

변수 불확실성을 가지는 특이시스템의 강인 비약성 H_∞ 출력궤환 제어

論 文

56-2-25

Robust Non-Fragile H_∞ Output Feedback Control for Descriptor Systems with Parameter Uncertainties

金 鍾 海[†]
(Jong-Hae Kim)

Abstract - In this paper, we consider the robust non-fragile H_∞ output feedback controller design method for uncertain descriptor systems with feedback and observer gain variations. The existence condition of observer-based robust and non-fragile H_∞ output feedback controller and the controller design method are presented on the basis of linear matrix inequality approach. The proposed robust non-fragile H_∞ output feedback controller guarantees asymptotic stability, non-fragility, H_∞ norm bound within a prescribed level in spite of disturbance, parameter uncertainty, and feedback/observer gain variations.

Key Words : Descriptor systems, non-fragile control, H_∞ control, parameter uncertainty, LMI

1. 서 론

표준 상태공간의 H_∞ 제어 문제가 수십 년 동안 상당한 관심을 가지고 연구되었다. H_∞ 제어이론이 비교적 잘 정립되어 왔지만, 대부분의 경우가 상태공간 시스템에 기초를 두었다. 최근에, 특이시스템(singular system)에 대한 상태공간 접근을 위한 H_∞ 제어이론의 관심분야중 하나는 특이시스템에 대한 확장문제이다. 상태공간 모델은 매우 유용하지만 다양한 시스템의 동특성을 표현하지는 못한다. 특히 임펄스나 히스테리시스 등의 회로 시스템에서의 물리적 현상은 상태공간 시스템을 가지고서는 표현의 한계를 가지고 있다[1-5]. 최근, 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계 시스템 등에서 상당한 관심을 끌고 있다. 따라서, 특이 형태는 선형 동역학 시스템의 자연스러운 표현이고, 또한 상태공간 방정식이 해석하는 것보다 많은 종류의 시스템에 대한 해석을 가능하게 한다. 하지만 대부분의 연구가 상태궤환 제어기 설계문제에 집중되어 있어서 특이시스템의 상태가 모두 관측가능하지 않을 경우에는 적용이 어렵다. 또한, 기존 연구결과의 제어기 설계방법이 비볼록성(non-convexity)을 가지므로 제어기의 해를 구하기가 쉽지 않았다. 따라서, 본 논문의 첫 번째 목적은 특이시스템에 대한 출력궤환 제어기 설계방법을 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 표현하는 것이다.

변수 불확실성에 대한 강인성과 주어진 성능지수를 최적화하도록 설계하는 궤환 제어기 설계문제는 제어기가 정확하게 구현되어야 한다는 가정이 있다. 그러나, 제어기 구현시에는 안전한 제어기 이득 여유도를 가지도록 요구하는 조건과 더불어 A/D 또는 D/A 컨버터, 마무리 오차(round-off error),

제한 워드 길이(finite word length) 등의 문제와 연관이 있다. 따라서, 제작하는 제어기는 제어기의 이득변수에서 발생하는 불확실성에도 잘 견딜 수 있도록 설계하여야 한다. 제어기의 약성(fragility)은 기본적으로 제어기를 구현할 때 시스템의 부정확성으로 인하여 궤환시스템의 성능저하를 유발하므로 최근 중요한 문제로 고려되고 있다. 또한, 정확한 제어기의 구현이 가능하다 하더라도 현장에서는 제어기의 이득 조정(gain tuning)이 필요하므로 제어기의 비약성에 대한 연구[6-10]가 이루어지고 있다. 하지만, 특이시스템의 강인 비약성 H_∞ 출력궤환 제어문제를 다루는 논문은 없는 실정이다. 따라서, 본 논문의 또 하나의 목적은 변수 불확실성과 제어기의 약성에도 불구하고 안정성과 성능지수의 최소화를 만족하는 출력궤환 제어기 설계이다.

본 논문에서는 시스템 행렬에 변수 불확실성을 가지는 특이시스템과 설계하고자 하는 궤환이득과 관측이득에 약성을 가지는 관측기 기반의 출력궤환 제어기에 대하여 점근적 안정성과 주어진 H_∞ 노음 성능지수를 만족하도록 하는 강인 비약성 H_∞ 출력궤환 제어기를 설계한다. 제어기가 존재할 조건과 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 표현한다. 마지막으로 간단한 수치예제를 통하여 제어기 설계방법을 설명한다.

2. 문제설정

시변 변수 불확실성(time-varying parameter uncertainty)을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (B_1 + \Delta B_1(t))u(t) + B_2w(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \\ y(t) &= (C_2 + \Delta C_2(t))x(t) + D_2w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

을 다룬다. 여기서, $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $z(t) \in R^l$ 는 제어할 출력변수, $y(t) \in R^q$ 는 측정 출력변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력

* 正 會 員 : 鮮文大學校 電子工學部 助教授 · 工博

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr

接受日字 : 2006年 9月 3日

最終完了 : 2006年 11月 7日

변수, $w(t) \in R^p$ 는 외란 입력변수, E 는 $\text{rank}(E) = r \leq n$ 을 만족하는 특이행렬, $\Delta A(t)$ 와 $\Delta B_1(t)$ 및 $\Delta C(t)$ 는 시스템 모델에서 실수 행렬함수(real valued matrix function)의 형태인 시변 변수 불확실성이고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원(dimensions)을 가진다. 변수 불확실성은 정합조건(matching condition) 형태의 노움(norm)의 유계(bound)를 가지는

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= N_a F_a(t) H_a, F_a(t)^T F_a(t) \leq I \\ \Delta B_1(t) &= N_b F_b(t) H_b, F_b(t)^T F_b(t) \leq I \\ \Delta C_1(t) &= N_c F_c(t) H_c, F_c(t)^T F_c(t) \leq I \end{aligned} \quad (2)$$

를 만족하고, $N_a, N_b, N_c, H_a, H_b, H_c$ 는 알고 있는 상수 행렬이고, $F_a(t), F_b(t), F_c(t)$ 는 식 (2)를 만족하는 모르는 행렬이다. 비록 설계할 관측기 기반의 출력회환 제어기의 형태가

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_1 u(t) + L(y(t) - C_2 \hat{x}(t)) \\ u(t) &= K\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

과 같을지라도 구현하는 제어기의 케환이득과 관측기 이득에 변수 불확실성을 가지는

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_1 u(t) + (L + \Delta L(t))(y(t) - C_2 \hat{x}(t)) \\ u(t) &= (K + \Delta K(t))\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

의 형태라고 가정한다. 여기서, $\hat{x}(t)$ 는 관측 상태변수, K 는 적절한 차원을 가지는 케환이득 행렬, L 은 적절한 차원을 가지는 관측이득 행렬이다. $\Delta K(t)$ 와 $\Delta L(t)$ 는

$$\begin{aligned} \Delta K(t) &= N_1 F_1(t) H_1 \\ \Delta L(t) &= N_2 F_2(t) H_2 \end{aligned} \quad (5)$$

를 만족하는 약성(fragility)을 포함하는 이득 변수 불확실성 행렬이다. 여기서, N_i 와 H_i ($i=1,2$)는 알고 있는 행렬이고 $F_i(t)$ ($i=1,2$)는 $F_i(t)^T F_i(t) \leq I, F_b(t) F_1(t) \leq I, F_2(t) F_c(t) \leq I$ 를 만족하는 모르는 행렬이다. 오차상태를 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 로 잡으면, 오차 방정식(error equation)은

$$\begin{aligned} \dot{E}e(t) &= [A - \Delta B_1(t)(K + \Delta K(t)) - (L + \Delta L(t))C_2]e(t) \\ &+ [\Delta A(t) + \Delta B_1(t)(K + \Delta K(t)) - (L + \Delta L(t))\Delta C_2(t)]x(t) \\ &+ [B_2 - (L + \Delta L(t))D_2]w(t) \end{aligned} \quad (6)$$

이고, 페루프시스템의 상태방정식은

$$\begin{aligned} \dot{E}\hat{x}(t) &= [A + \Delta A(t) + (B_1 + \Delta B_1(t))(K + \Delta K(t))]x(t) \\ &- (B_1 + \Delta B_1(t))(K + \Delta K(t))e(t) + B_2 w(t) \end{aligned} \quad (7)$$

이다. 그리고, 제어할 출력은

$$z(t) = [C_1 + D_1(K + \Delta K(t))]x(t) - D_1(K + \Delta K(t))e(t) \quad (8)$$

이다. 그리고 H_∞ 성능지수는

$$\int_0^\infty [z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)] dt \quad (9)$$

이다. 따라서, 제어기를 설계하는 목적은 특이시스템의 변수 불확실성과 제어기의 이득 변동에도 불구하고 불확실성 페루프 특이시스템이 H_∞ 성능지수를 최소화하고 제어기의 약성에도 점근적 안정성을 만족하는 것이다. 여기서, 특이시스템의 몇 가지 성질을 소개한다.

정의 1[2]: $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 의 시스템에 대한 특이시스템의 성질을 정의한다.

- i) $\det(sE - A) \neq 0$ 이면 $(sE - A)$ 는 정규적(regular)이다.
- ii) 특이시스템이 임펄스프라이기 위한 필요충분조건은 $\text{rank}(E) = \deg[\det(sE - A)]$ 를 만족하는 것이다.
- iii) 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면(극점이 s -평면에 좌반부에 존재) 시스템은 점근적으로 안정하다.

3. 강인 비약성 H_∞ 제어기 설계

본 절에서는 변수 불확실성과 제어기의 이득 변동을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반의 강인 비약성 H_∞ 출력회환 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법에 대한 알고리즘을 제시한다.

정리 1: 불확실성 페루프 특이시스템 (6)과 (7)에 대하여, 행렬부등식

$$E^T P_c = P_c^T E \geq 0 \quad (10)$$

$$E^T P_o = P_o^T E \geq 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 - (C_1 + D_1 K)^T D_1 K - P_c^T B_1 K & P_c^T B_2 \\ * & \Gamma_2 \\ * & * & -\gamma^2 I + D_2^T H_2^T H_2 D_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_c, P_o , 관측이득 L 과 케환이득 K 가 존재하면 식 (3)의 제어기는 제어기의 이득 변동과 특이시스템의 변수 불확실성에도 불구하고 불확실성 특이시스템 (1)을 점근적으로 안정화하고 H_∞ 노움의 유계 γ 를 만족하는 강인 비약성 H_∞ 출력회환 제어기이다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= A^T P_c + P_c^T A + K^T B_1^T P_c + P_c^T B_1 K + (C_1 + D_1 K)^T (C_1 + D_1 K) \\ &+ 2(1 + \alpha + \beta) H_1^T H_1 + 2H_a^T H_a + 3P_c^T B_1 N_1 N_1^T B_1^T P_c + P_c^T N_a N_a^T P_c \\ &+ (1 + \beta) P_c^T N_b N_b^T P_c + 2K^T H_b^T H_b K + (1 + \rho) H_c^T H_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= A^T P_o + P_o^T A - C_2^T L^T P_o - P_o^T L C_2 + (1 + 2\alpha) H_1^T H_1 \\ &+ K^T D_1^T D_1 K + (2 + \rho) P_o^T N_2 N_2^T P_o + C_2^T H_2^T H_2 C_2 + P_o^T N_a N_a^T P_o \\ &+ 2(1 + \beta) P_o^T N_b N_b^T P_o + K^T H_b^T H_b K + P_o^T L N_c N_c^T L^T P_o \end{aligned}$$

$$\alpha = \|N_1^T D_1^T D_1 N_1\|, \quad \beta = \|H_b N_1\|, \quad \rho = \|H_2 N_c\|$$

으로 정의한다.

증명: 페루프 시스템 (6)과 (7)의 점근적 안정성을 위하여, (10)과 (11)을 만족하는 적절한 리아푸노프(Lyapunov) 함수

$$V(x(t)) = x(t)^T E^T P_c x(t) + e(t)^T E^T P_o e(t) \quad (13)$$

을 잡고, 식 (13)의 시간에 대한 미분을 구하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T E^T P_c x(t) + x(t)^T P_c^T E \dot{x}(t) \\ &\quad + \dot{e}(t)^T E^T P_o e(t) + e(t)^T P_o^T E \dot{e}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

와 같다. 리아푸노프 함수 (13)과 H_∞ 성능지수 (9)로부터 페루프시스템의 점근적 안정성과 H_∞ 노음 유계를 만족하기 위하여

$$\dot{V}(x(t)) \leq -z(t)^T z(t) + \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (15)$$

와 같은 관계를 갖는다. 식 (15)는

$$\begin{aligned} x(t)^T \Delta K(t)^T D_1^T D_1 \Delta K(t) x(t) &\leq \alpha x(t)^T H_1^T H_1 x(t) \\ -2x(t)^T \Delta K(t)^T D_1^T D_1 \Delta K(t) e(t) &\leq 2\alpha x(t)^T H_1^T H_1 e(t) \\ &\leq \alpha x(t)^T H_1^T H_1 x(t) + \alpha e(t)^T H_1^T H_1 e(t) \\ e(t)^T \Delta K(t)^T D_1^T D_1 \Delta K(t) e(t) &\leq \alpha e(t)^T H_1^T H_1 e(t) \\ 2x(t)^T \Delta K(t)^T B_1^T P_c x(t) &\leq x(t)^T H_1^T H_1 x(t) + x(t)^T P_c^T B_1 N_1 N_1^T B_1^T P_c x(t) \\ 2x(t)^T \Delta A(t)^T P_c x(t) &\leq x(t)^T H_a^T H_a x(t) + x(t)^T P_c^T N_a N_a^T P_c x(t) \\ -2x(t)^T P_c^T B_1 \Delta K(t) e(t) &\leq x(t)^T P_c^T B_1 N_1 N_1^T B_1^T P_c x(t) + e(t)^T H_1^T H_1 e(t) \\ -2e(t)^T P_o^T \Delta L(t) C_2 e(t) &\leq e(t)^T P_o^T N_2 N_2^T P_o e(t) + e(t)^T C_2^T H_2^T H_2 C_2 e(t) \\ 2x(t)^T \Delta A(t) P_o e(t) &\leq x(t)^T H_a^T H_a x(t) + e(t)^T C_2^T H_2^T H_2 C_2 e(t) \\ -2e(t)^T P_o^T \Delta L(t) D_2 w(t) &\leq e(t)^T P_o^T N_2 N_2^T P_o e(t) + w(t)^T D_2^T H_2^T H_2 D_2 w(t) \\ 2x(t)^T P_c^T B_1 \Delta K(t) x(t) &\leq x(t)^T P_c^T B_1 N_1 N_1^T B_1^T P_c x(t) + x(t)^T H_1^T H_1 x(t) \\ 2x(t)^T P_c^T \Delta B_1(t) K x(t) &\leq x(t)^T P_c^T N_b N_b^T P_c x(t) + x(t)^T K^T H_b^T H_b K x(t) \\ 2x(t)^T P_c^T \Delta B_1(t) \Delta K(t) x(t) &\leq \beta x(t)^T P_c^T N_b N_b^T P_c x(t) + \beta x(t)^T H_1^T H_1 x(t) \\ -2e(t)^T P_o^T \Delta B_1 K e(t) &\leq e(t)^T P_o^T N_b N_b^T P_o e(t) + e(t)^T K^T H_b^T H_b K e(t) \\ -2e(t)^T P_o^T \Delta B_1(t) \Delta K(t) e(t) &\leq \beta e(t)^T P_o^T N_b N_b^T P_o e(t) + \beta e(t)^T H_1^T H_1 e(t) \\ 2e(t)^T P_o^T \Delta B_1(t) K x(t) &\leq e(t)^T P_o^T N_b N_b^T P_o e(t) + x(t)^T K^T H_b^T H_b K x(t) \\ 2e(t)^T P_o^T \Delta B_1(t) K x(t) &\leq e(t)^T P_o^T N_b N_b^T P_o e(t) + x(t)^T K^T H_b^T H_b K x(t) \\ -2e(t)^T P_o^T L \Delta C_2(t) x(t) &\leq e(t)^T P_o^T L N_c N_c^T L^T P_o e(t) + x(t)^T H_c^T H_c x(t) \\ -2e(t)^T P_o^T \Delta L(t) \Delta C_2(t) x(t) &\leq \rho e(t)^T P_o^T N_2 N_2^T P_o e(t) + \rho x(t)^T H_c^T H_c x(t) \end{aligned}$$

와 같은 전개를 이용하면

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 - (C_1 + D_1 K)^T D_1 K - P_c^T B_1 K & P_c^T B_2 \\ * & \Gamma_2 \\ * & * & -\gamma^2 I + D_2^T H_2^T H_2 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

으로 변형된다. 따라서, 식 (12)의 조건을 얻는다. ■

정리 1은 변수의 측면에서 비선형성을 포함하는 요소가 존재하므로 구하고자 하는 변수의 볼록최적화가 불가능하고 식 (10)과 (11)에서는 등호를 포함하고 있으므로 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, 정리 2에서는 적절한 수식전개를 통하여 등호를 제거하여 구하고자 하는 변수의 견지에서 선형행렬부등식의 제여기가 존재할 조건과 관측기 기반의 강인 비약성 H_∞ 출력제한 제여기가 설계방법을 제안한다

정리 2: 시변 불확실성 특이시스템 (1)에 대하여, 다음의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & 0 & \Sigma_7 & \Pi_1 & 0 \\ * & \Sigma_3 & 0 & 0 & P_3^T B_{22} & \Pi_2 & 0 \\ * & * & \Sigma_4 & \Sigma_5 & \Sigma_8 & 0 & \Pi_3 \\ * & * & * & \Sigma_6 & \Sigma_9 & 0 & \Pi_4 \\ * & * & * & * & \Sigma_{10} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \\ * & * & * & * & * & * & -J \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matrices) P_1 과 P_4 , 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_3 와 P_6 및 적절한 차원을 가지는 행렬 P_2 , P_5 , M_1 , M_2 가 존재하면, H_∞ 노음의 유계 γ , 정규성, 임펄스 프리 및 점근적 안정성을 만족하는 강인 비약성 H_∞ 출력제한 제여기 (3)의 제한이득과 관측이득은

$$\begin{aligned} K &= -(D_1^T D_1)^{-1} (B_1^T P_c + D_1^T C_1) \\ L &= (P_o^T)^{-1} M \end{aligned} \quad (18)$$

로 표현된다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= [\Sigma_{11} \ \Sigma_{12} \ \Sigma_{13} \ \Sigma_{14}] \\ \Pi_2 &= [\sqrt{3} P_3^T B_{12} N_1 \ P_3^T N_{a2} \ \sqrt{1+\beta} P_3^T N_{b2} \ \Sigma_{15}] \\ \Pi_3 &= [\Sigma_{16} \ \Sigma_{17} \ \Sigma_{18} \ \Sigma_{19} \ \Sigma_{20} \ M_1 N_c] \\ \Pi_4 &= [\sqrt{2+\rho} P_6^T N_{22} \ P_6^T N_{a2} \ \sqrt{2(1+\beta)} P_6^T N_{b2} \ \Sigma_{21} \ \Sigma_{22} \ M_2 N_c] \\ \Sigma_1 &= A_1^T P_1 + P_1^T A_1 + C_{11}^T C_{11} + 2(1+\alpha+\beta) H_{11}^T H_{11} \\ &\quad + 2H_{a1}^T H_{a1} + (1+\rho) H_{c1}^T H_{c1} \\ \Sigma_2 &= P_2^T A_4 + C_{11}^T C_{12} + 2(1+\alpha+\beta) H_{11}^T H_{12} \\ &\quad + 2H_{a1}^T H_{a2} + (1+\rho) H_{c1}^T H_{c2} \\ \Sigma_3 &= A_4^T P_3 + P_3^T A_4 + C_{12}^T C_{12} + 2(1+\alpha+\beta) H_{12}^T H_{12} \\ &\quad + 2H_{a2}^T H_{a2} + (1+\rho) H_{c2}^T H_{c2} \\ \Sigma_4 &= A_1^T P_4 + P_4^T A_1 - M_1 C_{21} - C_{21}^T M_1^T + (1+2\alpha) H_{11}^T H_{11} \\ &\quad + C_{21}^T H_2^T H_2 C_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_5 &= P_5^T A_4 - M_1 C_{22} - C_{21}^T M_2^T + (1+2\alpha+\beta) H_{11}^T H_{12} \\ &\quad + C_{21}^T H_2^T H_2 C_{22} \\ \Sigma_6 &= A_4^T P_6 + P_6^T A_4 - M_2 C_{22} - C_{22}^T M_2^T + (1+2\alpha+\beta) H_{12}^T H_{12} \\ &\quad + C_{22}^T H_2^T H_2 C_{22} \\ \Sigma_7 &= P_1^T B_{21} + P_2^T B_{22} \\ \Sigma_8 &= P_4^T B_{21} + P_5^T B_{22} - M_1 D_2 \\ \Sigma_9 &= P_6^T B_{22} - M_2 D_2 \\ \Sigma_{10} &= -\gamma^2 I + D_2^T H_2^T H_2 D_2 \\ \Sigma_{11} &= \sqrt{3} (P_1^T B_{11} N_1 + P_2^T B_{12} N_1) \\ \Sigma_{12} &= P_1^T N_{a1} + P_2^T N_{a2} \\ \Sigma_{13} &= \sqrt{1+\beta} (P_1^T N_{b1} + P_2^T N_{b2}) \\ \Sigma_{14} &= -\sqrt{2} (D_1^T D_1)^{-1} (B_{11}^T P_1 + B_{12}^T P_2 + D_1^T C_{11}) H_b^T \\ \Sigma_{15} &= -\sqrt{2} (D_1^T D_1)^{-1} (B_{12}^T P_3 + D_1^T C_{12}) H_b^T \\ \Sigma_{16} &= \sqrt{2+\rho} (P_4^T N_{21} + P_5^T N_{22}) \\ \Sigma_{17} &= P_4^T N_{a1} + P_5^T N_{a2} \\ \Sigma_{18} &= \sqrt{2(1+\beta)} (P_4^T N_{b1} + P_5^T N_{b2}) \\ \Sigma_{19} &= -(D_1^T D_1)^{-1} (B_{11}^T P_1 + B_{12}^T P_2 + D_1^T C_{11}) D_1^T \\ \Sigma_{20} &= -(D_1^T D_1)^{-1} (B_{11}^T P_1 + B_{12}^T P_2 + D_1^T C_{11}) H_b^T \\ \Sigma_{21} &= -(D_1^T D_1)^{-1} (B_{12}^T P_3 + D_1^T C_{12}) D_1^T \\ \Sigma_{22} &= -(D_1^T D_1)^{-1} (B_{12}^T P_3 + D_1^T C_{12}) H_b^T \end{aligned}$$

으로 정의한다.

증명: 식 (12)의 행렬부등식은 슈어 여수정리와 식 (18)을 이용하여

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & P_c^T B_2 & \sqrt{3} P_c^T B_1 N_1 & P_c^T N_a & \sqrt{1+\beta} P_c^T N_b \\ * \Psi_2 & P_o^T B_2 - MD_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * * & -\gamma^2 I + D_2^T H_2^T H_2 D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * * & * & * & * & -I & 0 \\ * * & * & * & * & * & * \\ * * & * & * & * & * & * \\ * * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} P_o^T N_2 & P_o^T N_a & \sqrt{2(1+\beta)} P_o^T N_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

로 변형할 수 있다. 여기서, 변수는

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A^T P_c + P_c^T A + C_1^T C_1 - K^T D_1^T D_1 K + 2(1+\alpha+\beta) H_1^T H_1 \\ &\quad + 2H_a^T H_a + (1+\rho) H_c^T H_c + 2K^T H_b^T H_b K \\ \Psi_2 &= A^T P_o + P_o^T A - C_2^T M^T - M C_2 + K_1^T D_1^T D_1 K + (1+2\alpha+\beta) H_1^T H_1 \\ &\quad + C_2^T H_2^T H_2 C_2 + K^T D_1^T D_1 K + K^T H_b^T H_b K + M N_c^T N_c M^T \end{aligned}$$

와 같다. 식 (19)가 음의 정부호 행렬(negative-definite matrix)이 되기 위해서는

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & P_c^T B_2 & A_3 & 0 \\ * & A_2 & P_o^T B_2 - MD_2 & 0 & A_4 \\ * & * & -\gamma^2 I + D_2^T H_2^T H_2 D_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

이 음의 정부호 행렬이 되어야 한다. 여기서, 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A_1 &= A^T P_c + P_c^T A + C_1^T C_1 + 2(1+\alpha+\beta) H_1^T H_1 + 2H_a^T H_a \\ &\quad + (1+\rho) H_c^T H_c \\ A_2 &= A^T P_o + P_o^T A - C_2^T M^T - M C_2 + K_1^T D_1^T D_1 K + (1+2\alpha+\beta) H_1^T H_1 \\ &\quad + C_2^T H_2^T H_2 C_2 \\ A_3 &= [\sqrt{3} P_c^T B_1 N_1 \quad P_c^T N_a \quad \sqrt{1+\beta} P_c^T N_b \quad \sqrt{2} K^T H_b^T] \\ A_4 &= [\sqrt{2+\rho} P_o^T N_2 \quad P_o^T N_a \quad \sqrt{2(1+\beta)} P_o^T N_b \quad K^T D_1^T \quad K^T H_b^T \quad M N_c]. \end{aligned}$$

식 (10)과 (11)의 등호를 없애고 구하려는 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식을 만들기 위하여 일반성을 상실함 없이 (without loss of generality)

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [C_{11} \quad C_{12}], \quad C_2 = [C_{21} \quad C_{22}], \quad D_1 = D_1, \quad D_2 = D_2, \\ N_1 &= N_1, \quad H_1 = [H_{11} \quad H_{12}], \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \end{bmatrix}, \quad H_2 = H_2, \\ N_a &= \begin{bmatrix} N_{a1} \\ N_{a2} \end{bmatrix}, \quad H_a = [H_{a1} \quad H_{a2}], \quad N_b = \begin{bmatrix} N_{b1} \\ N_{b2} \end{bmatrix}, \quad H_b = H_b, \quad N_c = N_c, \\ H_c &= [H_{c1} \quad H_{c2}] \end{aligned} \quad (21)$$

과 같은 특이치분해(singular value decomposition)[2]를 사용한다. 또한, 식 (10)과 (11)의 조건을 만족하기 위하여

$$P_c = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad P_o = \begin{bmatrix} P_4 & 0 \\ P_5 & P_6 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

와 같이 구하려는 해를 정의한다. 따라서, 식 (21)과 (22)를 식 (20)에 대입하면 식 (17)을 얻는다. ■

참조 1: $E=I$ 인 경우, 비특이시스템에 대한 강인 비약성 H_∞ 출력제한 제어기 설계 문제가 식 (20)의 선형행렬부등식으로부터 얻을 수 있다. 따라서, 제한한 강인 비약성 H_∞ 출력제한 제어기 설계 알고리즘은 특이시스템에 대한 문제 뿐만 아니라 상태공간 문제를 다루는 비특이시스템의 강인 비약성문제까지도 해결하는 일반적인 알고리즘이다.

예제 1: 제한한 알고리즘의 간단한 수치예제를 통하여 제어기 설계방법에 대하여 설명한다. 변수불확실성을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned}
 E\dot{x}(t) &= \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_a(t) [0.1 \ 0.1] \right\} x(t) \\
 &+ \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_b(t) 0.1 \right\} u(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} w(t) \\
 z(t) &= [0.2 \ 0.1] x(t) + u(t) \\
 y(t) &= \{ [0.5 \ 0.2] + F_c(t) [0.1 \ 0.1] \} x(t) + w(t)
 \end{aligned} \tag{23}$$

을 다룬다. $\gamma=1$ 로 잡고 제어기의 비약성 정도를 확인하기 위하여 케환이득과 관측기이득의 불확실성 변수를

$$N_1 = 1, N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = \lambda [1 \ 1], H_2 = \lambda \tag{24}$$

로 설정하면 상수 값인 λ 에 따르는 제어기 비약성을 쉽게 확인할 수 있다. 적절한 수식전개를 통하여 λ 의 최대값을 구하면 0.19로 구해진다. 값의 몇 가지 변화에 따른 해를 LMI 도구상자[11]를 이용하면 모든 해는 정리 2로부터

$$\begin{aligned}
 P_c &= \begin{bmatrix} 0.1135 & 0 \\ -0.2603 & -0.1945 \end{bmatrix}, \\
 P_o &= \begin{bmatrix} 0.1324 & 0 \\ -0.1741 & -0.1709 \end{bmatrix}, \\
 M &= \begin{bmatrix} -0.1037 \\ -0.0395 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{25}$$

과 같이 얻는다. 따라서, 컴퓨터 모의실험 결과 케환이득과 관측기이득이 19%까지 변화하여도 불확실성 페루프 특이시스템의 점근적 안정성과 H_∞ 성능지수의 유계($\gamma < 1$)를 만족한다는 것이다. 따라서, $\lambda=0.19$ 인 경우의 케환이득과 관측기이득은 식 (18)로부터

$$K = [-0.1666 \ 0.0945], L = \begin{bmatrix} 0.4963 \\ -0.1048 \end{bmatrix} \tag{26}$$

이다. 따라서, 강인 비약성 H_∞ 출력케환 제어기는 식 (3)으로부터

$$\begin{aligned}
 E\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2.5815 & 0.0898 \\ -0.1143 & 1.1155 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} -0.4963 \\ -0.1048 \end{bmatrix} y(t) \\
 u(t) &= [-0.1666 \ 0.0945] \hat{x}(t)
 \end{aligned} \tag{27}$$

과 같이 구성된다. 컴퓨터 모의실험을 위하여 불확실성을 가지는 값을

$$F_1(t) = F_2(t) = \sin t, F_a(t) = F_b(t) = F_c(t) = \cos t \tag{28}$$

으로 잡으면, 그림 1~4에서처럼 시간이 흘러감에 따라 상태와 측정오차가 영으로 수렴하기 때문에 구한 강인 비약성 H_∞ 출력케환 제어기는 외란 및 변수불확실성과 케환이득/관측기이득의 19%까지의 변화에도 불구하고 점근적 안정과 비약성을 보장함을 알 수 있다. 또한, 그림 5의 외란입력 $w(t)$ 와 그림 6의 제어할 출력 $z(t)$ 의 유도 노름(induced norm)의 관계로부터 H_∞ 노름 유계인 $\gamma < 1$ 을 만족한다. 따라서, 구한 제어기는 외란, 변수 불확실성 및 제어기의 약성에도 불구하고 특이시스템의 점근적 안정성과 H_∞ 노름 한계인 $\gamma < 1$ 을 만족한다.

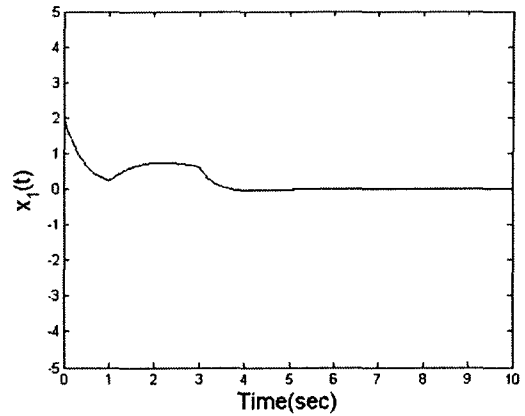


그림 1 상태 $x_1(t)$
Fig. 1 State $x_1(t)$

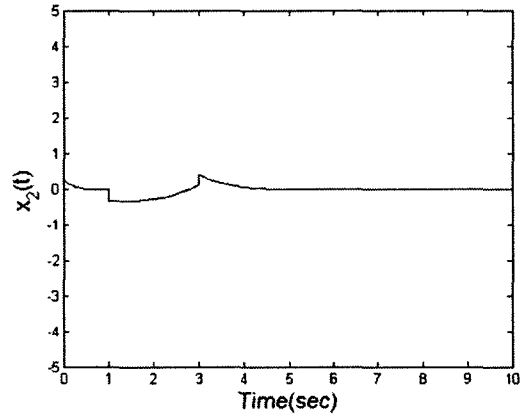


그림 2 상태 $x_2(t)$
Fig. 2 State $x_2(t)$

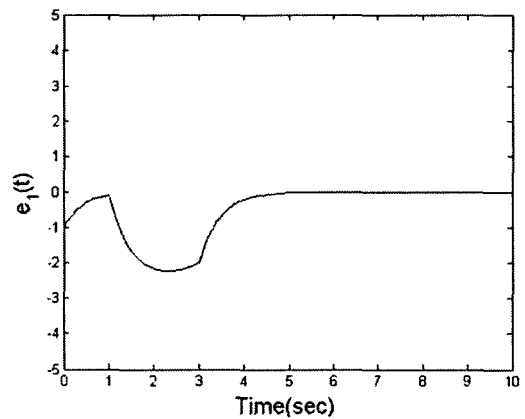


그림 3 오차상태 $e_1(t)$
Fig. 3 Error state $e_1(t)$

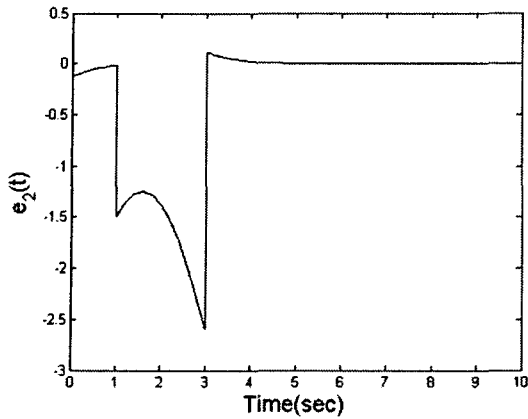


그림 4 오차상태 $e_2(t)$
Fig. 4 Error state $e_2(t)$

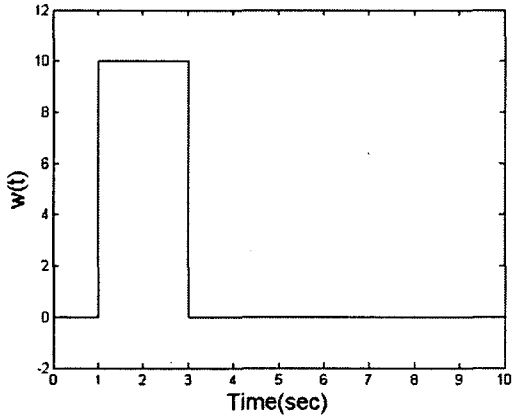


그림 5 외란 $w(t)$
Fig. 5 Disturbance $w(t)$

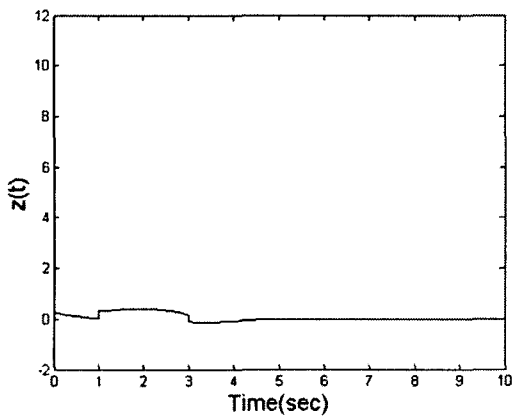


그림 6 제어할 출력 $z(t)$
Fig. 6 Controlled output $z(t)$

4. 결 론

본 논문에서는 정합조건을 가지는 변수 불확실성과 제어기의 이득 변동을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반의 강인 비약성 H_∞ 출력궤환 제어기 설계알고리즘을 제시한다. 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 선형행렬부등식 접근방법으로 표현한다. 제안한 제어기가 존재할 조건은 구하려는 변수의 측면에서 블록최적화의 형태이므로 한번에 모든 해를 구할 수 있다. 제안한 관측기 기반의 강인 비약성 H_∞ 출력궤환 제어기는 변수불확실성, 외란 입력, 궤환이득과 관측기 이득의 불확실성 변동에도 불구하고 점근적 안정성과 H_∞ 노음 유계를 만족한다.

참 고 문 헌

- [1] S. S. Hung and T. T. Lee, "Memoryless H_∞ controller for singular systems with delayed state and control," Journal of The Franklin Institute, vol. 336, pp. 911-923, 1999.
- [2] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, " H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities," Automatica, vol. 33, pp. 669-673, 1997.
- [3] A. Rehm and F. Allgöwer, " H_∞ control of descriptor systems with norm-bounded uncertainties in the system matrices," Proc. American Control Conference, pp. 3244-3248, 2000.
- [4] K. Takaba, N. Morihara, and T. Katayama, "A generalized Lyapunov theorem for descriptor system," System and Control Letters, vol. 24, pp. 49-51, 1995.
- [5] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," IEE Proc. Control Theory and Appl., vol. 145, pp.316-322, 1988.
- [6] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal," IEEE Trans. Automat. Control, vol. 42, pp. 1098-1105, 1997.
- [7] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Resilient dynamic controller design via quadratic Lyapunov bounds," Proc. Conf. on Decision and Control, pp. 2678-2683, 1997.
- [8] D. Famularo, C. T. Abdallah, A. Jadbabaie, and P. Dorato, "Robust non-fragile LQ controllers: The static feedback case," Proc. American Control Conference, pp. 1009-1113, 1998.
- [9] J. H. Kim, S. K. Lee, and H. B. Park, "Robust and non-fragile H_∞ control of parameter uncertain time-varying delay systems," SICE in Morioka, pp. 927-932, 1999.
- [10] P. Dorato, "Non-fragile controller design: An overview," Proc. American Control Conference, pp. 2829-2831, 1998.
- [11] P. Gahinet, A. Nemiroski, A. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox, The Mathworks Inc., 1995.

저 자 소 개



김 종 해 (金 鍾 海)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학부 조교수.

Tel : 041-530-2352

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr