

< 논문 >

부구조화 기법을 연동한 반복적인 동적 축소법 (I) - 비감쇠 구조 시스템 -

최동수[†] · 김현기^{*} · 조맹효^{**}

(2006년 8월 14일 접수, 2006년 12월 19일 심사완료)

Iterated Improved Reduced System (IIRS) Method Combined with Sub-Structuring Scheme (I)

- Undamped Structural Systems -

Dongsoo Choi, Hyungi Kim and Maenghyo Cho

Key Words : Iterated IRS Method(반복적인 동적 축소법), Sub-Structuring Scheme(부구조화 기법), Undamped Structural Systems(비감쇠 구조 시스템)

Abstract

This work presents an iterated improved reduced system (IIRS) procedure combined with sub-structuring scheme for large structures. Iterated IRS methods are usually more efficient than others because the dynamic condensation matrix is updated repeatedly until the desired convergent values are obtained. However, using these methods simply for large structures causes expensive computational cost and even makes analyses intractable because of the limited computer storage. Therefore, the application of sub-structuring scheme is necessary. Because the large structures are subdivided into several (or more) sub-domains, the construction of dynamic condensation matrix does not require much computation cost in every iteration. This makes the present method much more efficient to compute the eigenpairs both in lower and intermediate modes. In Part I, iterated IRS method combined with sub-structuring scheme for undamped structures is presented. The validation of the proposed method and the evaluation of computational efficiency are demonstrated through the numerical examples.

1. 서론

유한요소법을 이용한 대형 구조물의 동적 해석은 정확한 해석을 위해서 많은 수의 자유도를 포함하고 있다. 최근 컴퓨터의 비약적인 발전으로 슈퍼 컴퓨터를 이용하여 수백만 자유도 이상의 구조문제에 대한 동적 해석이 가능해졌다. 그러나 이 같은 대형 장비는 아직까지 일부 공학자들에게만 제한적으로 사용되고 있으며 고가의 해석비용이 소요되므로 보편적으로 사용할 수 없는 것이 현실이다.

따라서 모든 공학자들이 쉽게 사용하고 있는 단일 Workstation 이나 PC 환경, 즉 제한된 메모리와 속도를 가지고 정확하고 효율성 높은 동적 해석을 수행할 수 있다면 이는 최적구조 설계(structural optimization), 시스템 검증(system identification), 진동 해석 및 제어(vibration control) 등에 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

유한요소 해석에 있어 해석하고자 하는 구조물의 자유도수가 두 배로 커지게 되면 행렬구성에 있어 메모리는 그 비율의 제곱에, 역행렬 연산시간은 세제곱에 비례한다. 따라서 대형구조물의 해석에 있어 자유도수의 증가는 단일 Workstation 환경에서는 커다란 전산부담이 되지 않을 수 없다. 한편, 이것은 곧 역으로 생각하면 해석대상의 자유도수를 줄이게 되면 소요되는 전산비용을 현저하게 줄일 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 동기에 의해 개발된 방법이

† 책임저자, 서울대학교 기계항공공학부

* 현대중공업 기술개발본부

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : mhcho@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1693 FAX : (02)886-1693

바로 축소법(reduction method)이다. 이 방법은 90% 이상의 부자유도를 제거하여 10% 이하의 주자유도만을 가지는 축소된 시스템 행렬을 구축하는 방법이다.

축소법은 1965년 Guyan⁽¹⁾과 Iron⁽²⁾에 의해 처음으로 제안되었다. 이들이 사용한 방법은 정적 축소법(static condensation)으로 정적 해석에 있어서는 정확도가 보장되나 부자유도의 관성항(inertia term)을 무시하기 때문에 동적 해석에 있어서는 계산된 고유치와 고유벡터는 정확도가 다소 떨어져 신뢰하기 어려웠다.

1989년 O'Callahan⁽³⁾은 Guyan 방법에 사용한 변환행렬에 별도의 항(extra term)을 추가시킨 Improved Reduced System(IRS) 방법을 제안하였다. 그러나 여기서 사용한 별도의 항도 정적 축소 변환행렬에 추가되는 항으로 정적 해석에 있어 정확도를 증가시키는 개선된 정적 축소방법이었다.

1992년 Gordis⁽⁴⁾는 이항정리(binomial series)를 사용하여 고유치 항을 추가시킨 변환행렬을 구성하는 standard IRS 방법을 개발하였다. 이 방법은 동적 해석에 있어서도 매우 정확한 고유치와 고유벡터를 계산할 수 있다.

1995년 Friswell 등^(5,6)은 iterated IRS 방법을 제안하였다. 이 방법은 고유치가 원하는 정확도를 가질 때까지 동적 축소행렬을 반복 개선하는 방법으로 매우 정확한 고유치를 계산할 수 있는 효율적인 축소방법이다. 그 후 Suarez, Singh,⁽⁷⁾ Qu 그리고 Fu 등⁽⁸⁻¹¹⁾에 의해서 반복적 축소방법은 개선 및 확장되었다.

축소법은 부자유도를 변환행렬에 의해 제거하고 주자유도에 의한 축소행렬을 구축하는 방법이므로 전체 시스템에서 주자유도를 선정하는 것은 매우 중요한 일이다. 주자유도 선정방법은 다양하게 개발되어왔으나 그 중에서 Shah와 Raymund⁽¹²⁾가 제안한 순차적 소거법(sequential elimination method)이 가장 신뢰성 있게 사용되고 있다. 이 방법은 질량행렬과 강성행렬의 대각항의 비 (K_{ii}/M_{ii}) 값이 가장 큰 자유도부터 순차적으로 제거하는 방법으로 최종 선정 후 구축된 축소시스템은 매우 정확한 고유치를 계산할 수 있다. 그러나 제거되어야 할 부자유도의 수만큼 반복계산을 수행해야 하므로 주자유도 선정 시간이 많이 소요되어 공학적으로는 비효율적이다.

최근에는 Cho와 Kim이 요소단위의 에너지 평가를 통해 중요절점을 선정하는 방법을 제안하였다.⁽¹³⁾ 그리고 이 방법을 사용하여 2단계 축소기법(two-level condensation scheme)을 개발하였다.⁽¹⁴⁾ 이 기법은 주자유도 선정을 위해서 첫 번째 단계에서는 Rayleigh quotient에 의한 요소단위의 에너지 평가를 수행하여 후보영역을 선정하고 두 번째 단계에서는 선정된

후보영역에서 원하는 개수만큼의 주자유도를 순차적 소거법을 적용시켜 선정하는 방법으로 기존의 순차적 소거법과 비교하여 주자유도 선정시간을 대폭 절약할 수 있으면서 신뢰도 높은 고유치를 계산할 수 있으므로 매우 효율적인 방법이다.

그러나, 이와 같은 다양한 축소방법이 비록 많은 수의 자유도를 포함하고 있는 구조물에 대하여 효율적인 축소행렬을 구성한다 하더라도 수십만 이상의 자유도 수를 갖는 대형 구조문제에 대해서 적용하는 것은 전산효율 면에서 매우 비효율적이고 심지어 해석자체가 불가능하게 된다. 따라서, 이를 가능케 하기 위해서는 전체시스템을 하나의 단위로 간주하는 것보다 여러 개의 부 영역으로 분리하여 부 영역별로 축소시스템을 구축하는 부구조화 기법(sub-structuring scheme)을 적용시켜야 한다.

Kim과 Cho^(15,16)는 부구조화 기법을 2단계 축소법에 연동시켜 대형구조물에 대한 동적 해석을 수행하였다. 그러나 이 방법은 주자유도 선정을 위해서 각 부 영역별로 요소단위의 에너지 평가 및 후보영역에 대한 순차적 소거법 적용의 단계를 거쳐야 하므로 어느 정도의 주자유도 선정시간 소모를 감안해야 하고, 구조 감쇠(structural damping)와 같은 비비례 감쇠 시스템(nonclassically damped system)에는 적용할 수 없는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 주자유도 선정시간이 소요되지 않고도 반복을 통하여 매우 정확한 고유치를 계산할 수 있는 반복적인 동적 축소방법(iterated IRS method)을 부구조화 기법에 적용시켜 비감쇠 및 감쇠 구조시스템 모두에 적용 가능한 축소 시스템을 구축하는 알고리즘을 개발한다.

본 연구의 Part I에서는 비감쇠 구조 시스템에 대하여 IIRS 방법에 의한 축소시스템을 구축하여 그 효율성을 검증하고 다음으로 부구조화 기법을 연동시키는 알고리즘을 도입한다. 또한, 다양한 수치 예제를 통하여 고유치 해석의 정확도와 그 수렴성을 확인한다.

2. Iterated IRS 방법

2.1 정식화

n-자유도 비감쇠 시스템의 동적 방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{X}(t) + KX(t) = f(t) \quad (1)$$

식 (1)을 주자유도와 부자유도 행렬로 분리하면,

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_m(t) \\ \ddot{X}_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m(t) \\ X_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m(t) \\ f_s(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

부자유도를 제거하기 위하여 식 (2)의 두 번째 행을 전개하면,

$$M_{sm} \ddot{X}_m(t) + M_{ss} \ddot{X}_s(t) + K_{sm} X_m(t) + K_{ss} X_s(t) = f_s(t) \quad (3)$$

식 (3)에서 하중 항을 무시하고 부자유도 변위장에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$X_s(t) = -K_{ss}^{-1} (M_{sm} \ddot{X}_m(t) + M_{ss} \ddot{X}_s(t) + K_{sm} X_m(t)) \quad (4)$$

또한 동적 축소 방정식의 정의는 다음과 같으며,

$$X_s(t) = T_D X_m(t), \quad T_D \in R^{s \times m} \quad (5)$$

식 (5)를 두 번 미분하면,

$$\ddot{X}_s(t) = T_D \ddot{X}_m(t) \quad (6)$$

축소 시스템은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M_R \ddot{X}_m(t) + K_R X_m(t) = 0, \quad \ddot{X}_m(t) = -M_R^{-1} K_R X_m(t) \quad (7)$$

식 (5), (6), (7)를 식 (4)에 대입하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$T_D = K_{ss}^{-1} [(M_{sm} + M_{ss} T_D) M_R^{-1} K_R - K_{sm}] \quad (8)$$

식 (8)을 반복적인 형태로 표현하면 다음과 같으며,

$$T_D^{(i)} = K_{ss}^{-1} [(M_{sm} + M_{ss} T_D^{(i-1)}) M_R^{(i-1)-1} K_R^{(i-1)} - K_{sm}], \quad (i=1, 2, \dots) \quad (9)$$

식 (9)에서 초기 변환행렬이 $T_D^{(0)} = -K_{ss}^{-1} K_{sm}$ 이면 Guyan 에 의한 변환행렬이 되며, 이를 식 (9)에 대입하면 두 번째 이후부터는 다음과 같이 Friswell⁽⁶⁾의 IIRS 에 의한 변환 행렬식이 된다.

$$T_D = K_{ss}^{-1} [(M_{sm} - M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sm}) M_R^{-1} K_R - K_{sm}] \quad (10)$$

식 (10)을 사용한 최종의 축소시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_R &= K_{mm} + T_D^T K_{sm} + K_{ms} T_D + T_D^T K_{ss} T_D \\ M_R &= M_{mm} + T_D^T M_{sm} + M_{ms} T_D + T_D^T M_{ss} T_D \end{aligned} \quad (11)$$

2.2 IIRS 절차

비감쇠 구조시스템에 대한 IIRS 절차를 살펴보면, 먼저 Guyan 에 의한 변환행렬, 축소된 강성행렬과 질량행렬을 구성한 다음 고유치를 계산하고, 이들 행렬을 이용하여 IRS 에 의한 변환행렬을 구성한다. 이 변환행렬을 이용하여 최종적으로 축소된 강성행렬과 질량행렬을 구성한다. 고유치를 계산하여 이전 단계에서 계산한 고유치와 비교하고 계산된 고유치가 허용 오차 범위 내에 있지 않게 되면 IRS 에 의한 변환행렬, 강성행렬과 질량행렬을 다시 Guyan 의 변환행렬, 강성행렬과 질량행렬로 초기화하여 고유치의 허용오차 범위 이내에 들어올 때까지 반복 계산한다.

Fig. 1 은 IIRS 절차에 대한 순서도를 나타낸 것이다. 여기서 A, B, C, D, E, F 는 주자유도 와 부자유도로 분리한 행렬을 나타내고, T, K, M 은 변환행렬, 축소된 강성행렬과 질량행렬을 나타내며, α 는 축소시스템에서 계산된 고유치를 나타낸다.

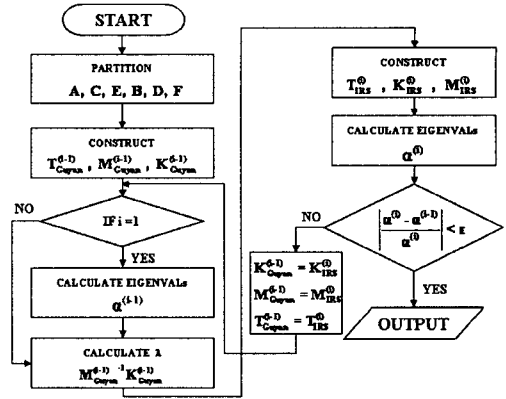


Fig. 1 Flowchart of the IIRS procedure

2.3 수치예제

수치예제를 통하여 IIRS 방법에 대한 신뢰성을 검증한다. 축소시스템은 전체시스템의 약 10% 이내로 구성했으며 축소된 시스템에서 계산된 고유치의 검증을 위하여 다음과 같은 상대오차의 계산식을 도입하였다. 여기서 α_{exact} 는 전체 시스템에서 계산된 고유치이며 α_{approx} 는 축소된 시스템에서 계산된 고유치이다.

$$relative\ error : \epsilon_\alpha = \frac{|\alpha_{approx} - \alpha_{exact}|}{\alpha_{exact}} \times 100$$

2.3.1 원통형 패널

양단이 고정되어 있는 원통형 패널을 고려한다. Aminpour 의 4 절점 쉘 요소를 사용하였고 기하학적인 형상은 Fig. 2 에 주어져 있다. 원통형 패널의 해석에 사용된 유한요소의 총 자유도 수는 1,482 이다.

이 예제에서는 주자유도 선정이 축소된 시스템의 고유치 계산에 끼치는 영향을 살펴보기 위하여 Fig. 2(a)와 같이 주자유도를 비교적 고르게 분포시킨 경우와 Fig. 2(b)와 같이 주자유도를 가운데에 집중시킨 경우에 대하여 축소시스템을 구성하였다. 두 경우 모두 임의로 선정한 주자유도이며 선정된 주자유도의 개수는 60 으로 전체 시스템 총 자유도의 4.0 %에 해당한다.

Table 1 은 (a)의 경우에 대한 축소된 시스템의 고유치 해석결과이며, Table 2 는 (b)의 경우에 대한 축소된 시스템의 고유치 해석결과이다. (a), (b) 모두 반복을 통하여 전체 시스템의 고유치로 잘 수렴하는 것을 볼 수 있다. Fig. 3 은 전체 시스템에 대한 축소 시스템의 상대오차를 나타낸 것이다. (a), (b) 모두 초기의 축소행렬에 대한 고유치는 상대오차가 크게 나타나고 있으나 반복을 통하여 10 차 모드까지 0.02%

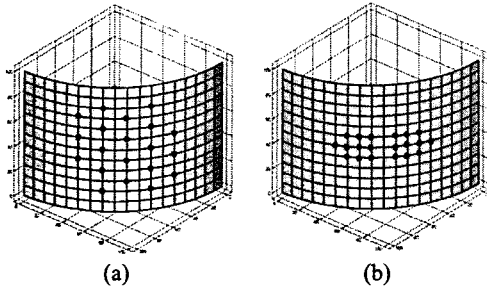


Fig. 2 Arbitrary selection of master DOFs of cylindrical panel ($E=0.3\text{MPa}$, $\nu=0.3$, $\rho=0.01\text{ kg/m}^3$)

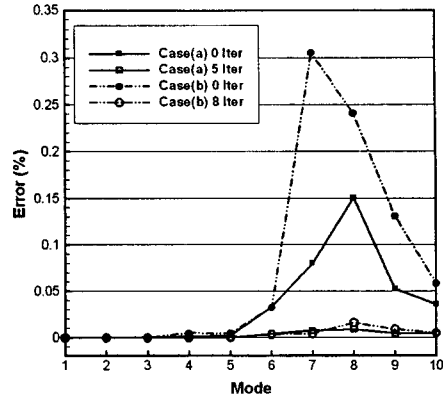


Fig. 3 Relative errors in eigenvalue

Table 1 First ten eigenvalues of the cylindrical panel : case (a)

Iteration	Modes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	14.0101	51.1396	61.9770	139.0320	168.3685	364.6308	396.3232	592.3773	622.7541	639.9992
1				139.0309	168.3652	364.5403	396.0628	591.6292	622.5075	639.8268
2				139.0308	168.3651	364.5345	396.0493	591.5788	622.4825	639.8138
3				139.0307	168.3650	364.5310	396.0425	591.5595	622.4692	639.8069
4				139.0307	168.3650	364.5283	396.0378	591.5481	622.4603	639.8020
5				139.0307	168.3650	364.5263	396.0342	591.5400	622.4540	639.7982
exact	14.0101	51.1396	61.9770	139.0306	168.3648	364.5125	396.0054	591.4866	622.4271	639.7694

Table 2 First ten eigenvalues of the cylindrical panel : case (b)

Iteration	Modes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	14.0101	51.1396	61.9771	139.0372	168.3727	364.6308	397.2139	592.9110	623.2423	640.1436
1			61.9770	139.0312	168.3660	364.5366	396.1272	591.7425	622.5574	639.8341
2				139.0309	168.3658	364.5328	396.0583	591.6696	622.5313	639.8225
3				139.0308	168.3656	364.5305	396.0409	591.6401	622.5173	639.8159
4				139.0308	168.3655	364.5288	396.0330	591.6223	622.5070	639.8113
5				139.0308	168.3655	364.5275	396.0285	591.6092	622.4990	639.8079
6				139.0308	168.3654	364.5263	396.0255	591.5986	622.4925	639.8052
7				139.0308	168.3653	364.5254	396.0235	591.5897	622.4871	639.8029
8				139.0307	168.3653	364.5245	396.0220	591.5820	622.4824	639.8011
exact	14.0101	51.1396	61.9770	139.0306	168.3648	364.5125	396.0054	591.4866	622.4271	639.7694

이내의 상대오차를 가지는 매우 정확한 고유치를 계산할 수 있다. 특히, (b)의 경우와 같이 임의로 집중시켜 선정한 주자유도에 의한 축소 시스템에 대해서도 세 번의 추가적인 반복으로 (a)의 경우와 동일한 오차범위를 갖는 고유치가 계산되었다.

2.3.2 원뿔 구조물

Fig. 4는 Aminpour의 4절점 셀 요소로 이루어진 하부가 고정되어 있는 원뿔 구조물로 총 자유도 수는 2,448개이다. 이 예제에서는 반복적인 동적 축소법의 효율성을 검증하기 위하여 2단계 축소법(TLCS : Two Level Condensation Scheme)⁽¹⁴⁾과 비교하였다. Fig. 4(a)는 2단계 축소법에 의하여 잘 선정된 주자유도를 나타낸 것이고 Fig. 4(b)는 임의로 선정한 주자유도를

나타낸 것으로 모두 100개의 주자유도를 선정하여 4.1%에 해당하는 축소시스템을 구성하였다.

Table 3은 2단계 축소법과 IIRS 방법의 축소시스템 구성시간을 비교한 것이다. 전산효율이 높은 2단계 축소법과 비교해 볼 때 IIRS 방법은 주자유도 선정 시간이 소요되지 않으므로 계산시간 면에서도 그 효율성이 높은 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 두 방법으로 계산한 고유치의 상대오차를 나타낸 것이다. 2단계 축소법은 잘 선정된 주 자유도에 의해서 전체 모드에서 1.0% 이내의 고유치가 계산되었고, IIRS 방법은 초기 고유치는 2단계 축소법과 비교하여 8차 모드에서 약 1.6%의 최대오차를 갖는 큰 상대오차를 보였으나 5번의 반복으로 10차 모드까지 0.2% 이내의 상대오차를 가지는 고유치를 계산할 수 있다.

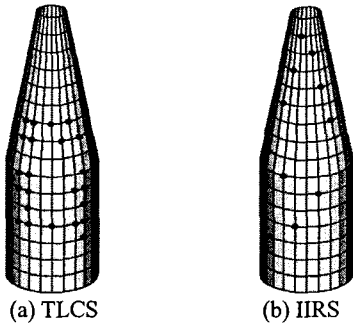


Fig. 4 Cone structure ($E=72\text{GPa}$, $\nu=0.33$, $\rho=2800\text{kg/m}^3$)

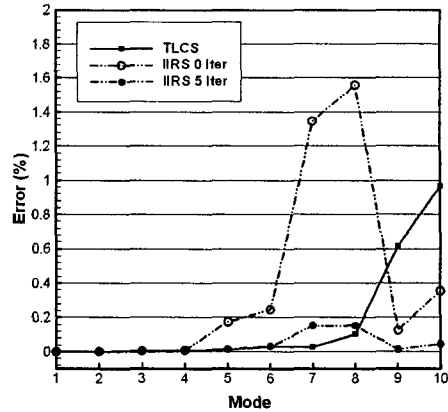


Fig. 5 Relative errors in eigenvalue

Table 3 Computation time

Analysis method	TLCS	IIRS (5 Iter')
Time(sec)	231	104

Table 4 First ten eigenvalues of the cone structure : TLCS vs IIRS

Iteration	Modes ($\times 10^3$)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TLCS	2.13061	2.13061	3.28568	3.28573	7.41743	7.41899	12.39498	12.40461	13.12556	13.17166
IIRS										
0	2.13061	2.13062	3.28567	3.28588	7.42957	7.43475	12.55832	12.58467	13.06205	13.09210
1		2.13061	3.28556	3.28562	7.41893	7.42098	12.42450	12.42903	13.04911	13.06895
2			3.28556	3.28560	7.41841	7.42011	12.41851	12.42025	13.04838	13.05464
3			3.28556	3.28559	7.41812	7.41961	12.41523	12.41599	13.04795	13.05331
4			3.28555	3.28559	7.41792	7.41924	12.41271	12.41305	13.04764	13.05236
5			3.28555	3.28558	7.41776	7.41896	12.41067	12.41087	13.04741	13.05163
exact	2.13061	2.13061	3.28554	3.28554	7.41656	7.41656	12.39166	12.39178	13.04561	13.04562

3. 부구조화 기법 연동

3.1 기본개념

축소법의 핵심은 주자유도만의 축소행렬을 구축하기 위하여 부자유도를 변환행렬을 통하여 제거하는 방법이다. 그런데 이런 과정은 해석하고자 하는 시스템의 크기가 대형화되면 단일 Workstation 환경에서는 변환행렬의 구성이 매우 어렵게 된다. 왜냐하면 대형 시스템은 그만큼 제거해야 할 부자유도의 수가 많고 변환행렬을 구성할 때 부자유도수만큼의 크기의 부자유도 행렬의 역행렬을 연산해야 하기 때문이다. 이는 제한된 전산환경에서 전산효율을 떨어뜨리는 주요 요인이 되고 있다. 따라서 이를 해결하기 위해서는 전체 시스템을 여러 개의 부 시스템으로 나누어 개별적인 축소 시스템을 구성하는 부구조화 기법을 사용해야 한다.

부구조화 기법의 기본 개념은 전체 영역을 여러 개의 부 영역으로 나누고 각각의 부 영역에서 주자유

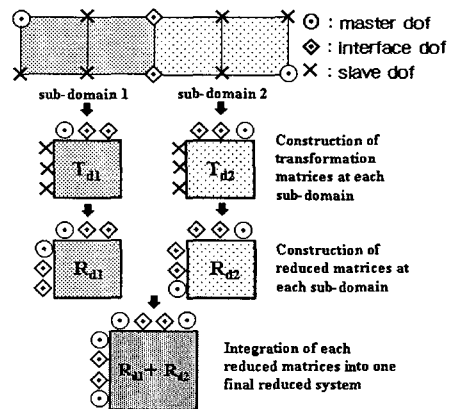


Fig. 6 Basic idea of the sub-structuring scheme

도와 부자유도 그리고 각 영역을 연결하는 인터페이스 자유도로 나눈 다음 각각의 부 영역에서 부자유도를 제거하여 주자유도와 인터페이스 자유도만의 축소행렬을 구성하고 각 영역의 축소행렬들을 결합하는

방법이다. Fig. 6은 부구조화 기법의 기본 개념을 도식화한 것이다.

3.2 정식화

두 개의 부 구조를 가지는 시스템을 고려하면 전체 영역은 다음과 같이 두 개의 부 영역으로 나눌 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} & \mathbf{K}_{mb} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bm} & \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}_{(1)} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}_{(1)} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} & \mathbf{M}_{mb} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bm} & \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}_{(1)} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}_{(1)} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} & \mathbf{K}_{mb} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bm} & \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}_{(2)} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}_{(2)} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} & \mathbf{M}_{mb} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bm} & \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}_{(2)} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}_{(2)}$$

식 (12)의 두 영역을 하나로 결합하면 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm}^{(1)} & \mathbf{K}_{ms}^{(1)} & \mathbf{K}_{mb}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{sm}^{(1)} & \mathbf{K}_{ss}^{(1)} & \mathbf{K}_{sb}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{bm}^{(1)} & \mathbf{K}_{bs}^{(1)} & \mathbf{K}_{bb}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb}^{(2)} & \mathbf{K}_{bs}^{(2)} & \mathbf{K}_{bm}^{(2)} \\ & & & \mathbf{K}_{sb}^{(2)} & \mathbf{K}_{ss}^{(2)} & \mathbf{K}_{sm}^{(2)} \\ & & & & \mathbf{K}_{mb}^{(2)} & \mathbf{K}_{ms}^{(2)} & \mathbf{K}_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_s^{(1)} \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_s^{(2)} \\ \mathbf{u}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm}^{(1)} & \mathbf{M}_{ms}^{(1)} & \mathbf{M}_{mb}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{sm}^{(1)} & \mathbf{M}_{ss}^{(1)} & \mathbf{M}_{sb}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{bm}^{(1)} & \mathbf{M}_{bs}^{(1)} & \mathbf{M}_{bb}^{(1)} + \mathbf{M}_{bb}^{(2)} & \mathbf{M}_{bs}^{(2)} & \mathbf{M}_{bm}^{(2)} \\ & & & \mathbf{M}_{sb}^{(2)} & \mathbf{M}_{ss}^{(2)} & \mathbf{M}_{sm}^{(2)} \\ & & & & \mathbf{M}_{mb}^{(2)} & \mathbf{M}_{ms}^{(2)} & \mathbf{M}_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_s^{(1)} \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_s^{(2)} \\ \mathbf{u}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

식 (13)에서 두 영역의 부자유도를 제거하기 위하여 먼저 첫 번째 영역의 부자유도 변위장인 두 번째 행에 대하여 부자유도 변위장을 주자유도와 인터페이스 자유도로 나타내면,

$$\mathbf{u}_s^{(1)} = -(\mathbf{K}_{ss}^{(1)} - \lambda \mathbf{M}_{ss}^{(1)})^{-1} \left[(\mathbf{K}_{sm}^{(1)} - \lambda \mathbf{M}_{sm}^{(1)}) \mathbf{u}_m^{(1)} + (\mathbf{K}_{sb}^{(1)} - \lambda \mathbf{M}_{sb}^{(1)}) \mathbf{u}_b \right] \quad (14)$$

식 (14)에서 $(\mathbf{K}_{ss}^{(1)} - \lambda \mathbf{M}_{ss}^{(1)})^{-1}$ 를 λ 에 대해서 급수전개하고 λ 의 1차 항까지만 고려하면,

$$(\mathbf{K}_{ss}^{(1)} - \lambda \mathbf{M}_{ss}^{(1)})^{-1} = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \mathbf{M}_{ss}^{(1)}) \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \quad (15)$$

식 (15)를 식 (14)에 대입하면 식 (16)과 같은 부자유도 변위장에 대한 식이 완성된다.

$$\mathbf{u}_s^{(1)} = -\mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \mathbf{K}_{sm}^{(1)} \mathbf{u}_m^{(1)} - \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \mathbf{K}_{sb}^{(1)} \mathbf{u}_b + \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} (\mathbf{M}_{sm}^{(1)} - \mathbf{M}_{ss}^{(1)} \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \mathbf{K}_{sm}^{(1)}) \lambda \mathbf{u}_m^{(1)} + \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} (\mathbf{M}_{sb}^{(1)} - \mathbf{M}_{ss}^{(1)} \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \mathbf{K}_{sb}^{(1)}) \lambda \mathbf{u}_b \quad (16)$$

같은 방법으로 두 번째 영역의 부자유도 변위장인

식 (13)의 네 번째 행에 대해서도 부자유도 변위장에 대한 식을 나타내면,

$$\mathbf{u}_s^{(2)} = -\mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} \mathbf{K}_{sm}^{(2)} \mathbf{u}_m^{(2)} - \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} \mathbf{K}_{sb}^{(2)} \mathbf{u}_b + \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} (\mathbf{M}_{sm}^{(2)} - \mathbf{M}_{ss}^{(2)} \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} \mathbf{K}_{sm}^{(2)}) \lambda \mathbf{u}_m^{(2)} + \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} (\mathbf{M}_{sb}^{(2)} - \mathbf{M}_{ss}^{(2)} \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} \mathbf{K}_{sb}^{(2)}) \lambda \mathbf{u}_b \quad (17)$$

식 (16)을 다시 정리하면 식 (18)과 같이 주자유도와 인터페이스 자유도를 가지는 변위장으로의 변환관계로 나타낼 수 있으며,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_s^{(1)} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & 0 \\ \mathbf{T}_{sm}^{(1)} + \mathbf{K}_{sm}^{(1)-1} (\mathbf{M}_{sm}^{(1)} + \mathbf{M}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sm}^{(1)}) \lambda & \mathbf{T}_{sb}^{(1)} + \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} (\mathbf{M}_{sb}^{(1)} + \mathbf{M}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sb}^{(1)}) \lambda & \\ 0 & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서, $\mathbf{T}_{sm}^{(1)} = -\mathbf{K}_{sm}^{(1)-1} \mathbf{K}_{sm}^{(1)}$, $\mathbf{T}_{sb}^{(1)} = -\mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} \mathbf{K}_{sb}^{(1)}$ 이다.

같은 방법으로 두 번째 영역에 대해서도 식 (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_s^{(2)} \\ \mathbf{u}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & 0 \\ \mathbf{T}_{sb}^{(2)} + \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} (\mathbf{M}_{sb}^{(2)} + \mathbf{M}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{sb}^{(2)}) \lambda & \mathbf{T}_{sm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} (\mathbf{M}_{sm}^{(2)} + \mathbf{M}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{sm}^{(2)}) \lambda & \\ 0 & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서, $\mathbf{T}_{sb}^{(2)} = -\mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} \mathbf{K}_{sb}^{(2)}$, $\mathbf{T}_{sm}^{(2)} = -\mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} \mathbf{K}_{sm}^{(2)}$ 이다.

식 (18)과 식 (19)을 결합하면 전체영역에 대한 변환관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_s^{(1)} \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_s^{(2)} \\ \mathbf{u}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_s^{(2)} \\ \mathbf{u}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

여기서, 변환행렬의 성분들은 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} &= \mathbf{T}_{sm}^{(1)} + \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} (\mathbf{M}_{sm}^{(1)} + \mathbf{M}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sm}^{(1)}) \lambda \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} &= \mathbf{T}_{sb}^{(1)} + \mathbf{K}_{ss}^{(1)-1} (\mathbf{M}_{sb}^{(1)} + \mathbf{M}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sb}^{(1)}) \lambda \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} &= \mathbf{T}_{sb}^{(2)} + \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} (\mathbf{M}_{sb}^{(2)} + \mathbf{M}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{sb}^{(2)}) \lambda \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} &= \mathbf{T}_{sm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ss}^{(2)-1} (\mathbf{M}_{sm}^{(2)} + \mathbf{M}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{sm}^{(2)}) \lambda \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)을 사용한 최종의 축소시스템은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{IRS} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)T} & \mathbf{I} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm}^{(1)} & \mathbf{K}_{ms}^{(1)} & \mathbf{K}_{mb}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{sm}^{(1)} & \mathbf{K}_{ss}^{(1)} & \mathbf{K}_{sb}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{bm}^{(1)} & \mathbf{K}_{bs}^{(1)} & \mathbf{K}_{bb}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb}^{(2)} & \mathbf{K}_{bs}^{(2)} & \mathbf{K}_{bm}^{(2)} \\ & & & \mathbf{K}_{sb}^{(2)} & \mathbf{K}_{ss}^{(2)} & \mathbf{K}_{sm}^{(2)} \\ & & & & \mathbf{K}_{mb}^{(2)} & \mathbf{K}_{ms}^{(2)} & \mathbf{K}_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$M_{IRS} = \begin{bmatrix} I & T_{IRS}^{sm(1)T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(1)T} & I & T_{IRS}^{sb(2)T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{IRS}^{sm(2)T} & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{mm}^{(1)} & M_{ms}^{(1)} & M_{mb}^{(1)} & & & \\ M_{sm}^{(1)} & M_{ss}^{(1)} & M_{sb}^{(1)} & & & \\ M_{bm}^{(1)} & M_{bs}^{(1)} & M_{bb}^{(1)} + M_{bb}^{(2)} & M_{bs}^{(2)} & M_{bm}^{(2)} & \\ & & M_{bs}^{(2)} & M_{ss}^{(2)} & M_{sb}^{(2)} & \\ & & M_{mb}^{(2)} & M_{ms}^{(2)} & M_{mm}^{(2)} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ T_{IRS}^{sm(1)} & T_{IRS}^{sb(1)} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(2)} & T_{IRS}^{sm(2)} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (23)$$

식 (22)와 식 (23)으로부터 축소된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{IRS}^{(11)} & K_{IRS}^{(12)} & 0 \\ K_{IRS}^{(21)} & K_{IRS}^{(22)} & K_{IRS}^{(23)} \\ 0 & K_{IRS}^{(32)} & K_{IRS}^{(33)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m^{(1)} \\ u_b \\ u_m^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{IRS}^{(11)} & M_{IRS}^{(12)} & 0 \\ M_{IRS}^{(21)} & M_{IRS}^{(22)} & M_{IRS}^{(23)} \\ 0 & M_{IRS}^{(32)} & M_{IRS}^{(33)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m^{(1)} \\ u_b \\ u_m^{(2)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서, 축소된 강성행렬과 질량행렬의 각 요소들은 다음과 같다.

$$K_{IRS}^{(11)} = K_{mm}^{(1)} + K_{ms}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} K_{sm}^{(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} K_{ss}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)}$$

$$K_{IRS}^{(12)} = K_{mb}^{(1)} + K_{ms}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} K_{sb}^{(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} K_{ss}^{(1)} T_{IRS}^{sb(1)}$$

$$K_{IRS}^{(21)} = K_{bs}^{(1)} + K_{bs}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)} + T_{IRS}^{sb(1)T} K_{sb}^{(1)} + T_{IRS}^{sb(1)T} K_{ss}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)}$$

$$+ K_{bb}^{(2)} + K_{bs}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} K_{sb}^{(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} K_{ss}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)}$$

$$K_{IRS}^{(22)} = K_{bm}^{(2)} + K_{bs}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} K_{sm}^{(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} K_{ss}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)}$$

$$K_{IRS}^{(32)} = K_{mm}^{(2)} + K_{ms}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)} + T_{IRS}^{sm(2)T} K_{sm}^{(2)} + T_{IRS}^{sm(2)T} K_{ss}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)}$$

$$M_{IRS}^{(11)} = M_{mm}^{(1)} + M_{ms}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} M_{sm}^{(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} M_{ss}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)}$$

$$M_{IRS}^{(12)} = M_{mb}^{(1)} + M_{ms}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} M_{sb}^{(1)} + T_{IRS}^{sm(1)T} M_{ss}^{(1)} T_{IRS}^{sb(1)}$$

$$M_{IRS}^{(21)} = M_{bs}^{(1)} + M_{bs}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)} + T_{IRS}^{sb(1)T} M_{sb}^{(1)} + T_{IRS}^{sb(1)T} M_{ss}^{(1)} T_{IRS}^{sm(1)}$$

$$+ M_{bb}^{(2)} + M_{bs}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} M_{sb}^{(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} M_{ss}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)}$$

$$M_{IRS}^{(22)} = M_{bm}^{(2)} + M_{bs}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} M_{sm}^{(2)} + T_{IRS}^{sb(2)T} M_{ss}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)}$$

$$M_{IRS}^{(32)} = M_{mm}^{(2)} + M_{ms}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)} + T_{IRS}^{sm(2)T} M_{sm}^{(2)} + T_{IRS}^{sm(2)T} M_{ss}^{(2)} T_{IRS}^{sm(2)}$$

3.3 IIRS 방법과의 연동 절차

IIRS 방법의 부구조화 기법에 대한 연동절차를 살펴보면 각각의 부 영역을 주자유도, 인터페이스 그리고 부자유도로 분리하여 변환행렬을 구성하고 부 영역별로 축소시스템을 구축하여 각각의 축소행렬을 결합하면 전체 시스템에 대한 최종적인 축소시스템이 구축된다. 따라서 전체 시스템의 90% 이상을 차지하는 부자유도 행렬의 크기는 나뉘진 부 영역단위의 크기로 줄어들게 되므로 변환행렬 구성이 용이하며 그 결과는 전체 시스템에서 축소된 결과와 동일하다.

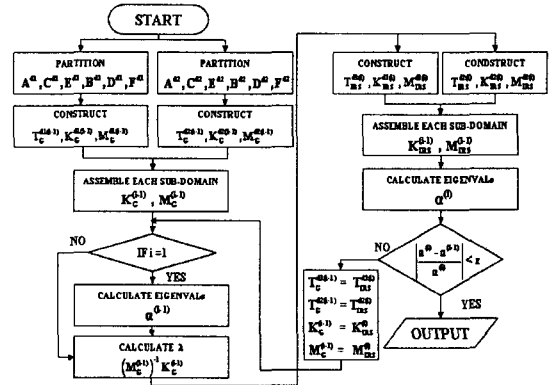


Fig. 7 Flowchart of the IIRS procedure combined with sub-structuring scheme

Fig. 7은 반복적인 동적 축소법을 부구조화 기법에 적용시킨 알고리즘을 나타낸 순서도이다. Fig. 7에서 보듯이 순서 알고리즘은 Fig. 1에서의 순서와 동일하나 다른 점은 전체 시스템을 여러 개의 부영역으로 나누어 각각에서 Guyan과 IRS 변환행렬과 축소시스템을 구축하고 결합하는 부분이다.

3.4 수치예제

3.4.1 단순 외팔보

Fig. 8(a)는 CST 요소를 사용한 단순 외팔보이며 총 자유도 수는 80이다. 이 예제는 축소가 불필요한 간단한 모델이지만 IIRS 방법의 부구조화 기법 연동 알고리즘의 검증에 위해서이며, 전체영역을 IIRS로 축소한 시스템과 부구조화 기법을 연동시킨 시스템에서 계산한 고유치를 비교하였다.

Fig. 8(b)에서 보듯이 주자유도는 각각의 부영역을 나누고 있는 인터페이스 자유도만을 선정하여 총 10개로 전체의 약 12.5%의 축소시스템을 구성하였다. Table 5는 부자유도 행렬과 변환행렬의 크기를 전체 시스템과 부구조화 기법을 사용하여 3개의 부영역으로 나누었을 경우를 비교한 것이다. Table 5에서 보듯이 부자유도 행렬과 변환행렬의 크기는 각각의 부영역의 크기만큼 줄어든 것을 확인할 수 있다.

Fig. 9와 Table 6은 전체 시스템과 부구조화 기법을 적용하였을 경우 축소시스템의 고유치 해석 결과이다. Fig. 9에서 보듯이 부구조화 기법을 적용시켰을 경우에도 전체시스템을 축소한 것과 동일한 결과를 얻었다.

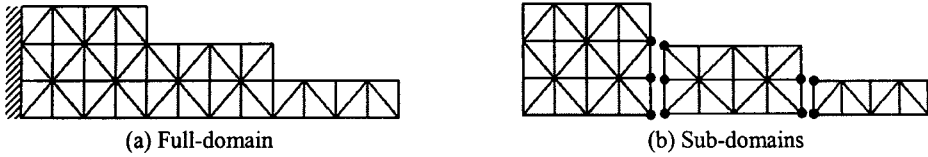


Fig. 8 Modeling and selection of master DOFs at each sub-domain ($E=30\text{MPa}$, $\nu=0.3$, $\rho=2800\text{ kg/m}^3$)

Table 5 Slave and transformation matrices

Full System	Sub-1	Sub-2	Sub-3
K_{SS}	[70×70]	[40×40]	[30×30] [20×20]
T_{IRS}	[70×10]	[40×10]	[30×10] [20×10]

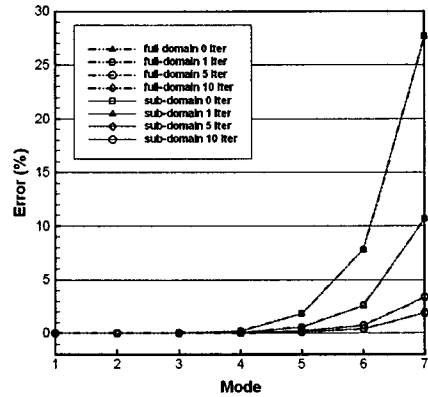


Fig. 9 Relative errors in eigenvalue

Table 6 First seven eigenvalues of the simple cantilever beam with sub-structuring scheme

Iteration	Mode ($\times 10^2$)						
	1	2	3	4	5	6	7
0	0.9815108	11.1043341	30.1405689	49.4519201	147.5507724	195.7741245	402.3365814
1		11.1039314	30.1365515	49.3827306	145.7074864	186.3277701	348.8900498
2		11.1038929	30.1362459	49.3758694	145.4423682	184.3719992	336.0104443
3		11.1038743	30.1361333	49.3725518	145.3130341	183.5987363	330.7657760
4		11.1038625	30.1360687	49.3703148	145.2296974	183.1823805	327.8406802
5		11.1038539	30.1360245	49.3686219	145.1700968	182.9161210	325.8965784
6		11.1038474	30.1359919	49.3672791	145.1252797	182.7276198	324.4754612
7		11.1038422	30.1359667	49.3661863	145.0905050	182.5854518	323.3775999
8		11.1038380	30.1359469	49.3652813	145.0628848	182.4736116	322.4987436
9		11.1038345	30.1359308	49.3645219	145.0405307	182.3829711	321.7772523
10		11.1038315	30.1359177	49.3638777	145.0221529	182.3078741	321.1735390
exact	0.9815108	11.1038067	30.1358217	49.3580374	144.8826537	181.5920249	315.1920249

3.4.2 위성 발사체

Fig. 10(a)는 Aminpour의 4 절점 쉘 요소를 사용한 하부가 고정되어 있는 인공위성 발사체 구조물로 총 23,338 개의 자유도를 가지고 있으며 Fig. 10(b)와 같이 11 개의 부 영역으로 나누었다. 주자유도 선정은 인터페이스 자유도와 각 영역 내에서 임의로 선정한 자유도를 포함하여 총 1,614 개로 전체시스템의 6.9%에 해당하는 축소시스템을 구축하였다.

Table 7은 축소시스템의 고유치 계산 결과이며 3 번의 반복으로 20 차 모드까지 상대오차 0.5% 이내의 정확한 고유치를 계산할 수 있다. 또한 3.4.1 절의 예제와 같이 자유도 수가 적은 구조물과 비교해 볼 때 자유도 수가 많은 대형 구조물일수록 축소된 시

스템에서 저차 모드의 고유치는 매우 정확하게 계산되는 것을 알 수 있다.

3.4.3 캄샤프트

Fig. 11(a)는 4 절점 사면체 요소를 사용한 양단이 고정되어 있는 캄샤프트 구조물로 총 22,323 개의 자유도를 가지고 있으며 Fig. 11(b)와 같이 6 개의 부 영역으로 나누었다. 주자유도 선정은 인터페이스 자유도와 각 영역 내에서 임의로 선정한 자유도를 포함하여 총 1,053 개로 전체시스템의 4.7%에 해당하는 축소시스템을 구축하였다.

Table 8은 축소시스템의 고유치 계산 결과이며 한 번의 반복계산으로 20 차 모드까지 상대오차 0.003% 이내로 매우 정확히 고유치를 계산할 수 있다.

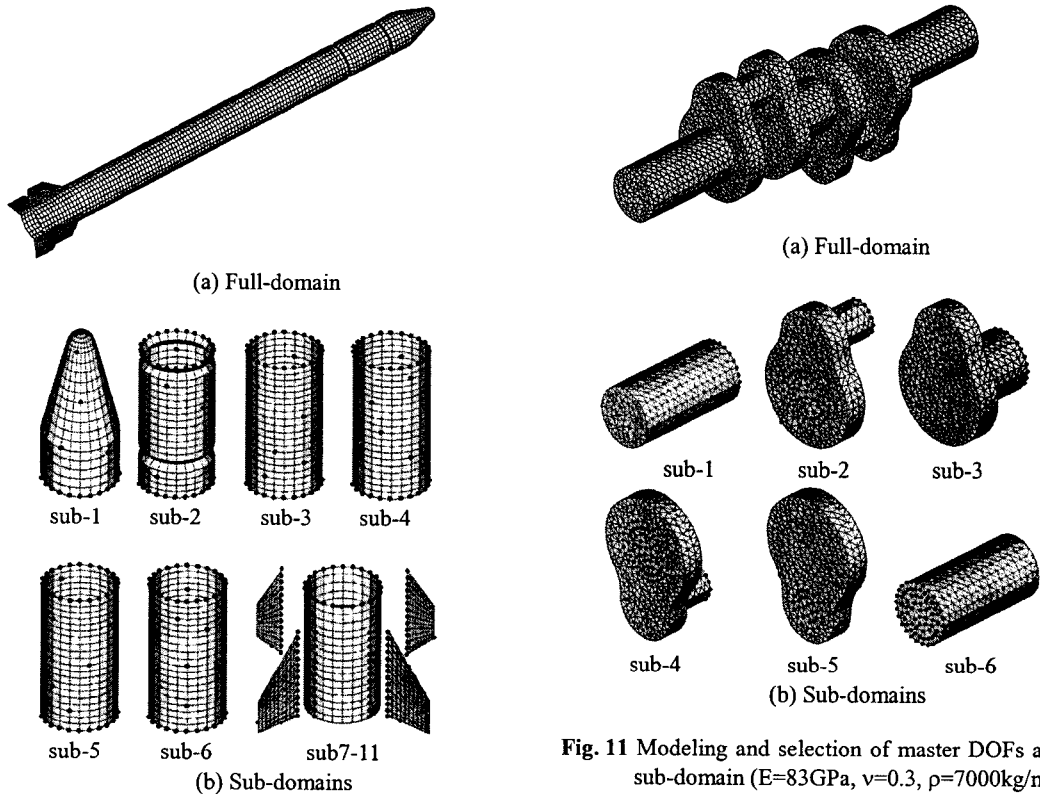


Fig. 10 Modeling and selection of master DOFs at each sub-domain ($E=30\text{GPa}$, $\nu=0.1$, $\rho=2800\text{kg/m}^3$)

Fig. 11 Modeling and selection of master DOFs at each sub-domain ($E=83\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $\rho=7000\text{kg/m}^3$)

Table 7 First twenty eigenvalues of the satellite projectile with sub-structuring scheme

Iteration	Mode ($\times 10^2$)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	5.68799	5.68799	5.90205	5.90252	5.90456	5.90505	12.00987	14.30073	14.30608	14.38584
1		5.68799	5.90151	5.90204	5.90381	5.90391	12.00982	14.29663	14.30121	14.31451
2		5.68799	5.90145	5.90198	5.90376	5.90381		14.29583	14.30080	14.30674
3		5.68799	5.90143	5.90195	5.90374	5.90377		14.29526	14.30064	14.30372
exact	5.68799	5.68800	5.90175	5.90202	5.90335	5.90361	12.00982	14.29334	14.29987	14.30004
Iteration	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	14.38981	17.94135	18.19407	19.23086	31.64497	32.02618	32.14757	32.63019	32.94878	33.52158
1	14.31808	17.94135	18.19407	19.23047	31.64209	31.94057	31.96414	32.09156	32.19040	33.52069
2	14.31026	17.94134	18.19407	19.23045	31.64190	31.93001	31.94185	32.02691	32.06550	33.52065
3	14.30672	17.94134	18.19407	19.23044	31.64183	31.92644	31.93421	31.99697	32.01235	33.52063
exact	14.30111	17.94140	18.19400	19.23043	31.64190	31.91933	31.92039	31.92419	31.92431	33.52057

Table 8 First twenty eigenvalues of the camshaft with sub-structuring scheme

Iteration	Mode ($\times 10^7$)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.0167091	0.0171192	0.0427579	0.0803997	0.1364096	0.1616821	0.1941334	0.2306096	0.2310630	0.3348655
1	0.0167091	0.0171192	0.0427579	0.0803997	0.1364096	0.1616821	0.1941334	0.2306096	0.2310630	0.3348655
exact	0.0167092	0.0171192	0.0427579	0.0803997	0.1364096	0.1616821	0.1941334	0.2306155	0.2310570	0.3348655
Iteration	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.4441241	0.7347961	0.9869439	1.2476207	1.5787938	1.8565088	1.8876658	1.9165174	1.9911399	2.8787721
1	0.4441241	0.7347958	0.9869429	1.2476177	1.5787916	1.8564973	1.8876573	1.9164987	1.9911267	2.8785902
exact	0.4441241	0.7347958	0.9869426	1.2476170	1.5787912	1.8564998	1.8876553	1.9164905	1.9911219	2.8785512

4. 결 론

컴퓨터 기술의 발전으로 유한요소법에 의한 구조물에 대한 정적, 동적 해석은 점차 대형화되고 있으며 복잡한 형상에 대한 해석을 요구하고 있다. 비록 슈퍼컴퓨터의 발전으로 이에 대한 요구조건을 충족시켜 줄 수 있으나 제한적으로 사용되고 있는 것이 현실이다.

본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 제한된 전산환경에서 비감쇠 구조 시스템에 대한 효율적인 축소방법 개발에 관한 연구를 수행하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 효율적인 축소기법인 IIRS 방법에 부구조화 기법을 연동시키는 알고리즘을 개발하였다. 또한, 수치예제를 통하여 해의 정확도와 수렴성을 검증하였다.
- (2) 부구조화 기법은 IIRS 방법과 동일하게 축소행렬의 반복적인 개선을 수행하므로 임의로 주자유도를 선정하더라도 매우 정확한 고유치를 계산할 수 있는 장점을 가지고 있다.
- (3) 부구조화 기법을 연동시킨 IIRS 방법은 전체 시스템을 원하는 만큼의 부 시스템으로 나눔으로써 비교적 큰 시스템에 대한 고유치 문제를 구성할 수 있다. 그러나 솔리드 구조물과 같은 경우는 인터페이스 자유도를 많이 포함하게 되므로 축소 효율이 다소 저하되는 단점이 있다.
- (4) 향후에는 인터페이스 자유도에 대한 처리와 감쇠(damping)를 고려한 구조물의 효율적인 축소방법과 부구조화 기법의 적용에 관한 연구를 수행할 예정이다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 및 서울대학교 비행체 특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구결과입니다.

참고문헌

- (1) Guyan, Robert J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, p. 380.
- (2) Bruce Irons, 1965, "Structural Eigenvalue Problems-Elimination of Unwanted Variables," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 5, pp. 961-962.
- (3) O'Callahan, J.C., 1989, "A New Procedure for an Improved Reduced System (IRS)," *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pp.17~21.
- (4) Gordis, Joshua H., 1992, "An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure," *Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference*, Vol. 1, pp. 471~479.
- (5) Friswell, M.I., Garvey, S.D. and Penny, J.E.T., 1995, "Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, No. 2, pp. 311~323.
- (6) Friswell, M.I., Garvey, S.D. and Penny, J.E.T., 1998, "The Convergence of the Iterated IRS Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 1, pp. 123~132.
- (7) Suarez, L.E. and Singh, M.P., 1992, "Dynamic Condensation Method for Structural Eigenvalue Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 4, pp. 1046~1054.
- (8) Qu, Z.-Qu. and Fu, Z.-F., 1998, "New Structural Dynamic Condensation Method for Finite Element Models," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 7, pp. 1320~1324.
- (9) Qu Zu-Qing, Selvam, R. Panneer, 2002, "Efficient Method for Dynamic Condensation of Nonclassically Damped Vibration Systems," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 2, pp. 368~375.
- (10) Qu, Z.-Q., Jung, Y. and Selvam, R.P., 2003, "Model Condensation for Non-Classically Damped Systems - Part I : Static Condensation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 5, pp. 1003~1016.
- (11) Qu, Z.-Q., Selvam, R.P. and Jung, Y., 2003, "Model Condensation for Non-Classically Damped Systems - Part II : Iterative Schemes for Dynamic Condensation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 5, pp. 1017~1032.
- (12) Shah, V.N. and Raymund, M., 1982, "Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 18, Issue 1, pp. 89~98.
- (13) Cho Maenghyo and Kim Hyungi, 2004, "Element-Based Node Selection Method for Reduction of Eigenvalue Problems," *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 8, pp. 1677~1684.
- (14) Kim Hyungi, Cho Maenghyo, 2006, "Two-Level Scheme for Selection of Degrees of Freedom and Semi-Analytic Sensitivity Based on the Reduced System," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, Issue 33~36, pp. 4244~4268.
- (15) Kim, H. and Cho, M., 2005, "Dynamic Analysis of Reduced System Partitioned by Domain Decomposition," *Proceedings of the 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pp. 18~21.
- (16) Kim Hyungi and Cho Maenghyo, 2006, "Improvement of Reduction Method Combined with Sub-Domain Scheme in Large Scale Problem," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, (in press).