

측정 잡음을 고려한 저차의 동적출력궤환 제어기 설계

Low-Order Dynamic Output Feedback Controller Design Against Measurement Noise

孫 瑛 翼[†] · 趙 南 熏^{*} · 沈 亨 輔^{**}

(Young-Ik Son · Nam-Hoon Jo · Hyungbo Shim)

Abstract - This paper considers a low-order dynamic output feedback controller design problem. Since the proposed control law inherently has a low-pass filter property, it can alleviate the mal-effects of the sensor noise without additional filter designs. Frequency domain analysis shows the characteristics of the proposed control law against measurement noise. The effectiveness of the proposed control law is illustrated by numerical simulations with a rotary inverted pendulum and a convey-crane. Using only one integrator the proposed control law has the advantage to the stabilization problem with sensor noise as well as it can successfully replace the measurements of derivative terms in a state feedback control law.

Key Words : Dynamic Output Feedback, Low-Order Controller, Low-Pass Filter, Static Output Feedback, Rotary Inverted Pendulum

1. 서 론

제어 시스템 설계 시 안정성은 가장 먼저 고려되어야 할 성질이며, 안정성을 보장하는 제어기 설계방법은 많은 연구자들에 의해 계속 연구되고 있다. 본 논문에서는 선형 시불변 시스템에 대한 저차(low order)의 출력 궤환 제어기 설계 문제를 다룬다.

출력에 상수 행렬을 곱하여 설계된 제어 입력 즉, 정적 출력 궤환 제어기로는 시스템을 안정화 할 수 없는 경우, 추가적인 동특성을 사용하여 제어기를 설계하는 문제를 동적 출력 궤환 제어기 설계 문제라 한다. 진상 혹은 지상 보상기나 관측기 기반 제어기가 그 예가 될 수 있다 [1,2]. 이 때 시스템의 차수를 n , 출력의 차수를 p , 추가 시스템의 차수를 q 라고 할 때, $q < n - p$ 인 제어기를 설계하는 것이 저차의 동적 출력 궤환 제어기 설계문제이다. 즉, 저차 제어기란 축소 차수 관측기보다 낮은 차수의 제어기를 말하며, 저차의 동적 출력 궤환 제어기 설계 문제는 중요한 연구 주제 중의 하나이다 [3-6]. 본 논문에서는 비례-미분(PD) 제어기로 안정화되는 시스템에 대해서 미분항을 사용하지 않고 간단한 저차의 제어기 설계방법을 제안한다.

비례-미분 제어식에서 미분항을 얻기 위해 출력 신호를 직접 미분하는 것은 실제적인 요인들에 의해 피하고 있으며,

그 대신 다른 방법을 통해 그 값을 추정하는 연구들이 진행되고 있다 [7-10]. 그 중 가장 간단한 방법으로는 1차의 고대역 통과 필터를 사용하는 방법을 들 수 있다 [8,10]. 이 경우 출력과 제어입력 사이의 라플라스 변환식이 아래와 같다. 식에서 양수 σ 는 제어기 설계과정에서 결정될 필터의 차단 주파수(cutoff frequency)이다.

$$U(s) = -K_p Y(s) - \frac{\sigma s}{s + \sigma} K_d Y(s) \quad (1)$$

본 논문에서는 제어 입력 (1)과 동일한 차수를 가지면서 출력에 존재하는 잡음에 대해 그 영향을 감소시킬 수 있는 저차의 동적 출력 궤환 제어기를 설계한다. 설계된 제어기는 상태 공간 방정식의 형태로 표현된다.

논문의 구성은 2절에서 문제를 정의하고, 3절에서는 제어기 설계 방법을 제시한다. 4절에서는 제안된 제어기의 추가적인 성질을 살펴보고, 5절에서 회전형 역진자 및 크레인 시스템에 대한 모의실험을 통해 측정 잡음에 대한 성능을 테스트 한다. 설계된 제어기는 같은 차수의 다른 제어기에 비해 측정 잡음의 영향을 감소시키는 기능을 갖는다.

2. 문제 정의

본 논문에서는 아래와 같이 표현되는 시스템에 대한 출력 궤환 제어기 설계 문제를 다룬다.

$$(P): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, u \in R^m \\ y = Cx, & y \in R^p. \end{cases} \quad (2)$$

위 식에서 x 는 상태 변수이고, u 와 y 는 각각 제어 입력과 측정 출력을 의미한다. 시스템 (2)는 출력에 상수 행렬을 곱하여 설계된 제어 입력 $u = Fy$ 로는 안정화 할 수 없으며, 아래 가정을 만족한다고 한다.

[†] 교신저자, 正會員 : 明知大 工大 電氣工學科 助教授

Email : sonyi@mju.ac.kr

* 正會員 : 崇實大 工大 電氣制御시스템工學部 助教授

** 正會員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 助教授

接受日字 : 2006年 9月 5日

最終完了 : 2006年 11月 30日

가정 1. (i) 행렬 $CB=0$ 이다. (ii) 아래의 비례-미분(PD) 제어 입력에 의한 페루프 시스템 (2)-(3)은 안정하다.

$$u = -K_p y - K_d \dot{y} \quad (3)$$

DC 모터의 위치 제어 시스템이나 역진자 시스템의 안정화 제어가 설계 등과 같이 다양한 실제 문제들에서 위의 가정 1이 만족되고, 제어식 (3)은 적분항이 추가된 경우와 더불어 많은 적용 예를 가지고 있다 [1].

첨언 1. 이득 행렬 K_p 와 K_d 의 결정은 전달 함수를 통한 고전제어 기법을 활용할 수 있고[1], 출력과 그 미분을 새로운 출력으로 보고 정적 출력 궤환 문제[12,13]의 알고리즘을 적용하여 구할 수도 있다. 5.1절에서와 같이 출력과 그 미분이 시스템의 모든 상태 정보를 포함하는 경우에는 상태 궤환 제어 입력이 모두 (3)과 같이 표현되므로 LQR 제어 기법 등이 이득 행렬을 결정하는데 사용될 수 있다.

제어식 (3)에서 미분항을 사용하지 않는 방법들 중에서 가장 간단한 방법으로 제어식 (1)을 생각할 수 있다. 만약 (1)식에서 출력 측정값에 고주파 잡음이 존재하는 경우에 대해서는 아래 입력이 (1)식 보다 더 효과적일 것으로 예상할 수 있다.

$$U(s) = -\frac{\sigma}{s+\sigma} K_p Y(s) - \frac{\sigma s}{s+\sigma} K_d Y(s) \quad (4)$$

위의 제어 입력 (1)과 (4)는 모두 동적 출력 궤환 제어기이다. 추가 시스템의 차수 관점에서 볼 때 제어 입력 (1)의 경우에는 먼저 필터를 거친 출력에 이득 K_d 를 곱하는 경우에는 출력 차수 만큼의 추가 시스템이 필요하고, 출력에 이득 K_d 를 먼저 곱한 후에 필터를 사용하는 경우에는 입력 차수 만큼의 추가 시스템이 필요하게 된다. 반면에 제어 입력 (4)의 경우에는 제어 입력 (1)에 비해 두 배의 차수를 갖는 추가 시스템이 필요할 것임을 알 수 있다.

본 논문에서는 제어 입력 (1)과 동일한 차수, 즉 시스템 (2)의 입력과 동일한 차수를 가지면서 입력 (4)와 같은 역할을 하는 저차의 동적 출력 궤환 제어기를 설계한다. (차수 $m < n-p$ 일 때 제안된 제어기는 저차 제어기이다.)

3. 출력 궤환 제어기의 설계

본 논문에서는 아래와 같은 추가 시스템을 제안한다. 추가 시스템의 차수는 시스템 (2)의 입력 차수와 같다.

$$(V): \begin{cases} \dot{\eta} = K_p y + M, & \eta \in R^m, u \in R^m \\ y_\eta = \eta, & y_\eta \in R^m. \end{cases} \quad (5)$$

추가 시스템 (5)와 결합한 전체 시스템 식은 다음과 같이 쓸 수 있다. 이 때, 새로운 출력 $\bar{y} \in R^m$ 를 아래와 같이 정의함으로써 (4)식과 같이 저역 통과 필터가 결합된 제어기를 설계한다. 행렬 I_m 은 $m \times m$ 단위 행렬을 뜻한다.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ K_p C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I_m \end{bmatrix} u \\ \bar{y} = [K_d C \quad I_m] \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

위 시스템을 안정화하는 제어 입력을 소개하기 앞서 이후의 증명 과정에서 사용되는 성질을 미리 밝혀둔다.

보조정리 1. 다음과 같은 시스템을 생각한다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u \quad (7)$$

위에서 $\xi \in R^n$ 이고, $y, u \in R^m$ 이다. 행렬 A_1 이 Hurwitz일 때, 시스템 (7)을 안정화하는 출력궤환 입력 $u = Fy$ 의 행렬 F 는 항상 존재한다.

증명. 위 성질을 만족하는 행렬 F 는 유일하지 않으므로, 존재성에 관한 가장 간단한 증명을 살펴본다. 행렬 A_1 이 안정하므로 아래 식을 만족하는 행렬 $P_1 = P_1^T > 0$ 이 존재한다.

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -I_n \quad (8)$$

리아프노프(Lyapunov) 함수를 아래와 같이 정하고

$$V(\xi, y) = \frac{1}{2} \xi^T P_1 \xi + \frac{1}{2} y^T y \quad (9)$$

시스템 (7)을 따라 시간에 대해 미분하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V &= -\frac{1}{2} \xi^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) \xi + \xi^T P_1 A_2 y + y^T A_3 \xi \\ &\quad + y^T A_4 y + y^T u \\ &\leq \frac{1}{2} |\xi|^2 + |P_1 A_2 + A_3^T| |\xi| |y| + y^T A_4 y + y^T u \\ &\leq -\frac{1}{4} |\xi|^2 + |P_1 A_2 + A_3^T|^2 |y|^2 + |A_4| |y|^2 + y^T u. \end{aligned} \quad (10)$$

식 $u = Fy$ 에서 $F = -\sigma I_m$ 이고

$\sigma > |P_1 A_2 + A_3^T|^2 + |A_4| + 1$ 일 때,

$$\frac{dV}{dt}(\xi, y) \leq -\frac{1}{4} |\xi|^2 - |y|^2. \quad (11)$$

식 (11)은 페루프 시스템의 점근적 안정성을 의미한다. □

정리 1. 가정 1이 만족될 때 아래 제어 입력에 의한 페루프 시스템 (6)-(12)는 안정하고, (12)식은 (4)식과 같은 저역 통과 필터 성질을 가진다.

$$u = -\sigma_1 \bar{y} \quad (12)$$

단, $\sigma_1 > 0$ 은 충분히 큰 상수 (차단 주파수)이다.

증명: 다음과 같은 상태 변수 치환을 생각한다.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - BK_d C & -B \\ K_d C & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (13)$$

시스템 (6)은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u \quad (14)$$

단, $A_1 = A - B(K_p C + K_d C A)$; $A_2 = A_1 B$; $A_3 = K_p C + K_d C A$ 이고, $A_4 = A_3 B$ 이다. 행렬 A_1 은 페루프 시스템 (2)-(3)의 시스템 행렬이다. 가정 1에 의해 A_1 이 Hurwitz이므로 보조정리 1에 의해 페루프 시스템이 안정함을 알 수 있다. 양수 σ_1 에 대한 충분 조건은 (8)식을 만족하는 P_1 에 대해 $\sigma_1 > |P_1 A_2 + A_3^T|^2 + |A_4| + 1$ 이다.

이제 제어 입력 (12)의 성질을 살펴본다. 먼저, (6)식에서 \bar{y} 의 시간에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \bar{y} = K_d \dot{y} + K_p y + u = K_d \dot{y} + K_p y - \sigma_1 \bar{y} \quad (15)$$

해석을 위해 위 식의 양변을 라플라스 변환하고 정리하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{Y}(s) = \frac{1}{s + \sigma_1} K_p Y(s) + \frac{s}{s + \sigma_1} K_d Y(s). \quad (16)$$

따라서, 입력의 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$U(s) = \frac{\sigma_1}{s + \sigma_1} (-K_p Y(s) - K_d s Y(s)). \quad (17)$$

위 식은 식 (4)의 제어 입력과 동일하다. 즉, 추가 시스템 (5)와 함께 얻어진 제어기 (12)는 PD 제어기 (3)에서 미분항을 대체하는 기능에 덧붙여 추가적인 제어기 설계 없이 출력의 측정 잡음에 대응하는 저역 통과 필터(Low Pass Filter) 특성을 탑재하고 있음을 의미한다. (그림 1) □

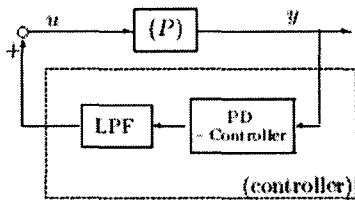


그림 1 등가의 페루프 시스템
Fig. 1 Equivalent Closed-loop System

한편, 위의 식 (15)와 증명 과정에 유의하면 동일한 추가 시스템으로 식 (1)의 역할을 하는 제어기도 설계할 수 있음을 알 수 있다.

따름정리 1. 가정 1이 만족될 때 아래 제어 입력은 식 (1)과 같이 표현할 수 있고, 페루프 시스템 (6)-(18)은 안정하다.

$$u = -K_p y - \sigma_2 \bar{y} \quad (18)$$

단, $\sigma_2 > 0$ 은 충분히 큰 상수 (차단 주파수)이다.

증명: 정리 1의 증명과 같이 전개하면 아래의 전체 시스템 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} v \quad (19)$$

단, 새로운 변수 $v := u + K_p y$ 이며, 행렬 A_1 과 A_2 는 (14)식의 것과 동일하다. 새로운 행렬 $\bar{A}_3 = K_d C A$ 이고, $\bar{A}_4 = \bar{A}_3 B$ 이다. 보조정리 1에 의해 $v = -\sigma_2 \bar{y}$ 인 페루프 시스템이 안정함을 알 수 있다. 양수 σ_2 에 대한 충분조건은 (8)식을 만족하는 P_1 에 대해 $\sigma_2 > |P_1 A_2 + \bar{A}_3^T P_1 + \bar{A}_4| + 1$ 이다.

제어 입력이 (1)식과 같음을 보이기 위해 \bar{y} 를 시간에 대한 미분하면

$$\frac{d}{dt} \bar{y} = K_d \dot{y} + K_p y + u = K_d \dot{y} - \sigma_2 \bar{y} \quad (20)$$

이고, 위 식의 양변을 라플라스 변환하고 정리하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{Y}(s) = \frac{s}{s + \sigma_2} K_d Y(s). \quad (21)$$

따라서, 입력 (18)의 라플라스 변환은 식 (1)의 제어 입력과

동일함을 알 수 있다. □

다음 절에서는 정리 1에서 파생되는 추가적인 제어기를 소개하고 그 성질을 살펴본다.

4. 추가적인 내용들

4.1 ILMI를 이용한 제어기 설계

정리 1의 제어기 (12)는 시스템 (6)에 대한 정적 출력 제한 제어 입력 $u = F\bar{y}$ 중 하나이다. 따라서, 정적 출력 제한 제어기법을 사용하면 식 (12)와는 다른 다양한 결과를 얻을 수 있다. 예를 들어, 참고 문헌 [13]의 반복 선형 행렬 부등식(Iterative Linear Matrix Inequality)을 활용하면 고차 시스템의 제어기 설계에 편리하다.

상태 변수 $z := [x^T \eta^T]^T$ 라 정의하면 식 (6)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{z} = A_a z + B_a u, & z \in R^{n+m}, u \in R^m \\ \bar{y} = C_a z, & \bar{y} \in R^m. \end{cases} \quad (22)$$

논문 [13]의 방법으로 얻어진 행렬 F 가 고이득(high gain)인 경우에는 아래와 같은 최적화 문제를 추가적으로 고려하여 적절한 이득 F 를 구할 수 있다. 변수들의 의미와 ILMI에 대한 내용은 논문 [13]을 참고한다.

$$\begin{aligned} & \min \text{trace}(P_i) \\ & \text{subject to:} \\ & \begin{bmatrix} A_a^T P_i + P_i A_a - X_i B_a B_a^T P_i - P_i B_a B_a^T X_i & (B_a^T P_i + F C_a)^T \\ (B_a^T P_i + F C_a) & -I_m \end{bmatrix} < 0 \\ & P_i = P_i^T > 0 \end{aligned}$$

4.2 기준 입력에 대한 추종 제어기

본 절에서는 기준 신호 $r: R \rightarrow R^n$ 에 대한 상태 변수의 추종 문제를 생각한다. 추종 오차 $e := x - r$ 과 같이 정의할 때 아래와 같은 오차 방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} \dot{e} = A e + B u + A r - \dot{r}, & e \in R^n \\ y_e = C e, & y_e \in R^p, u \in R^m. \end{cases} \quad (23)$$

기준 신호와 대상 시스템 (2)에 대하여 다음 가정이 만족하는 경우를 고려한다.

가정 2. 기준 신호 $r: R \rightarrow R^n$ 에 대하여 아래 식을 만족하는 f 를 제어 입력에 이용할 수 있다.

$$A r - \dot{r} = B f \quad (24)$$

아래 결과는 앞 절의 제어기가 추종 문제에도 적용될 수 있음을 뜻한다. 오차 시스템이 안정하므로 시스템의 상태는 기준 신호를 점근적으로 추종함을 알 수 있다. 증명은 앞 절의 정리 1과 동일하게 전개되므로 생략한다.

따름정리 2. 시스템 (2)에 대하여 가정 1-2가 만족될 때, 아래의 제어기에 의해 오차 시스템 (23)은 안정하다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = K_p y_e + (u + f) \\ \dot{y} = K_d y_e + \eta \\ u = -\sigma_1 \bar{y} - f. \end{cases} \quad (25)$$

이 때, $\sigma_1 > 0$ 는 충분히 큰 상수 (차단 주파수)이다.

4.3 시스템 불확실성에 대한 강인성

본 절에서는 시스템 행렬의 계수에 불확실성이 존재하는 경우 PD 제어기 (3)이 갖는 강인성을 제안된 제어기가 보존함을 보인다. 이 결과는 불확실성이 존재하는 시스템에 대하여 상태 정보가 충분한 경우에 강인한 제어를 설계할 수 있다면, 상태 정보가 불충분한 경우에도 강인한 안정성을 보존할 수 있음을 의미한다. 다음과 같이 표현되는 시스템을 생각한다. 행렬 ΔA 는 불확실성을 나타내며, 유계 (bounded)인 상수 행렬이다.

$$(P_\Delta) : \begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu, & x \in R^n, u \in R^m \\ y = Cx, & y \in R^p. \end{cases} \quad (26)$$

위 시스템 (26)에 대해 가정 1이 만족되면 다음 페루프 시스템 행렬 A_c 가 Hurwitz로 유지됨을 의미한다.

$$A_c := A_\Delta - K_p C - K_d C A_\Delta \quad (27)$$

시스템 (26)과 동적 출력 궤환 제어기 (12)에 의한 전체 시스템은 정리 1의 증명에서처럼 (14)식과 같이 다시 쓸 수 있다. 단, 이 때 $A_1 = A_c$; $A_2 = A_c B$; $A_3 = K_p C + K_d C A_\Delta$ 이고, $A_4 = A_3 B$ 이다. 행렬 A_c 가 Hurwitz이므로 보조정리 1에 의해 충분히 큰 상수 σ_1 에 의해 페루프 시스템이 안정함을 알 수 있다. 충분조건은 (8)식을 만족하는 P_1 에 대해 $\sigma_1 > |P_1 A_2 + A_3^T P_1 + A_4| + 1$ 이다.

4.4 2차 필터의 성질을 갖는 제어기

앞 절에서 살펴본 바와 같이 제어기 (12)는 1차의 저역 통과 필터 성질을 갖는다. 잡음의 효과를 더욱 효과적으로 감소시키기 위해서는 아래와 같은 2차 필터가 포함된 제어기를 생각할 수 있다.

$$U(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} (-K_p Y(s) - K_d s Y(s)) \quad (28)$$

위 식과 같은 제어기를 구현하기 위해 아래의 추가 시스템과 제어 입력을 제안한다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = K_p y + u \\ \dot{y}_1 = -2\zeta\omega_n y_1 + K_d y + \eta \\ u = -\omega_n^2 y_1 \end{cases} \quad (29)$$

시스템 (2)와 제어기 (29)가 결합된 페루프 시스템에 대하여 변수 치환을 통해 아래와 같은 페루프 시스템 행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & -2\zeta\omega_n & 1 \\ A_3 & -\omega_n^2 & A_4 \end{pmatrix} \quad (30)$$

단, $A_1 = A - B(K_p C + K_d C A)$; $A_2 = A_1 B$; $A_3 = K_p C + K_d C A$ 이고, $A_4 = A_3 B$ 이다. 행렬 (30)이 Hurwitz인 (ζ, ω_n)-쌍에 대하여 제어 시스템 (29)는 준 시스템 (2)를 안정화시킬 뿐

만 아니라 식 (28)과 같은 2차의 저역 통과 필터 기능을 동시에 갖게 된다.

5. 모의 실험 예

본 절에서는 3절에서 제안된 제어기를 회전형 역진자 시스템 [12,13]과 크레인 시스템 [14]에 적용하여 측정 잡음에 대한 성능을 테스트한다.

5.1 회전형 역진자에 대한 적용

제안된 제어기 (12)의 적용으로서 회전형 역진자 시스템에 대한 모의실험을 수행한다. 고려 대상 시스템의 구조가 그림 2에 나타나 있다.

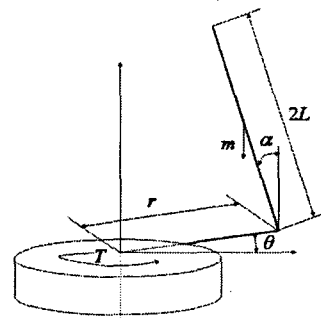


그림 2 회전형 역진자
Fig. 2 Rotary Inverted Pendulum

라그랑지안 방법으로 유도된 운동 방정식에서 상태 변수를 $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$, $y = [\theta \ \alpha]^T$, $u = V$ 라 정의하고, 동작점 $x=0$ 에서 선형화하면 아래와 같은 선형 시스템이 주어진다. 단, α 와 θ 는 그림 2에 보이는 회전각이며, V 는 DC 모터에 가해지는 전압이다. 나머지 모델에 대한 자세한 설명은 참고 문헌을 참조한다 [12,13].

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 41.92 & -15.48 & 0 \\ 0 & 84.28 & -14.90 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.23 \\ 26.21 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases} \quad (31)$$

출력항과 그 미분항이 상태 변수를 모두 포함하므로 아래 행렬을 이용하여 LQR 제어기 $u = -Kx$ 의 이득 행렬을 구한다 [13].

$$Q = \text{diag}[5 \ 20 \ 0 \ 0], \ R = 1 \quad (32)$$

$$K = [-2.2361 \ 20.7462 \ -1.9974 \ 2.8088] \quad (33)$$

행렬 $CB=0$ 이므로 시스템 (32)는 가정 1을 만족하고, 제어 입력을 아래와 같이 쓸 수 있으므로

$$u = -K_p Cx - K_d C A x, \quad (34)$$

PD 제어기의 이득 행렬은 다음과 같이 주어진다 (첨언 1).

$$K_p = [-2.2361 \ 20.7462], \ K_d = [-1.9974 \ 2.8088].$$

결국, 제어 시스템 (12)는 다음과 같고, 저차(1차)의 동적 출력 궤환 제어기이다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [-2.2361 \ 20.7462]y + u \\ \dot{y} = [-1.9974 \ 2.8088]y + \eta \\ u = -\sigma_1 \bar{y} \end{cases} \quad (35)$$

상수 $\sigma_1 = 20$ 일 때 페루프 시스템은 안정함을 확인할 수 있다.

모의실험에서는 각속도 $\dot{\theta}$ 와 $\dot{\alpha}$ 를 측정할 수 없는 경우를 다룬다. 또한, 입력 전압 V 는 ± 4 [V]로 제한하였다. 측정 잡음에 대한 성능 모의를 위해 백색 잡음 $n(t)$ 를 $\theta(t)$ 값에 더하여 모의하였다. 즉,

$$y(t) = [\theta(t) + n(t) \ \alpha(t)]^T. \quad (36)$$

함께 비교한 제어 입력은 참고 문헌 [10]에서 제안한 아래 제어기이다.

$$U(s) = -K_p Y(s) - K_d \frac{50s}{s+50} Y(s). \quad (37)$$

제안된 방법의 결과(그림 3과 4의 왼쪽)는 유한한 값을 갖지만 참고 문헌 [10]의 입력 (37)에 의한 그림 3과 4의 오른쪽 결과는 발산함을 보여준다.

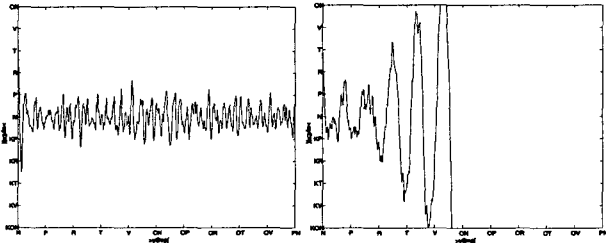


그림 3 Pendulum Angle α (제안된 방법: 왼쪽)
Fig. 3 Pendulum Angle α (Proposed: Left)

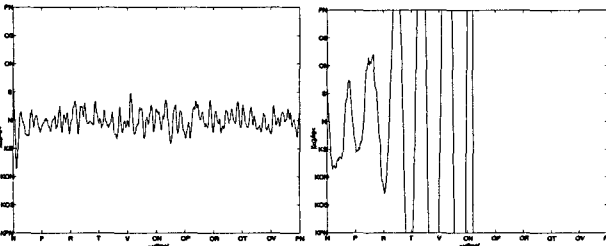


그림 4 Arm Angle θ (제안된 방법: 왼쪽)
Fig. 4 Arm Angle θ (Proposed: Left)

마지막으로 제어기의 차수를 표 1에 비교하였다. 아래 방법들 중 C와 D는 출력 y 에 대해 필터를 거치지 않고 사용하는 방법들이다.

표 1 출력 제한 제어기 차수비교
Table 1 Orders of Output Feedback Controllers

A	B	C	D
제안된 방법	전차수 관측기	축소차수 관측기	Quanser 방법
1차	4차	2차	2차

5.2 크레인 시스템 모의실험

본 예에서는 시스템의 안정성을 해치지 않는 정도의 잡음 하에서 두 제어기 (1)과 (12)의 성능을 비교한다. 비례-미분 (PD) 제어기로 안정화되는 아래와 같은 크레인 시스템을 생각한다 [14].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \\ 1 \\ lM \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (38)$$

각 문자들의 의미는 [14]를 참고한다. 단, $z = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ 인 상태 변수에서 x 는 카트의 위치이고, θ 는 짐(또는 추)가 수직선과 이루는 흔들림 각이다. 참고 논문 [14]에서는 θ 의 측정 없이 x 와 \dot{x} 만으로 제어기를 설계하였다. 본 예에서는 [14]와 달리 측정 가능한 출력 $y = x$ 뿐이라 생각한다.

참고 논문과 같이 $M = m = 1\text{kg}$, $l = 1\text{m}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$ 이라 정하면, 이득 $K_p = 3$, $K_d = 4.5$ 일 때 PD 규칙 (3)으로 페루프 시스템은 안정하다. 따라서, 제어 시스템 (12)는 다음과 같고 저차(1차)의 동적 출력 제한 제어기이다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = 3y + u \\ \dot{y} = 4.5y + \eta \\ u = -\sigma_1 \bar{y} \end{cases} \quad (39)$$

상수 $\sigma_1 = 7$ 일 때 페루프 시스템은 안정함을 확인할 수 있다.

초기조건이 $z(0) = [x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)] = [-5, 0, -\pi/4, 0]$ 인 모의실험 결과는 그림 5-6에 나타내었다. 실선으로 표시된 궤적이 제안된 제어기에 의한 결과이며, 점선이 제어식 (1)에 의한 결과이다. 제안된 제어기의 성능이 개선되었음을 확인할 수 있다.

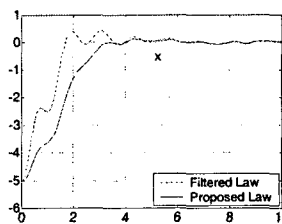


그림 5 카트의 위치 'x'
Fig. 5 Cart Position 'x'

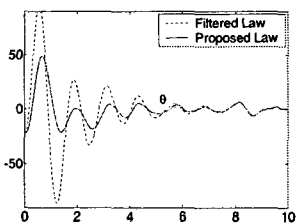


그림 6 흔들림 각 ' θ '
Fig. 6 Sway Angle ' θ '

6. 결론

본 논문에서는 제어 입력이 출력의 미분항을 필요로 하는 경우 미분기를 사용하지 않고 저차의 동적 출력 제한 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 제안된 제어기는 미분항을 대체할 뿐 아니라 추가적인 시스템의 설계 없이 출력에 대한 저역 통과 필터 특성을 가짐으로써 같은 차수의 다른 제어기에 비해 측정 잡음이 존재하는 시스템의 안정화에 장점을 지닌다. 또한, LMI와 같은 수치적인 알고리즘을 이용하여 제어기를 편리하게 설계할 수 있음을 보이고, 고이득

제어기를 피하기 위한 추가 알고리즘을 제안하였다. 본 결과는 추종 제어기에도 적용될 수 있으며, PD 제어기가 갖는 강인성을 보존함을 살펴보았다. 추가 연구를 통해 고차의 필터 기능을 갖는 제어기로 확장할 수 있음도 보였다. 회전형 역진자 시스템과 크레인 시스템의 안정화 문제를 측정 잡음 하에서 다루었으며 적분기 하나만을 사용하여 시스템을 안정화 할 수 있음을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력연구원(R-2005-B-146) 주관으로 수행된 과제임.

참 고 문 헌

[1] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 4th Ed., 2002.

[2] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 1984.

[3] L.H. Keel and S.P. Bhattacharyya, "State-space design of low-order stabilizers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 2, pp. 1451-1456, 1990.

[4] D.W. Gu, B.W. Choi, and I. Postlethwaite, "Low-order stabilizing controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 11, pp. 1713-1717, 1993.

[5] C.C. Tsui, "High performance state feedback, robust, and output feedback stabilizing control - a systematic design algorithm" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 3, 560-563, 1999.

[6] S. Wang and J.H. Chow, "Low-order controller design for SISO systems using coprime factors and LMI.," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 6, pp. 1166-1169, 2000.

[7] P. Tomei, "A simple PD controller for robots with elastic joints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, pp. 1208-1213, 1991.

[8] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon, and A. Loria, "A simple PD controller for robots with elastic joints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 1222-1224, 1994.

[9] H. Wong, M.S. de Queiroz, and V. Kapila, "Adaptive tracking control using synthesized velocity from attitude measurements," *Automatica*, vol. 37, pp. 947-953, 2001.

[10] Quanser Inc., "SRV02 Exp1 Position Control.pdf," www.quanser.com, 2003.

[11] Quanser Inc., "SRV02 Exp7 Inverted Pendulum.pdf," www.quanser.com, 2003.

[12] V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis, "Static output feedback-a survey," *Automatica*, vol. 33, no. 2, pp. 125-137, 1997.

[13] Y.Y. Cao, J. Lam, and Y.X. Sun, "Static output feedback stabilization: an ILMI approach," *Automatica*, vol. 34, no. 12, pp. 1641-1645, 1998.

[14] J. Collado, R. Lozano, and I. Fantoni, "Control of convey-crane based on passivity," *Proc. of American Control Conference*, pp. 1260-1264, 2000.

저 자 소 개



손 영 익 (孫 瑛 翼)

1995년 서울대학교 전기공학과 졸업. 2002년 동 대학원 전기·컴퓨터공학부 졸업(공학). 2003년~현재 명지대학교 전기공학과 조교수.
Tel : 031-330-6358
E-mail : sonyi@mju.ac.kr



심 형 보 (沈 亨 輔)

1993년 서울대학교 전기공학과 졸업. 2000년 동 대학원 전기공학부 졸업(공학). 2003년~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 조교수.
Tel : 02-880-1745
E-mail : h.shim@ieec.org



조 남 훈 (趙 南 熏)

1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 2000년 서울대 대학원 전기공학부 졸업(공학). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수.
Tel : 02-820-0643
E-mail : nhjo@ee.ssu.ac.kr