

< 논문 >

고체입자가 부상된 균질 난류 전단유동의 2차-모멘트 모형화

신종근* · 서정식** · 한성호** · 최영돈†
 (2006년 7월 24일 접수, 2006년 11월 1일 심사완료)

Second-Moment Closure Modelling of Particle-Laden Homogeneous Turbulent Shear Flows

Jong Keun Shin, Jeong Sik Seo, Seong Ho Han and Young Don Choi

Key Words: Turbulent Shear Flow(난류전단유동), Second-moment Closure(2차-모멘트 닫힘)

Abstract

A second-moment closure is applied to the prediction of a homogeneous turbulent shear flow laden with mono-size particles. The closure is carried out based on a 'two-fluid' methodology in which both carrier and dispersed phases are considered in the Eulerian frame. To reduce the number of coupled differential equations to be solved, Reynolds stress transport equations and algebraic stress models are judiciously combined to obtain the Reynolds stress of carrier and dispersed phases in the mean momentum equation. That is, the Reynolds stress components for carrier and dispersed phases are solved by modelled transport equations, but the fluid-particle velocity covariance tensors are treated by the algebraic models. The present predictions for all the components of Reynolds stresses are compared to the DNS data. Reasonable agreements are observed in all the components, and the effects of the coupling of carrier and dispersed phases are properly captured in every aspects.

기호설명

d_p : 입자의 직경
 k : 운반상 난류운동에너지
 k_p : 분산상 난류운동에너지
 k_{fp} : 유체-입자간 난류운동에너지
 S : 평균속도구배(= $\partial U_1/\partial x_2 = \partial V_1/\partial x_2$)
 t : 시간
 u_i : 운반상 섭동속도
 U_i : 운반상 평균속도
 v_i : 분산상 섭동속도

V_i : 분산상 평균속도
 ϵ : 난류운동에너지 소멸률
 λ : 밀도비율(= ρ_p/ρ_f)
 μ : 운반상의 점성계수
 ρ : 밀도
 τ_p : 입자 시간상수(= $\rho_d d_p^2/18\mu$)
 Φ : 평균체적분율
 Φ_m : 질량하중비(= $\lambda\Phi$)

하첨자/상첨자

f : 유체 물성치
 fp : 유체-입자간 물성치
 p : 입자 물성치

† 책임저자, 회원, 고려대학교 기계공학과
 E-mail : ydchoi@korea.ac.kr
 TEL : (02)3290-3535 FAX : (02)926-9290

* 회원, 한중대학교 자동차공학과

** 회원, 고려대학교 대학원 기계공학과

1. 서론

본 연구에서는 고체입자가 부상된 기체 유동장

에 대한 2상유동의 예측을 위해 2차-모멘트 레이놀즈응력 모형을 2-유체(two-fluid) 접근법에 의해서 시도하였고, 운반상(carrier phase)과 분산상(dispersed phase) 모두를 Eulerian 방법으로 고려하였다. 이 레이놀즈응력방정식모형은 2상유동에서 2-방향 연결관계(2-way coupling) 효과를 포함시킬 수 있는 장점이 있다. 이러한 레이놀즈응력모형화에 대한 이전의 연구들은 작은 관성을 가진 입자들의 부상에 대해 2차-모멘트 이론을 처음 제시한 Shih & Lumley,⁽¹⁾ 1-방향(one-way)관계에 의한 2차-모멘트 모형의 이론을 제안한 Simonin et al.⁽²⁾ 그리고 이들의 모형들을 보다 이론적으로 발달시킨, 즉 2-방향을 고려한 Mashayek & Taulbee⁽³⁾의 모형이 있다. Mashayek & Taulbee는 2상유동에서 2-방향 연결관계에 대한 물리적인 특성들을 조사하기 위해 먼저 균질 2상유동에 대한 DNS를 수행한 다음, 레이놀즈응력 방정식들의 일부 항들을 직접 모형화하거나 기존 모형식들에 나타나는 난류모형상수들의 타당성과 모형의 평가에 이 DNS자료들을 활용하였다. 이들의 모형은 Eulerian 접근방법으로 제시된 레이놀즈응력모형 중 가장 발달된 형태를 취하고 있으나 압력-속도구배 상관관계항 및 소멸항에 대한 모형의 단순성 때문에 회전이 존재하는 유동장이나 벽면이 존재하는 2상유동장으로의 확장을 위해서는 보완이 필요하다고 본다.

2차-모멘트 레이놀즈응력방정식모형을 2상유동에 적용하는 경우 단상유동(single-phase flow)과 유사하게 기본적인 이점은 모든 레이놀즈응력들이 정확하게 구현되고 전반적인 예측 능력들이 개선된다는 것이다. 이러한 이점에도 불구하고 풀어야만 하는 부가적인 모멘트 수송방정식들은 레이놀즈응력모형의 실제적인 적용성을 떨어뜨리게 된다. 레이놀즈응력모형과 관련하여 높아지는 전산적 비용을 극복하기 위해서는 대수적 접근방법이 요구되기도 한다.⁽⁴⁾ 이러한 대수방정식들은 레이놀즈응력 수송방정식들로부터 직접 유도되거나 비등방 와확산(eddy diffusivity)을 이끄는 다른 형태의 표현들로부터 얻어지게 된다.

그러나 2상유동에 대해 대수 레이놀즈응력방정식을 사용하는 경우 벽면을 고려하지 않는 제트 유동과 같은 유동장에서는 그 해의 정확성을 어느 정도 보장해 줄 수는 있지만, 벽면이 존재하는 비균질 난류유동의 경우에는 그 해의 정확성

에 대해 상당한 조심성이 요구된다. 따라서 레이놀즈응력방정식모형의 적용에 의한 해의 정확성을 유지하면서도 전산적 비용을 줄이는 방법은 벽면 부근의 비균질유동 예측에 직접적인 영향을 미치는 일부 레이놀즈응력 수송방정식들은 직접 풀고, 벽면효과를 고려한 모형화가 어려운 유체-입자간 레이놀즈응력 방정식들은 대수적으로 처리하는 방향으로 고개를 돌릴 수 있다. 즉, 유체-입자간 레이놀즈응력 방정식의 경우 압력-분산상 속도구배 상관관계항 및 소멸항에 대한 벽면 인접부의 정확한 물리적거동이 잘 알려져 있지 않기 때문에 이 항들을 적절하게 모형화하는 것은 현재로서는 어렵다.

현재까지 단상유동에 대한 레이놀즈응력방정식 모형은 벽면이 존재하는 유동장에도 그 정확성이 보장되기 때문에,⁽⁵⁾ 2상유동에서 운반상에 대한 레이놀즈응력방정식모형을 그대로 푸는 것은 어렵지 않다. 즉, 운반상의 레이놀즈응력 수송방정식들은 현재까지 많은 연구자들에 의해 그 모형화가 상당한 진보되어 왔기 때문에 벽면이 존재하는 유동장에서도 유동장의 중심부에서 벽면까지 하나의 난류모형으로 해석하는 것이 가능하다. 또한, 분산상에 대한 레이놀즈응력 수송방정식도 상대적으로 모형화가 간단하기 때문에 직접 해석하는 것이 가능하다.

한편, 유체-입자간 레이놀즈응력 혹은 속도 공분산(covariance)들은 운반상의 난류운동에너지와 그 소멸률에 직접 영향을 주어 결과적으로 유체 유동과 난류유동의 난류확산계수에 가장 큰 영향을 주는 인자의 하나이다. 그러나 그 구성이 복잡하고 일부 항의 모형화가 어려울 뿐만 아니라 벽면이 존재하는 경우에는 그 경계조건의 적용도 상당히 까다로울 것으로 예상된다. 따라서 이 방정식들을 정확하게 모형화하지 못하면 오히려 벽면이 존재하는 유동장에서 해의 부정확성을 유발할 가능성이 크다.

또한, 관련된 수송방정식들을 모두 푸는 레이놀즈응력방정식모형은 상대적으로 많은 수의 서로 연결된 수송방정식들을 다루어야 하기 때문에 실제 공학적인 적용에 어려움이 있으며, 많은 수송방정식들을 풀어야 하는 전산비용적인 측면에서의 불리한 점 외에도 수치적 불안정성과 경직성(stiffness) 문제가 발생할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제를 어느 정도 경감시키기

위해서, 즉 풀어야만 하는 수송방정식의 수를 줄이기 위해 유체-입자간 레이놀즈응력들은 대수방정식을 구성하여 해석하는 방법을 제시하고자 한다. 현재의 연구에서는 2차-모멘트 난류모형의 타당성을 알아보기 위하여 균질 난류유동만을 고려하지만 향후 이 모형의 궁극적인 확장 적용은 벽면이 존재하는 실제 흐름이기 때문에 이러한 고려는 상당히 중요하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 운반상 그리고 분산상 레이놀즈응력 수송방정식은 그대로 풀고, 유체-입자간 레이놀즈응력은 대수적 모형으로 해석하는 방법을 시도하여 그 타당성을 알아보는 것을 그 목적으로 한다. 이 2차-모멘트 레이놀즈응력 모형의 타당성 및 적용성을 알아보기 위하여 본 연구에서 채택한 유동장은 균질난류 전단유동이며, 이 모형의 평가를 위해 Mashayek & Taulbee⁽³⁾(이후에는 MT)의 DNS 자료를 활용하였다.

2. 이론해석

2.1 지배방정식

본 연구에서는 매우 작은 입자들이 부상된 비압축성 유체를 다룬다. 즉, 입자들은 난류의 가장 작은 길이척도 보다 작은 직경을 갖으며, 경험적으로 수정된 Stokesian 저항 관계(drag relation)에 지배된다고 가정한다. 입자의 밀도는 운반유체에 비해 매우 커서 이는 저항력은 입자운동에서만 중요하다고 할 수 있으며, 또한 입자의 체적분율(volume fraction)은 상대적으로 작고 입자간의 상호작용은 무시한다. 2상유동을 이루는 각자의 상에 대한 지배방정식들은 다음과 같이 앙상블-평균에 의해 얻어진다.⁽³⁾

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j U_i) = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} - \frac{\lambda \Phi}{\tau_p} (U_i - V_i) - \frac{\lambda}{\tau_p} (\overline{u_i \phi} - \overline{v_i \phi}) + g e_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{V_j \phi})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{v_j \phi}}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} + \frac{1}{\tau_p} (U_i - V_i) + v_i \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j} + g e_i \quad (4)$$

식 (1), (2)는 운반상(carrier phase)에 대한 그리고 식 (3), (4)는 분산상(dispersed phase)에 대한 질량과 운동량방정식들이다. 식 (2)~(4)에서 난류 단힘 문제는 두 상간에 관계되는 유체-유체간 레이놀즈응력 텐서 $\overline{u_i u_j}$, 고체-고체간 레이놀즈응력 텐서 $\overline{v_i v_j}$ 와 공극분율 유속(void fraction flux) $\overline{u_i \phi}$, $\overline{v_i \phi}$ 에 관계 된다. 또한, g 는 중력가속도를 그리고 e_i 는 중력방향 단위벡터를 의미한다. 본 연구에서 고려하는 균질 전단유동(homogeneous shear flow)의 경우 유체속도는 $V_i = U_i$ 로 특정화되며, 균질유동에서 공극분율 유속은 $0(\overline{u_i \phi} \equiv 0, \overline{v_i \phi} \equiv 0)$ 으로 가정하여 이 항들에 대한 모형화는 본 연구에서 다루어지지 않는다. 식 (2)와 (4)를 앙상블-평균하는 과정에서 나타나는 2차모멘트들에 대한 수송방정식들은 일반적인 방법에 의해 다음과 같이 얻어진다.

운반유체에 대한 레이놀즈응력 방정식

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \overline{u_j u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} - \frac{\lambda \Phi}{\tau_p} [\overline{u_i (u_j - v_j)} + \overline{u_j (u_i - v_i)}] + HOT \quad (5)$$

분산상에 대한 레이놀즈응력 방정식

$$\frac{D \overline{v_i v_j}}{Dt} = -\overline{v_i v_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \overline{v_j v_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \overline{v_i v_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\tau_p} (2\overline{v_i v_j} - \overline{u_i v_j} - \overline{u_j v_i}) \quad (6)$$

유체-입자 속도 공분산(covariance) 방정식

$$\frac{D \overline{u_i v_j}}{Dt} = -\overline{u_i v_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \overline{u_j v_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \chi_{ij} + \frac{1}{\tau_p} (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i v_j}) - \frac{\lambda \Phi}{\tau_p} (\overline{u_i v_j} - \overline{v_i v_j}) + \nu v_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + U_i u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + V_i v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial u_i v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial u_i v_i}{\partial x_i} + HOT \quad (7)$$

식 (5)의 운반유체에 대한 레이놀즈응력 방정식은 우변에 유체-입자 상관관계에 해당하는 항이 포함되어 있다. 따라서 이 운반상의 수송방정식을 정확하게 풀기 위해서는 이 유체-입자간 레이놀즈응력의 정확한 예측이 중요하다는 것을 알 수 있다. 분산상의 레이놀즈응력은 우변의 세 번째 항 $\overline{v_i v_j} (\partial v_i / \partial x_i)$ 만 모형화되면 쉽게 풀릴 수

있음을 볼 수 있다. 그러나 본 연구에서는 이 항은 다른 항들에 비해 그 크기가 작기 때문에 무시하였다.^(3,4)

2.2 난류모형화

(1) 압력-속도구배 상관관계

식 (5)에서 Π_{ij} 는 운반상의 압력-속도구배 상관관계이고 ϵ_{ij} 는 소멸률을 나타낸다. 식 (7)에서 χ_{ij} 는 압력-분산상 속도구배 상관관계이다. 식 (5)와 (7)에서 HOT항은 속도와 공극분을 요동 모두를 포함하는 3차 상관관계를 나타내며 본 연구에서는 이 항들을 무시한다. 2상유동에 대한 압력항들 Π_{ij} 와 χ_{ij} 는 일반적으로 널리 사용되고 있는 LRR 모형⁽⁶⁾과 유사하게 모형화되어 사용되어 왔다. MT⁽³⁾는 운반상의 압력-속도구배 상관관계 Π_{ij} 에 대해서는 LRR모형을 그리고 소멸률텐서는 등방성텐서인 $\epsilon_{ij} = (2\delta_{ij}/3)\epsilon$ 모형을 적용하여 균질 난류유동에 대해 DNS 자료에 근접하는 예측을 수행하였다. 그러나 이러한 모형의 조합을 사용하면 균질난류 유동장에서 회전이 존재하는 경우에 그 해의 타당성이 떨어지는 것이 확인되었기 때문에 본 연구에서는 운반상의 압력-속도구배 상관관계는 현재 널리 사용되는 다음의 SSG 모형⁽⁷⁾을 적용하였다.

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^h = & -\left(C_{f1} + C_{f1}^* \frac{P}{\epsilon}\right)\epsilon b_{ij}^h + C_{f2}\left(b_{ik}^h b_{kj}^h - \frac{1}{3}b_{kk}^h b_{ij}^h\right) + \left(C_{f3} - C_{f3}^* \sqrt{b_{kk}^h b_{kk}^h}\right)k S_{ij}^h \\ & + C_{f4}k\left(b_{ik}^h S_{jk}^h + b_{jk}^h S_{ik}^h - \frac{2}{3}b_{mm}^h S_{mm}^h \delta_{ij}\right) + C_{f5}k\left(b_{ik}^h W_{jk}^h + b_{jk}^h W_{ik}^h\right) \\ & + C_{f6} \frac{\lambda \Phi}{\tau_p} \left[4kb_{ij}^h - 2k_{fp}\left(b_{ij}^h + b_{ji}^h\right)\right] \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$b_{ij}^h = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad b_{ij}^p = \frac{\overline{u_i v_j}}{2k_{fp}} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad (9)$$

는 유체-유체간 그리고 유체-입자간 레이놀즈응력의 비등방 텐서들,

$$S_{ij}^h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \quad W_{ij}^h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (10)$$

는 각각 운반상에 대한 평균변형률과 평균와도

Table 1 Model constants for pressure-velocity gradient correlation

	C_{f1}	C_{f1}^*	C_{f2}	C_{f3}	C_{f3}^*	C_{f4}
MT	3.5	0	0	0.8	0	1.908
Present	3.4	1.8	0	0.8	1.3	1.25

	C_{f5}	C_{f6}	C_{fp1}	C_{fp2}	C_{fp3}
MT	1.180	0.5	2.5	0.5	0.2
Present	0.4	0.5	3.0	0.5	0.2

(mean vorticity) 텐서를 나타낸다. 식 (8)에서 $k = \overline{u_i u_i}/2$ 와 $\epsilon = \epsilon_{ii}/2$ 는 운반상의 난류 운동에너지와 그것의 소멸률이고 $k_{fp} = \overline{u_i v_i}/2$ 는 유체-입자 난류운동에너지를 나타낸다. 또한, 식 (8)의 우변의 마지막 항은 운반유체에 대한 분산상들의 효과로부터 반영되는, 즉 유체-입자 상관관계에 해당하는 새로운 항들이며 MT의 모형을 그대로 적용하였다.

한편, 압력-분산상 속도구배 상관관계 χ_{ij} 는 MT의 모형을 따라 다음과 같이 적용하였다.

$$\begin{aligned} \chi_{ij} = & -C_{fp1} \frac{\overline{u_i v_j}}{T} + C_{fp2} \overline{u_i v_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \\ & + C_{fp3} \frac{\lambda}{\tau_p} \left[(U_i - V_i) \overline{v_j \phi} + \Phi(\overline{u_i v_j} - \overline{v_i v_j}) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $T (= k/\epsilon)$ 는 운반유체의 난류 시간척도이고, C_{fp1} , C_{fp2} 및 C_{fp3} 는 모형상수이다. 다음의 Table 1은 식 (8) 및 (11)의 압력-속도구배 상관관계항 모형에 대해 MT 및 본 연구에서 채택한 난류모형계수를 나타낸다.

(2) 소멸률텐서 모형

국부 등방성 가정에 의해 난류의 소멸과정은 현재까지도 대부분 스칼라 소멸률방정식 ϵ 에 의해 결정되어지고 있으며, 소멸률 함수에 대한 텐서적 특성도 전통적으로 등방성 텐서인 $\epsilon_{ij} = (2\delta_{ij}/3)\epsilon$ 형태로 모형화되어 왔다. 그러나 일부 실험 및 수치적인 증거들은 소멸과정의 국부 등방성 가정에 대한 의심을 분명히 하고 있다. 이러한 비등방성 개념을 갖는 소멸률 텐서 모형화를 위해 대수적인 함수⁽⁸⁾ 형태나 소멸률 텐서 수송방정식에 의한 방법들이 일부 시도되어져 왔다.^(9,10) 이들 모형 중 Speziale & Gatski⁽¹⁰⁾

가 제시한 대수 비등방성 소멸률 모형(Algebraic Anisotropy Dissipation Rate Model; ADRM)은 균질 유동에서 이론적으로 상당히 타당성이 있음을 보여주고 있기 때문에 이 모형의 도입을 추진하였다. 이 모형의 유도과정은 상당히 복잡하지만 다음과 같이 명시적 대수모형(explicit algebraic method)으로 실제 유동장에 쉽게 적용될 수 있다.

$$d_{ij} = -2C_{\mu} \left[\frac{k}{\epsilon} S_{ij}^f + \left(\frac{(7/11)\alpha_3 + 1/11}{C_{\epsilon 5} + P/\epsilon - 1} \right) \frac{k^2}{\epsilon^2} (S_{ik}^f W_{kj}^f + S_{jk}^f W_{ki}^f) + \left(\frac{(30/11)\alpha_3 - 2/11}{C_{\epsilon 5} + P/\epsilon - 1} \right) \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(S_{ik}^f S_{kj}^f - \frac{1}{3} S_{ki}^f S_{lj}^f \delta_{ij} \right) \right] \quad (12)$$

여기서

$$C_{\mu} = \frac{1}{15(C_{\epsilon 5} + P/\epsilon - 1)} \quad (13)$$

$$\left[1 + 2 \left(\frac{(7/11)\alpha_3 + 1/11}{C_{\epsilon 5} + P/\epsilon - 1} \right)^2 \xi^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{(15/11)\alpha_3 - 1/11}{C_{\epsilon 5} + P/\epsilon - 1} \right)^2 \eta^2 \right]^{-1}$$

$$\eta = (S_{ij}^f S_{ij}^f)^{1/2} \frac{k}{\epsilon}, \quad \xi = (W_{ij}^f W_{ij}^f)^{1/2} \frac{k}{\epsilon} \quad (14)$$

$$d_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{2\epsilon} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (15)$$

이다. 식 (12)에서 P 는 운반상의 난류운동에너지 생성항을 나타내며, 모형계수 α_3 및 $C_{\epsilon 5}$ 는 각각 0.6과 5.8이다.⁽¹⁰⁾

(3) 유체-입자 속도 공분산(fluid-particle velocity covariance) 대수 관계식

유체-입자 속도 공분산에 대한 수송방정식 (7)로부터 대수방정식을 유도하는 것은 단상유동에 대한 대수응력모형을 유도하는 것과 유사하다. 유동이 평형상태에 있다고 가정하면

$$\frac{Dk_{ij}^p}{Dt} = 0 \quad (16)$$

이 성립한다⁽³⁾. 한편 식 (9)의 두 번째 식으로부터 $\overline{u_i v_j} = (2b_{ij}^p + 2\delta_{ij}/3) k_{fp}$ 이므로

$$\frac{D\overline{u_i v_j}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left[2 \left(b_{ij}^p + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) k_{fp} \right] = 2 \left(b_{ij}^p + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{Dk_{fp}}{Dt} + \frac{D(2b_{ij}^p)}{Dt} k_{fp} \quad (17)$$

즉,

$$\frac{D\overline{u_i v_j}}{Dt} = 2 \left(b_{ij}^p + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{Dk_{fp}}{Dt} \quad (18)$$

이 된다. 이 식의 좌변에는 식 (11)로 주어진 모형식 χ_{ij} 을 적용한 식 (7)을 대입하고, 우변의 Dk_{fp}/Dt 에 대해서는 식 (22)를 적용하면, 유체-입자 속도 공분산에 대해 다음과 같은 대수방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_i v_j}}{k_{fp}} = & \frac{2}{\Delta_{fp}} \left\{ -\overline{u_i v_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \overline{u_i v_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. C_{fp2} \overline{u_i v_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\tau_p} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \right\} \\ & - \frac{2}{\Delta_{fp}} \left\{ (1 - C_{fp3}) \frac{\lambda}{\tau_p} \left[(U_i - V_i) \overline{v_j \phi} - \Phi \left(\overline{v_i v_j} - \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{2}{\Delta_{fp}} \left\{ \frac{2}{3} \delta_{ij} \left[(1 - C_{fp2}) \frac{1}{2} \overline{u_i v_m} \frac{\partial U_m}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \overline{u_m v_i} \frac{\partial V_m}{\partial x_i} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (1 - C_{fp3}) \frac{\lambda}{\tau_p} (U_m - V_m) \overline{v_m \phi} \right\} \\ & + \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (19) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta_{fp} = & -\overline{u_m v_i} \frac{\partial V_m}{\partial x_i} - (1 - C_{fp2}) \overline{u_i v_m} \frac{\partial U_m}{\partial x_i} + \frac{2}{\tau_p} k \\ & + (1 - C_{fp3}) \frac{2\lambda\Phi}{\tau_p} k_p - (1 - C_{fp3}) \frac{\lambda}{\tau_p} (U_m - V_m) \overline{v_m \phi} \quad (20) \end{aligned}$$

이다. 식 (19)의 유도과정에서 $\overline{\nu v_j (\partial^2 u_i / \partial x_i^2)}$ 와 관련된 항은 통상 그 크기가 작고 이들의 효과는 압력항들에 흡수될 수 있을 것이다. 다른 상관관계들, $\overline{u_i (\partial v_j / \partial x_i)}$, $\overline{v_j (\partial u_i / \partial x_i)}$, $\overline{u_i (\partial u_i v_j / \partial x_i)}$ 및 $\overline{v_j (\partial u_i v_i / \partial x_i)}$ 또한 균질유동과 얇은 전단층 유동에서 매우 작거나 그 크기가 무시될 것이며, 이러한 가정은 대부분의 실제 유동에서도 훌륭한 근사해로서 고려될 것이다.^(3,4) 따라서 균질 난류 유동을 다루는 본 연구에서는 이러한 항들을 무시하였다. 그러나 벽면효과가 중요한 유동에서 이러한 항들은 고려되어야 하며 이 항들은 구배-확산 가정(gradient-diffusion hypothesis)을 도입하고 그 난류 모형계수를 적절히 선정하는 것에 의해 모형화 될 수 있다. 그러나 본 연구에서와 같이 유체-입자간 레이놀즈응력을 대수방정식으로 모형화하는 경우에는 이러한 항들의 벽면 영향을 압력-분산상 압력구배 상관관계 모형의 모형계수

에 벽면효과의 영향이 들어가도록 모형계수를 수정하는 것이 보다 효과적일 것으로 생각한다.

대수관계식 (19)로 주어진 유체-입자 레이놀즈 응력 $\overline{u_i v_j}$ 에 대한 명시적 해(explicit solution)는 실질적으로 얻어질 수 없다. 즉, $\overline{u_i v_j}$ 관계를 운반상 및 분산상 각각에 대한 평균변형률과 평균 와도 텐서를 포함하는 항들로 정리하면, 이 레이놀즈응력은 4개의 대칭텐서(S_{ij}^f , W_{ij}^f , S_{ij}^p , W_{ij}^p)와 운반상과 분산상들 사이의 연관관계(coupling)를 포함하는 한 개의 비대칭텐서에 의한 비대칭 함수가 되기 때문이다.⁽⁴⁾ 따라서 $\overline{u_i v_j}$ 에 대한 암시적 해(implicit solution)는 비대칭 텐서의 항에서만 표현될 수 있고, 이는 식 (19)가 반복 계산법에 의해서만 풀릴 수 있다는 것을 말해 준다.

(4) 소멸률 방정식 및 유체-입자 난류운동에너지 방정식

레이놀즈응력들의 모든 성분들을 얻기 위해서는 운반상의 난류운동에너지 소멸률 ϵ 이 알려져야 하기 때문에 본 연구에서는 다음과 같은 식을 적용하였다.

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} - \frac{\epsilon}{k} \frac{\lambda}{\tau_p} \{2\Phi k - C_{\epsilon 3} [2\Phi k_p - (U_i - V_i) \overline{u_i \phi}]\} - C_{\epsilon 4} \left(\frac{21}{11} \alpha_3 + \frac{14}{11} \right) \epsilon d_{ik} S_{ki} \quad (21)$$

식 (21)에서 우변의 3번째 항은 입자의 분산과 관련된 항이며 MT의 모형을 그대로 적용하였다. 그리고 마지막 항은 비등방성 소멸률텐서의 도입으로 인해 부가된 항이다. Table 2는 식 (21)에 대해 MT 및 본 연구에서 채택한 모형계수이다.

한편, 유체-입자 속도 공분산을 본 연구에서는 대수적으로 풀기 때문에, 유체-입자 난류운동에너지 k_{fp} 의 수송방정식이 필요하며, 이 관계는 식 (7)을 축약하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

Table 2 Model constants for carrier phase turbulent kinetic energy dissipation rate equation

	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$	$C_{\epsilon 4}$
MT	1.43	1.85	0.80	0
Present	1.0	1.83	0.78	1

$$\frac{Dk_{fp}}{Dt} = -(1 - C_{fp2}) \frac{1}{2} \overline{u_i v_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \overline{u_j v_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - C_{fp1} \frac{k_{fp}}{T} + \frac{1}{\tau_p} (k - k_{fp}) + (1 - C_{fp3}) \frac{\lambda}{\tau_p} \left\{ \Phi (k_p - k_{fp}) - \frac{1}{2} (U_j - V_j) \overline{v_j \phi} \right\} \quad (22)$$

결국 식 (22)를 사용함으로써 본 연구에서는 유체-입자간 속도 공분산을 수송방정식들(3차원 유동의 경우 9개, 2차원 유동의 경우 5개의 수송방정식)을 직접 푸는 것 대신에 대수적으로 간단히 풀 수 있으며, 이는 직접 풀어야 하는 레이놀즈응력 수송방정식의 수를 상당히 줄이는 효과가 있음을 알 수 있다.

3. 모형의 평가

레이놀즈응력방정식모형의 성능을 평가하기 위해 MT의 DNS자료⁽³⁾가 활용되었다. 이 모형의 평가를 위해서 평균속도구배 S 와 시간 t 의 곱인 $St \approx 1.8$ 에 해당하는 레이놀즈응력과 소멸률에 대한 MT의 DNS값들을 초기값으로 설정하였으며, $St \approx 1.8$ 는 유동과 입자들이 동적인 평형상태에 도달하는 것을 허용해주기 위하여 선택된 것이다. 즉, 이러한 초기값 설정이 필요한 이유는 레이놀즈응력 모형을 포함한 난류모형들은 그 자체가 동적평형(dynamic equilibrium)의 기초 위에 있기 때문이다. 모든 계산 경우에 대해 밀도비 $\lambda = 721.8$, 평균 속도구배 $S = 62.8 s^{-1}$ 이며, 질량하중비(mass loading ratio; Φ_m)와 입자시간상수(particle time constant; τ_p)의 효과들을 고려하기 위하여 3가지 경우가 고려되었다.

즉, 1-방향 연관관계인 $\tau_p = 0.016s$ 에서 $\Phi_m = 0$ 인 경우와, 2-방향 연결관계인 $\tau_p = 0.016s$ 에서 $\Phi_m = 0.25$ 인 경우 그리고 $\tau_p = 0.032s$ 에서 $\Phi_m = 0.25$ 인 경우가 그것이다.

본 연구에서 제시한 모형의 성능평가를 위해 DNS 자료 외에 MT가 제안한 모형(LRR 및 등방성 소멸률텐서 모형에 근간)과 비교를 하였다. 본 연구에서 시도하는 모형은 MT모형과 비교하여 균질 난류유동에 대한 예측에서 해의 정확도에 대한 것에 초점을 맞추기 보다는 향후 벽면이 존재하는 실제 2상유동에서 레이놀즈응력 난류모형을 선택적으로 사용할 수 있도록 레이놀즈응력 모형의 확장성을 제시하는 것에 더 큰 의의를 두고 있음을 강조한다. 또한, 본 연구에서 비교자료

및 본 계산의 초기자료로 사용한 MT의 DNS자료는 관련 논문으로부터 간접적으로 얻어졌기 때문에 MT가 논문에서 제시한 모형의 예측값들과 다소의 차이가 있을 수 있음을 밝혀둔다.

4. 결과 및 고찰

Fig. 1은 운반상의 압력-속도구배 상관관계항에 도입한 모형들의 성능을 보여주기 위한 것이다. 즉, MT는 이의 모형으로 LRR모형을, 그리고 본 연구에서는 SSG모형을 회전이 포함된 균질 난류 유동에 적용하여 그 결과를 비교한 것이다. LRR에 의한 MT의 예측결과는 회전이 없는 균질유동의 경우에는 LES자료를 잘 따르지만, 균질유동장에 회전이 포함되는 경우에는 그 예측의 정확성이 다소 떨어지게 된다. Fig. 1은 이 현상을 잘 보여주고 있으며, 이 계산은 단상의 균일유동 $Sk_o/\epsilon_o = 3.38$ 에서 이루어졌으며 예측결과는 Bardina 등⁽¹¹⁾의 LES자료와 비교되었다. k_o 및 ϵ_o 에서 하첨자(o)는 초기 값을 의미한다.

Fig. 2는 1-방향 연결관계에 해당하는, 즉 질량 하중비 $\Phi_m = 0$ 인 경우에 대한 레이놀즈응력의 모든 성분들에 대한 예측값을 DNS자료와 비교한 것이다. MT모형과 본 모형에 의한 예측결과들은 전반적으로 DNS자료에 상당히 잘 접근하는 것을 보여준다. MT모형과 본 모형에 의한 가장 큰 차이는 흐름방향($i = j = 1$)의 레이놀즈응력 분포값

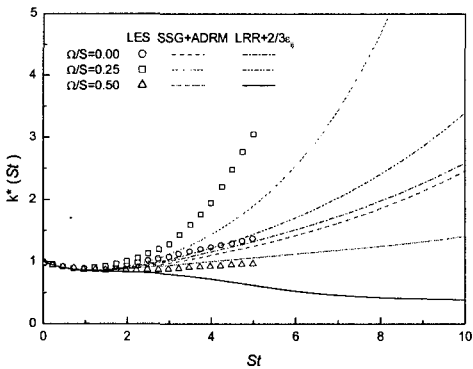


Fig. 1 Time evolution of the turbulent kinetic energy for homogeneous shear flow in a rotating frame: comparison of the model predictions with the large-eddy simulations of the Bardina et al.(1983)

들 예측에서 볼 수 있는데, 전반적으로 본 모형에 의한 예측값들이 MT모형에 의한 예측값들보다 다소 크게 예측되었다. 이에 반해 횡방향 (spanwise, $i = j = 3$) 레이놀즈응력들은 본 모형이

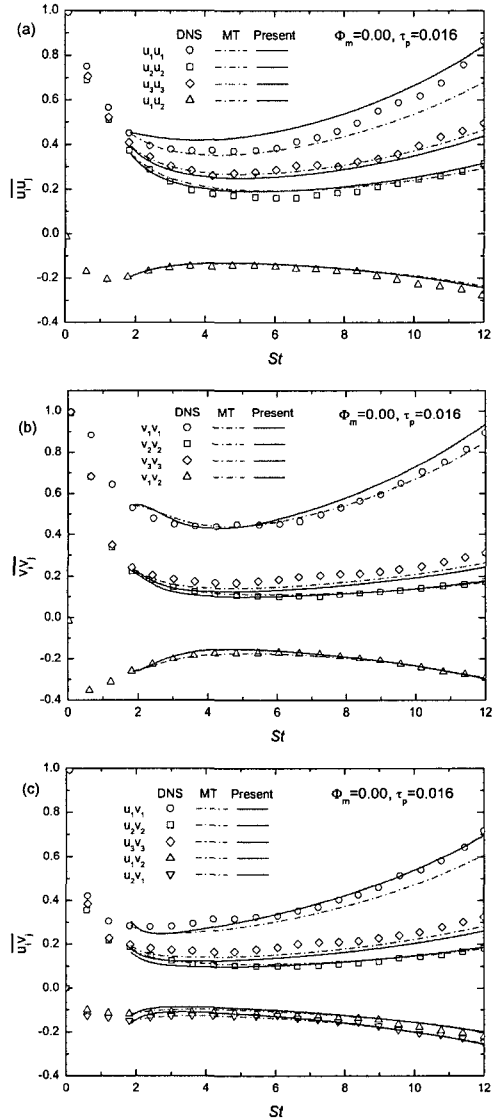


Fig. 2 Comparisons of the Reynolds stress model predictions with DNS data for the components of the fluid, particle, and fluid-particle Reynolds stress tensors for $\Phi_m = 0.00$ and $\tau_p = 0.016s$ (a) fluid-fluid $\overline{u_i u_j}$, (b) particle-particle $\overline{v_i v_j}$, and (c) fluid-particle $\overline{u_i v_j}$

MT모형보다 낮은 분포를 유지하는 경향을 보여 주고 있다. 특히, 두 모형들에 의한 입자 레이놀즈 응력 $\overline{v_i v_j}$ 분포들에 대한 예측값들은 DNS자료와 비교시 상당히 우수하는데, 이 이유는 입자 레이놀즈응력들은 현재의 모형에서 어떠한 모형화도 포함하지 않기 때문인 것으로 판단된다. 본 연구에서 대수응력모형을 적용한 유체-입자간의 레이놀즈응력 $\overline{u_i v_j}$ 분포들 역시 DNS자료에 잘 접근하고 있으며, 레이놀즈응력 수송방정식을 그대로 사용한 MT의 모형과 비교하여 그 차이가 크지 않음을 보여준다. 한편, Fig. 2(a)는 1-방향 연결관계에서 본질적으로 운반상에 적용된 압력-속도구배 상관관계 모형의 성능을 나타낸다고 할 수 있다. 즉, 이 모형을 위해 MT는 LRR을 본 연구에서는 SSG를 채택하였으며, 두 모형간의 차이는 주로 $\overline{u_1 u_1}$ 분포의 예측에서 일어나고 있음을 볼 수 있다.

$\Phi_m = 0.25$, $\tau_p = 0.016s$ 인 2-방향 연결관계에 대한 효과들은 Fig. 3에 도시되었다. 이 경우에도 모형에 의한 예측값들이 전반적으로 DNS 자료에 잘 접근하고 있는 것을 볼 수 있다. 두 모형간의 가장 큰 차이는 횡방향의 레이놀즈응력 분포들의 예측에서 일어나며, 주로 본 모형에 의한 예측값들이 MT모형에 의한 경우보다 낮게 예측되었다. 이러한 현상은 앞서 언급한 1-방향 연결관계에서도 나타나고 있으며, 현재의 모형에서 이 예측에 가장 큰 영향을 주는 것은 운반상의 압력-속도구배항 모형으로 채택한 식 (8)의 SSG모형에서 모형상수 C_{f2} 에 의한다. 본 연구에서는 이 항의 최초값인 4.2대신에 0으로 채택하였으며, 최초값인 4.2를 사용하는 경우에는 현재의 횡방향 레이놀즈응력 예측값들보다 상당히 낮은 분포를 유지하는 경향이 있다. C_{f2} 를 0으로 선정한 것은 속도-압력구배 상관관계 모형에서 난류의 등방성회귀항 중 비선형 항은 고려하지 않는다는 것을 의미한다. 유체-입자 레이놀즈응력 분포를 비롯한 모든 레이놀즈응력들에 대한 현재의 예측값들은 DNS 자료와 비교할 때 만족할만한 수준이다.

Fig. 4는 입자시간상수 τ_p 의 변화효과, 즉 입자의 관성에 대한 영향을 보기위해 $\Phi_m = 0.25$, $\tau_p = 0.032s$ 에서 계산된 결과이다. 이 경우의 결과도 Fig. 3에 의한 $\Phi_m = 0.25$, $\tau_p = 0.016s$ 의 경우와 거의 흡사한 것을 볼 수 있다. 다만 입자

레이놀즈응력 $\overline{v_1 v_1}$ 의 경우 두 모형 모두에서 그 예측값이 DNS 자료와 차이를 보여주고 있는 것을 보여주는데 이는 유체-입자 $\overline{u_1 v_1}$ 분포의 예측

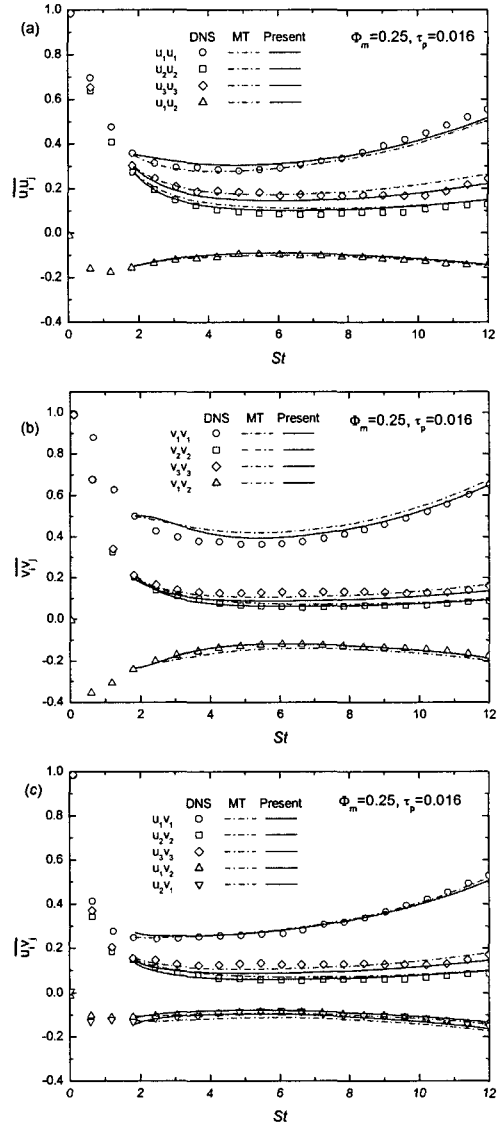


Fig. 3 Comparisons of the Reynolds stress model predictions with DNS data for the components of the fluid, particle, and fluid-particle Reynolds stress tensors for $\Phi_m = 0.25$ and $\tau_p = 0.016s$ (a) fluid-fluid $\overline{u_i u_j}$, (b) particle-particle $\overline{v_i v_j}$, and (c) fluid-particle $\overline{u_i v_j}$

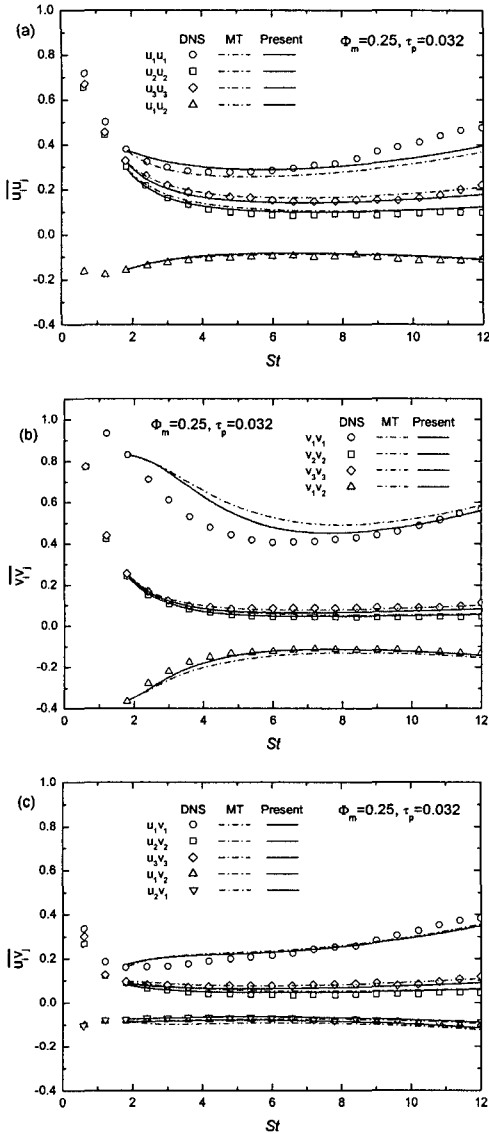


Fig. 4 Comparisons of the Reynolds stress model predictions with DNS data for the components of the fluid, particle, and fluid-particle Reynolds stress tensors for $\Phi_m = 0.25$ and $\tau_p = 0.032s$ (a) fluid-fluid $\overline{u_i u_j}$, (b) particle-particle $\overline{v_i v_j}$, and (c) fluid-particle $\overline{u_i v_j}$

값에 의해 주로 영향을 받는 것으로 보여지며, 이는 결국 입자시간상수가 커지는 즉, 입자의 관성성이 커지는 경우에 대해서는 유체-입자 레이놀

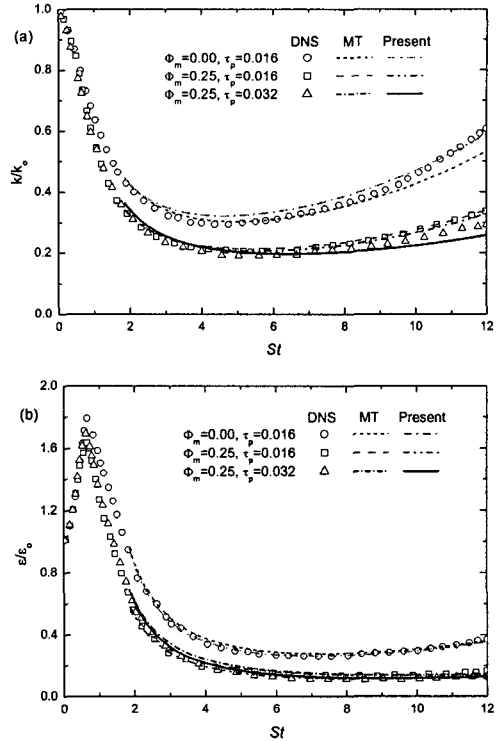


Fig. 5 Time evolutions of the fluid turbulent kinetic energy and rate of dissipation

즈응력 분포의 예측능력이 다소 떨어질 것이라는 것을 의미한다. 이는 결국 유체-입자 속도 공분산 방정식의 압력-속도구배항에 대한 모형화의 정확성으로 귀결되며, 향후 이 모형에 대해서는 더욱 정밀한 모형화가 요구됨을 암시한다.

입자들에 의한 난류의 변화는 Fig. 5와 같이 운반유체의 난류운동에너지 k 와 그 소멸률 ϵ 의 변화를 고려하는 것에 의하여 설명된다. 두 변수들은 하첨자(o)에 의하여 두 변수들의 초기값으로 무차원화 되었다.

모든 경우에 대해 초기의 난류운동에너지는 레이놀즈 전단응력항의 부재로 인해 감소하게 된다. 평균 속도구배에 따라 이 레이놀즈 전단응력항은 흐름방향에서 에너지의 생성함에 주된 영향을 미친다. 레이놀즈 전단응력 성분이 평균 속도구배의 작용에 의해 생성된 이후에 $St > 4.5$ 에서 난류운동에너지는 증가하기 시작한다. 운반유체 위에서 입자들의 주된 효과는 이 운반유체만이 존재하는 경우에 비해 난류운동에너지를 감소시키며, 이것은 Fig. 5(b)에서 볼 수 있는 바와 같이

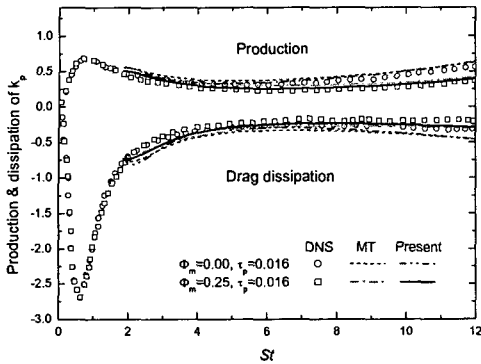


Fig. 6 Time evolutions of the production and drag dissipation terms appearing in the particle kinetic energy equation

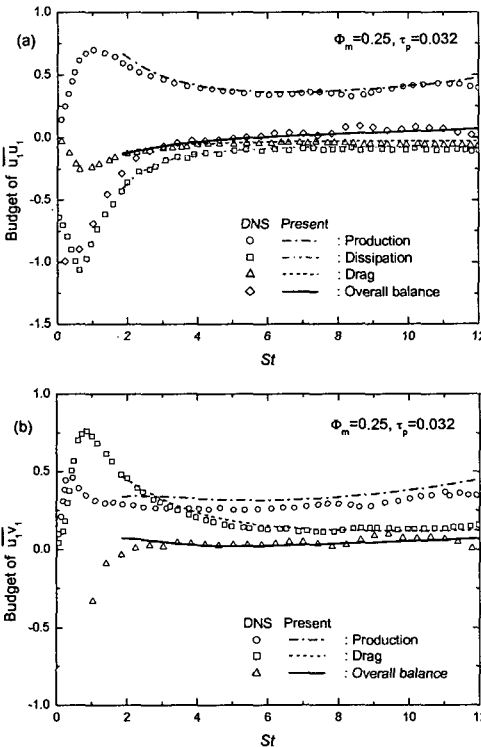


Fig. 7 Energy budgets for $\overline{u_1 u_1}$ and $\overline{u_1 v_1}$ from the case with $\phi_m = 0.25$ and $\tau_p = 0.032s$

소멸물에 대한 경우에도 마찬가지이다. 즉, 입자들의 존재에 의해 난류운동에너지와 그것의 소멸률의 감소는 저항력으로부터 기인되는 어떤 여분의 소멸이 더 있음을 암시하는 것이 되며, 이러한 감소효과는 본 모형과 MT모형에 의해 비교적

잘 예측되고 있다.

분산상에 대한 식 (6)의 우변의 첫 번째 항은 평균 속도구배에 의한 생성을 나타내고, 반면에 두 번째 항은 저항에 의한 영향을 나타낸다.

Fig. 6에서 이러한 항들에 대한 발달 전개 과정은 저항에 의한 항은 어떤 소멸로써 거동하고 생성과 균형을 맞추려는 경향을 보여준다. 충분한 시간이 지난 후에 질량하중비(mass loading ratio)의 증가는 생성과 소멸 둘 다에서 감소로 결과됨을 Fig. 5로부터 알 수 있다. 그러나 질량하중비에 의한 생성의 감소는 소멸의 그것보다 빠른 속도로 나타나며, 이러한 결과로부터 입자 난류운동에너지의 성장률은 질량하중비의 증가를 갖고 감소하게 된다. 본 모형과 MT모형에 의한 예측값들도 정확성 차이는 있지만 질량하중비의 변화에 따른 생성과 소멸분포를 잘 예측하고 있다.

Fig. 7은 본 모형에 도입한 각 모형항과 그 모형상수들의 타당성을 알아보기 위해 운반상 $\overline{u_1 u_1}$ 및 유체-입자 $\overline{u_1 v_1}$ 의 수송방정식들의 수치(budgets)균형을 DNS 자료와 비교한 것이다. 본 연구에서 운반상 $\overline{u_1 u_1}$ 의 수송방정식은 직접 풀기 때문에 이러한 수치 분포들을 구하는 것은 어렵지 않으나, 유체-입자 $\overline{u_1 v_1}$ 는 본 연구에서 대수적으로 풀기 때문에 이러한 수치균형을 나타낼 수 없다. 따라서 본 연구에서는 식 (7)에 나타난 각 항들이 적절하게 거동하는지를 알아보기 위하여 이 Fig. 7(b)에 대해서 만큼은 $\overline{u_1 v_1}$ 수송방정식을 직접 풀어 도시한 것이고 이러한 방법을 통해 모형계수를 결정하였다. DNS 자료와의 비교로부터 본 연구에서 도입한 모형항들은 비교적 타당성이 있다는 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 균질 난류유동에 회박하게 단산 분산된 고체입자와 관련된 2상유동을 2차-모멘트 난류모형을 이용하여 효과적으로 계산하기 위해서 운반상과 분산상의 레이놀즈응력들은 모형화된 수송방정식을 그대로 풀고 유체-입자간의 레이놀즈응력들은 대수적인 방법으로 해석하는 방법을 시도하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 연구에서 제시한 난류모형에 의한 운반상, 분산상 그리고 유체-입자간 레이놀즈응력 분

포의 예측값들은 DNS 자료와 비교되었으며, 여기서 제시된 난류모형은 비교적 적은 수송방정식을 사용하면서도 모든 레이놀즈응력들을 직접 푸는 MT 모형과 유사하게 질량하중비 및 입자시간 상수의 변화에 따른 2-방향 연결관계의 효과들을 적절하게 예측해 주었다.

(2) 본 연구에서 시도한 모형의 예측 타당성은 향후 난류확산을 고려한 실제 2상유동에 레이놀즈응력 모형을 적용할 경우, 다양한 유동조건에 따라 난류모형을 선택적으로 조합하여 사용할 수 있는 근거를 제시해준다.

(3) 운반유체 위에서 입자들의 주된 효과는 이 운반유체만이 존재하는 경우에 비해 난류운동에너지 및 그것의 소멸률을 감소시키며, 이러한 감소효과는 본 모형과 MT모형 모두에 의해 비교적 잘 예측되고 있다.

(4) 향후 이 모형의 성능을 시험하기 위해서는 벽면이 존재하는 2상유동에 적용하여 그 모형화가 필요한 항들에 대해 난류단합 문제를 먼저 해결해야 할 것이다. 예를 들어 입자상에 대한 레이놀즈응력 수송방정식 및 입자-유체 난류운동에너지 방정식의 난류확산항을 적절하게 모형화하여야 하며 이들 방정식에 벽면효과도 고려해야 할 것이다.

참고문헌

- (1) Shir, T.-H. and Lumley, J.L., 1986, "Second-Order Modelling of Particle Dispersion in a Turbulent Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 163, pp. 349~363.
- (2) Simonin, O., Deutch, B. and Boivin, M., 1995, "Large Eddy Simulation and Second-Moment Closure Model Particle Fluctuating Motion in Two-Phase Turbulent Shear Flows," *Turbulent Shear Flows* 9, pp. 85~115, Springer-Verlag, Munich, Germany.
- (3) Mashayek, F. and Taulbee, D.B., 2002, "Turbulent Gas-Solid Flows, Part I: Direct Simulations and Reynolds Stress Closures," *Numer. Heat Transfer B*, Vol. 41, pp. 1~29.
- (4) Mashayek, F. and Taulbee, D.B., 2002, "Turbulent Gas-Solid Flows, Part II: Explicit Algebraic Models," *Numer. Heat Transfer B*, Vol. 41, pp. 31~52.
- (5) Thielen, L., Hanjalic, K., Jonker, H. and Manceau, R., 2004, "Prediction of Flow and Heat Transfer in Multiple Impinging Jets with an Elliptic-blending Second-moment Closure," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 1583~1598.
- (6) Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure," *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, pp. 537~566.
- (7) Speziale, C.G., Sankar, S. and Gatski, T.B., 1991, "Modeling of the Pressure-strain Correlation Tensor: an Invariant Dynamical Systems Approach," *J. Fluid Mech.*, Vol. 227, pp. 245~272.
- (8) Hallback, M., Groth, J. and Johansson, A., 1990, "An Algebraic Model for Nonisotropic Turbulent Dissipation Rate in Reynolds Stress Closure," *Phys. Fluids A*, Vol. 2, pp. 1859~1866.
- (9) Oberlack, M., 1997, "Non-isotropic Dissipation in Non-homogeneous Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 350, pp. 351~374.
- (10) Speziale, C.G. and Gatski, T.B., 1997, "Analysis and Modelling of Anisotropies in the Dissipation Rate of Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 344, pp. 155~180.
- (11) Bardina, J., Ferziger, J.H. and Reynolds, W.C., 1983, "Improved Turbulence Models based on Large-Eddy Simulation of Homogeneous, Incompressible Turbulent Flows," Stanford University Tech. Rep., TF-19.