값 ζ가 정합조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다. 그러므로 [3-5]에 주어진 이전 방법들을 이용하여 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기를 설계할 수 없다. 주 2에 주어진 설계알고리즘을 이용하여 다음의 이득을 얻을 수 있다.

$$G=[-0.125,\ \ 0.481] \tag{16}$$

불확실성 $\xi(t)$가 $\|\xi(t)\|\le 0.5\|u\|+0.5$을 만족시킨다고 가정하자. $\|\xi(t)\|\le 0.5\|u\|+0.5$은 $\rho_0=0.5,\ \rho_1(t,y)=0.5$로 놓을 수 있음을 의미한다. 결국 다음과 같은 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기를 얻을 수 있다.

$$u(t)=-Gy-(\|Gy\|+2)\ \mathbf{sign}\,(\sigma) \tag{17}$$

여기에서 sign(·)은 signum 함수를 의미한다. 수치적인 시뮬레이션에서 불연속적인 sign (σ)는 [5]에서와 마찬가지로 $\sigma/(|\sigma|+0.01)$로 근사화하였다. $\zeta=1.5\sin t$ 이고 $\xi(t)=(0.5u+0.5)\sin t$이며 초기값은 $x(0)=[0,0\ ,1,0]^T$로 주어진다고 가정했다. 그림 1은 상태 x, 슬라이딩 변수 σ, 그리고 입력을 보여준다.

V. 결론

본 논문에서 불확실성을 갖는 선형 시스템을 위한 LMI 기반의 정적 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 방법을 제안하였다. [5]의 방법을 일반화하여 비정합 불확실성을 갖는 시스템에도 적용가능하도록 하였다. 본 논문에서 제안된 방법은 [5]에서처럼 시스템 행렬을 canonical form으로 변환할 필요가 없는 장점을 갖는다.

참고문헌

[1] C. Edwards, "A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalites," Automatica., vol. 40, pp. 1761-1769, 2004.

[2] B. S. Heck, S. V. Yallapragada, and M. K. H. Fan, "Numerical methods to design the reaching phase of output feedback variable structure control," *Automatica*, vol. 31, pp. 275-279, 1995.

[3] C. Edwards and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control : Theory and Applications*, PA : Taylor & Francis Inc., 1998.

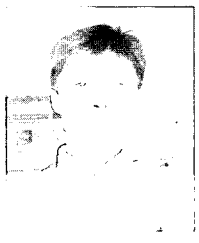
[4] C. M. Kwan, "Further results on variable output feedback controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, pp. 1505-1508, 2001.

[5] C. Edwards, A. Akoachere, and S. K. Spurgeon, "Sliding mode output feedback controller design using linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, pp. 115-119, 2001.

[6] C. R. Rao and S. K. Mitra, Generalized Inverse of Matrices and Its Applicatins, NY: Wiley, 1971.

[7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia : SIAM, 1994.

[8] A. R. Galimidi and B. R. Barmish, "The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, pp. 410-419, 1986.



최 한 호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 가변구조제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스.