

< 논문 >

## 부구조화 기법을 연동한 반복적인 동적 축소법 (II)

- 비비례 감쇠 구조 시스템 -

최동수<sup>†</sup> · 김현기\* · 조맹효\*\*

(2006년 9월 27일 접수, 2006년 12월 7일 심사완료)

### Iterated Improved Reduced System (IIRS) Method Combined with Sub-Structuring Scheme (II)

- Nonclassically Damped Structural Systems -

Dongsoo Choi, Hyungi Kim and Maenghyo Cho

**Key Words :** Iterated IRS Method(반복적인 동적 축소법), Sub-Structuring Scheme(부구조화 기법), Nonclassically Damped Structural System(비비례 감쇠 구조시스템)

#### Abstract

An iterated improved reduced system (IIRS) procedure combined with sub-structuring scheme for nonclassically damped structural systems is presented. For dynamic analysis of such systems, complex eigenproperties are required to incorporate properly the nonclassical damping effect. In complex structural systems, the equations of motion are written in the state space form. Thus, the number of degrees of freedom of the new equations of motion and the size of the associated eigenvalue problem required to obtain the complex eigenvalues and eigenvectors are doubled. Iterated IRS method is an efficient reduction technique because the eigenproperties obtained in each iteration step improve the condensation matrix in the next iteration step. However, although this reduction technique reduces the size of problem drastically, it is not efficient to apply this technique to a single domain finite element model with degrees of freedom over several thousands. Therefore, for a practical application of the reduction method, accompanying sub-structuring scheme is necessary. In the present study, iterated IRS method combined with sub-structuring scheme for nonclassically damped structures is developed. Numerical examples demonstrate the convergence and the efficiency of a newly developed scheme.

#### 1. 서론

유한요소법을 이용한 구조물의 동적 축소방법은 Guyan<sup>(1)</sup>과 Iron<sup>(2)</sup>에 의하여 처음 제안된 이후로 고유치의 정확한 계산과 축소절차를 간소화하기 위하여 많은 방법들이 개발되어 왔다. 그러나, 대부분의 축소법은 비감쇠 구조시스템(undamped structural systems)에 관한 연구였다. 그리고 감쇠

효과(damping effect)를 고려한다 하더라도 감쇠 행렬(damping matrix)이 축소된 시스템으로부터 계산된 고유벡터에 영향을 미치지 않는 비례감쇠 시스템(propotionally damped systems)을 구성하는 것이었다. 그러나 대부분의 일반적인 구조물은 비비례 감쇠(nonclassical damping) 특성을 가지고 있다. 따라서 이러한 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하여 동적 해석을 수행할 경우 필연적으로 오차를 포함하게 되어 신뢰할 수 없는 결과를 초래한다. 그러므로 실제 구조물의 동적 해석을 정확하고 효율적으로 수행하기 위해서는 비비례 감쇠시스템(nonclassically damped systems)에 적용 가능한 동적 축소방법을 사용해야 한다. 비비례 감쇠 특성을 갖고 있는 구조물의 예는 다음 몇 가지를 들 수 있다. 첫째,

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

\* 현대중공업 기술개발본부

\*\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : mhcho@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1693 FAX : (02)886-1693

구조물이 서로 다른 부분(part)으로 나뉘어 각각 다른 감쇠특성을 가지고 있는 경우, 둘째, 구조물에 집중 감쇠기(concentrated damper)가 장착되어 있는 경우, 그리고 마지막으로 구조물이 감쇠재료(damping material)로 층(layer)을 이루고 있는 경우이다.

이와 같은 복소 구조시스템(complex structural systems)을 갖는 유한요소 모델은 시스템의 고유 특성을 얻기 위해서 운동방정식을 먼저 상태 공간 형태(state space form)로 표현하면 편리하다. 따라서 복소형태의 고유치와 고유 벡터를 구하기 위한 새로운 운동방정식이 갖는 자유도 수와 크기는 자동적으로 두 배가 된다. Part I에서 언급하였듯이 유한요소 해석에 있어서 해석하고자 하는 구조물의 자유도 수가 두 배로 커지게 되면 행렬 구성에 있어 메모리는 그 비율의 제곱에, 역행렬 연산시간은 세 제곱에 비례한다고 하였다. 이것을 비비레 감쇠 시스템에 적용해 보면 구조물의 자유도 수가 두 배로 커지게 되면 행렬 구성에 필요한 메모리는 그 비율의 네 제곱에, 역행렬 연산시간은 여섯 제곱에 비례한다. 따라서 동일한 자유도 수를 갖는 구조물이라 하더라도 상태공간 형태의 비비레 감쇠 시스템으로의 해석은 자유진동을 갖는 비감쇠 구조시스템과 비교해 볼 때 매우 큰 전산부담을 가져오게 된다. 더욱이 슈퍼컴퓨터가 아닌 단일 PC를 사용하는 대부분의 공학자들에게 비비레 감쇠 거동을 포함하는 대형 구조물의 동적 해석은 현실적으로 매우 어려운 일이다. 그러므로 전체 크기의 고유치 문제를 작은 크기로 줄여서 해석하는 축소 기법을 사용하는 것이 바람직하다.

1995년 Friswell 등<sup>(3,4)</sup>은 Iterated IRS (IIRS) 방법을 개발하였다. 이 방법의 기본 원리는 축소된 행렬이 원하는 허용 오차 내의 수렴된 고유치를 갖도록 변환행렬(transformation matrix)의 반복 개선을 통하여 최종의 축소된 시스템을 구축하는 것으로 매우 정확한 고유치를 구할 수 있는 효율적인 방법이다. 1998년 Qu 등<sup>(5)</sup>은 비비레 감쇠 시스템에 대한 반복적인 축소법을 제안하였다. 이 방법에서는 축소행렬 구성을 위해 상태공간에서 주자유도와 부자유도를 결합하는 고유벡터들의 관계를 나타내는 두 개의 지배 방정식을 유도 하였다.

1999년 Rivera 등<sup>(6)</sup>은 비감쇠 구조모델에 대한 반복적인 축소방법을 확장시켜 비비레 감쇠 시스템에 대해서도 적용 가능한 일반적인 동적 축소법을 제안하였다. 이 방법에서는 다음 단계에서 개선된 축소행렬을 구하기 위하여 이전 단계에서 구축된 축소행렬을 사용하였다. 2002년 Qu 와 Selvam<sup>(7)</sup>은 비감쇠 모델에 대한 Standard subspace iteration 방법을 확장시켜 비비레 감쇠 시스템에 대한 반복적인 축소법을 개발하였다. 2003년 Qu 등<sup>(8,9)</sup>은 비비레 감쇠 시스템에 대하여 변위공간(displacement space)과 상태 공간에서 정적, 동적 축소시스템을 구축하였다.

본 연구에서는 비비레 감쇠 시스템에 대한 동적 축소방법으로 Friswell, Qu 그리고 Rivera가 사용한 보편적인 IIRS 방법을 사용하였다.

그러나 Part I의 비감쇠 구조시스템에서와 마찬가지로 이러한 축소방법을 수십만 이상의 자유도 수를 가지고 있는 실질적인 구조문제에 적용 시키기에는 많은 전산자원이 소요된다. 더욱이 상태공간 형태에서 행렬이 구성되는 비비레 감쇠 시스템은 비감쇠 시스템보다 두 배가 되는 자유도를 이미 포함하고 있으므로 더더욱 비싼 전산비용이 필요하다. 따라서 비비레 감쇠 구조 시스템에 대한 부구조화 기법(sub-structuring scheme)의 적용은 효율적인 동적 해석을 위하여 비감쇠 시스템에서 보다 더 필수적이다.

Kim과 Cho<sup>(11-14)</sup>는 부구조화 기법을 2단계 축소법<sup>(10)</sup>에 연동시켜 대형구조물에 대한 동적 해석을 수행하였다. 이 방법은 전체모델을 여러 개의 부 영역(sub-domain)으로 나누고 각각의 부 영역에 대하여 요소단위의 에너지 평가 및 후보 영역에 대한 순차적 소거법을 적용하여 최종의 주자유도를 선정하고 IRS 방법으로 축소된 시스템을 구축한 다음 결합하는 방법이다. 그러나, 이 방법은 감쇠가 고려된 주자유도 선정방법이 아니고, IRS에 의한 축소행렬을 한 번만 구축하게 되므로 비비레 감쇠시스템에 적용하였을 경우 축소행렬의 고유치의 정확도와 효율성을 보장할 수 없다.

따라서, 본 연구의 Part II에서는 Kim과 Cho가 사용한 부구조화 기법을 비비레 감쇠시스템에 적용 시키기 위하여 IRS 방법과 연동시키는 알고리즘을 개발한다. 그리고 몇 가지 수치예제를 통하여 구축된 축소 시스템으로부터 계산된 고유특성값들(eigenproperties)의 수렴성과 전산 효율성을 검증한다.

## 2. 복소 모드에 대한 기본 이론

n-자유도 비비레 감쇠 시스템의 동적 평형 방정식은 다음과 같은 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서 M, C, K는 각각 positive definite인 질량행렬, positive semidefinite인 감쇠행렬과 강성행렬을 나타낸다. 이 시스템에 대한 고유치 문제는 상태 공간에서 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$A\bar{\Psi} = B\bar{\Psi}\bar{\Omega} \quad (2)$$

여기서 시스템 행렬 A와 B는 실수 값이고, 대칭이며 다음과 같이 정의한다.

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -C & -M \\ -M & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

결레복소수 형태를 갖는 고유벡터 행렬인  $\tilde{\Psi}$  과 고유치 행렬  $\tilde{\Omega}$  는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi & \Psi^* \\ \Psi\Omega & \Psi^*\Omega^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 고유치 행렬은 오름차순 형태이며, 고유 벡터 행렬은 다음과 같이 정규화(normalized) 되어 있다고 가정한다.

$$\tilde{\Psi}^T A \tilde{\Psi} = \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Psi}^T B \tilde{\Psi} = I \quad (5)$$

만일,  $m$  개의 저차의 고유쌍(eigenpairs)을 갖게 된다면 (2)번 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A \tilde{\Psi}_m = B \tilde{\Psi}_m \tilde{\Omega}_{mm} \quad (6)$$

(6)번 식을 확장된 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_m & \Psi_m^* \\ \Psi_m \Omega_{mm} & \Psi_m^* \Omega_{mm}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C & -M \\ -M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_m & \Psi_m^* \\ \Psi_m \Omega_{mm} & \Psi_m^* \Omega_{mm}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{mm} & 0 \\ 0 & \Omega_{mm}^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 부 행렬(submatrix)  $\Psi_m$  과  $\Omega_{mm}$  의 크기는 각각  $n \times m$  과  $m \times m$  이 된다.

### 3. Iterated IRS 방법

#### 3.1 정식화

비비례 감쇠 시스템에 대한 효율적인 축소법인 IRS 방법은 가장 보편적인 Qu 와 Rivera<sup>(9)</sup>의 방법을 사용하였으며 그 절차는 다음과 같다.

식 (2)를 주자유도와 부자유도형태로 분리하면,

$$\begin{bmatrix} A_{mm} & A_{ms} \\ A_{sm} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_{mm} \\ \tilde{\Psi}_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{mm} & B_{ms} \\ B_{sm} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_{mm} \\ \tilde{\Psi}_{sm} \end{Bmatrix} \tilde{\Omega}_{mm} \quad (8)$$

여기서 시스템 행렬 안의 부행렬들은 다음과 같다.

$$A_{mm} = \begin{bmatrix} K_{mm} & 0 \\ 0 & -M_{mm} \end{bmatrix}, \quad A_{ms} = \begin{bmatrix} K_{ms} & 0 \\ 0 & -M_{ms} \end{bmatrix}$$

$$A_{ss} = \begin{bmatrix} K_{ss} & 0 \\ 0 & -M_{ss} \end{bmatrix}, \quad B_{mm} = \begin{bmatrix} -C_{mm} & -M_{mm} \\ -M_{mm} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B_{ms} = \begin{bmatrix} -C_{ms} & -M_{ms} \\ -M_{ms} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ss} = \begin{bmatrix} -C_{ss} & -M_{ss} \\ -M_{ss} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{mm} = \begin{bmatrix} \Psi_{mm} & \Psi_{mm}^* \\ \Psi_{mm} \Omega_{mm} & \Psi_{mm}^* \Omega_{mm}^* \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{sm} = \begin{bmatrix} \Psi_{sm} & \Psi_{sm}^* \\ \Psi_{sm} \Omega_{sm} & \Psi_{sm}^* \Omega_{sm}^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Omega}_{mm} = \begin{bmatrix} \Omega_{mm} & 0 \\ 0 & \Omega_{mm}^* \end{bmatrix}$$

부자유도를 제거하기 위하여 식 (8)의 두 번째 행을 전개하면,

$$\tilde{\Psi}_{sm} = A_{ss}^{-1} (B_{sm} \tilde{\Psi}_{mm} \tilde{\Omega}_{mm} + B_{ss} \tilde{\Psi}_{sm} \tilde{\Omega}_{mm} - A_{sm} \tilde{\Psi}_{mm}) \quad (10)$$

비비례 감쇠 시스템에 대한 변환행렬은 다음과 같이 정의할 수 있으며,

$$\tilde{\Psi}_{sm} = T \tilde{\Psi}_{mm} \quad (11)$$

식 (11)을 식 (10)에 대입하여 정리하면,

$$T = A_{ss}^{-1} [(B_{sm} + B_{ss} T) \tilde{\Psi}_{mm} \tilde{\Omega}_{mm} \tilde{\Psi}_{mm}^T - A_{sm}] \quad (12)$$

식 (12)는 다음과 같은 비선형 방정식으로 바꾸어 표현할 수 있으며,

$$T_s = A_{ss}^{-1} [(B_{sm} + B_{ss} T_s) B_{R}^{-1} A_R - A_{sm}] \quad (13)$$

여기서  $T_s$  의 하첨자  $s$  는 상태공간(state space)를 나타낸다. 식 (13)을 반복적인 형태로 표현하면,

$$T_s^{(i)} = A_{ss}^{-1} [(B_{sm} + B_{ss} T_s^{(i-1)}) B_{R}^{(i-1)} A_R^{(i-1)} - A_{sm}], \quad (i=1,2,\dots) \quad (14)$$

식 (14)에 의한 최종의 축소시스템은 다음과 같다.

$$A_R = A_{mm} + T_s^T A_{sm} + A_{ms} T_s + T_s^T A_{ss} T_s$$

$$B_R = B_{mm} + T_s^T B_{sm} + B_{ms} T_s + T_s^T B_{ss} T_s \quad (15)$$

#### 3.2 IIRS 절차

비비례 감쇠 구조시스템에 대한 IIRS 절차는 먼저, 주자유도와 부자유도 행렬로 분리된 시스템 행렬 A와 B에 대하여 Guyan에 의한 변환행렬, 축소된 시스템 행렬을 구성한 다음 고유치를 계산하고, 이들 행렬을 이용하여 IRS에 의한 변환행렬을 구성한다. 다음으로, 이 변환행렬을 이용하여 최종의 축소된 시스템 행렬을 구성한다. 고유치를 계산하여 이전 단계에서 계산한 고유치와 비교하고 계산된 고유치가 허용오차 범위 내에 있지 않게 되면 IRS에 의한 변환행렬, 시스템 행렬을 다시 Guyan의 변환행렬, 시스템 행렬로 초기화하여 고유치의 허용오차 범위 이내에 들어올 때까지 반복 계산한다. Fig. 1은 IIRS절차에 대한 순서도를 나타 낸 것이다. 여기서  $A(B)_{mm}$ ,  $A(B)_{ms}$ ,  $A(B)_{ss}$  는 분리된 주

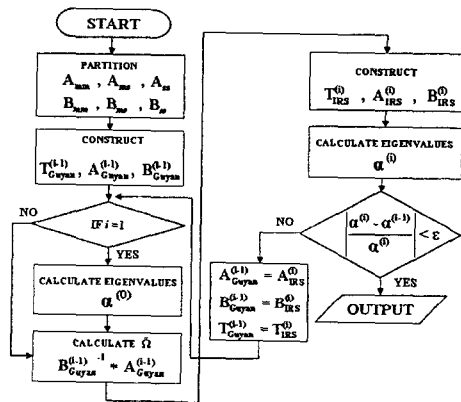


Fig. 1 Flowchart of the IIRS procedure

자유도와 부자유도 시스템 행렬을 나타내고  $T_{Guyan(I RS)}$ ,  $A(B)_{Guyan(I RS)}$  각각 변환행렬, 축소된 시스템 행렬을 나타내며,  $\alpha$  는 축소시스템에서 계산된 고유치를 나타낸다.

3.3 수치예제

수치예제를 통하여 비비례 감쇠시스템의 IIRS 방법에 대한 신뢰성을 검증한다. 본 예제에서는 구조물의 비비례 감쇠거동을 모사하기 위하여 해석 모델을 N개의 부분(part)으로 나누고 각각의 부분에 대하여 서로 다른 감쇠특성을 가지도록 한다. 따라서, 감쇠행렬은 아래의 식과 같이 나뉜진 부분들의 강성행렬에 비례상수(proportionality constant)  $\gamma$  를 곱하는 방법을 사용하여 구성한다.

$$C_i = \gamma_i \times K_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{no sum on } i) \quad (16)$$

여기서,  $C_i$ ,  $K_i$  는 각각 감쇠행렬과 강성행렬을 나타내고, 하첨자  $i$  는  $i$  번째 부 구조물을 표시하며, N 은 나뉜진 부분의 개수를 나타낸다.

또한, 비비례 감쇠 구조 시스템에 대한 축소행렬은 구조물의 물성(material property)에 따라 계산된 고유특성값의 수렴 여부가 결정된다. 이것은 비례상수값에 따라 구조물의 고유모드는 과도감쇠(overdamped)가 되는 경우가 발생하기 때문이다. 이때 고유치들의 허수부(imaginary part) 값은 0이 되며 감쇠비(damping ratio) 값은 1이 된다. 이와 같은 경우에는 본 연구에서 적용하고 있는 IIRS 방법에 의한 시스템 축소행렬의 고유특성값들은 엄밀해(exact solution)에 수렴하지 않게 된다. 그러므로 IIRS 방법은 감쇠비가 모두 1 미만의 값을 갖는 부족감쇠(underdamped) 거동의 구조시스템에만 적용이 가능하며 부구조화 기법에서도 마찬가지이다.

비비례 감쇠 시스템에서 계산된 모든 고유치들은 쥘레 복소쌍(complex conjugate pairs)의 형태를 가지므로 각 쌍에서 한 개의 고유치만 사용하도록 한다.  $i$  번째 모드에서의 고유치는 다음과 같다.

$$\alpha_i = -\sigma_i + i\theta_i \quad (17)$$

여기서,  $\sigma_i$  와  $\theta_i$  는 각각  $i$  번째 고유치의 실수부(real part)와 허수부를 나타낸다. 그리고 각각의 모드에 대한 진동수(frequency)와 감쇠비는 다음과 같이 계산된다.

$$\omega_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \theta_i^2}, \quad \beta_i = \frac{\sigma_i}{\omega_i} \quad (18)$$

축소시스템으로부터 계산된 모드에 대한 진동수의 신뢰성을 검증하기 위하여 상대오차는 다음과 같이 전체시스템에서 계산된 모드 진동수

(modal frequency)를 엄밀해로 간주하여 비교한다.

$$\text{relative error} : \varepsilon_{\omega} = \frac{|\omega_{\text{approx}} - \omega_{\text{exact}}|}{\omega_{\text{exact}}} \times 100 \quad (19)$$

3.3.1 원통형 패널

Fig. 2는 양단이 고정되어 있는 Aminpour의 4절점 셀 요소를 사용한 원통형 패널이다. 비비례 감쇠거동을 모사하기 위하여 전체시스템은 그림에서와 같이 두 개의 부분으로 나누어 서로 다른 값의 탄성계수와 감쇠행렬 구성을 위한 비례상수 값을 주었다. 총 자유도 수는 1,254이며 주자유도는 임의로 54개를 선정하여 4.3%에 해당하는 축소시스템을 구축하였다. 따라서, 감쇠행렬이 포함된 상태공간에서의 시스템 행렬 A와 B의 크기는 각각 2,508x2,508이 된다.

Table 1은 축소시스템으로부터 계산된 처음10차 모드까지의 고유치, 모드 진동수, 감쇠비를 계산한 것이다. 모두 반복 횟수를 증가할수록 엄밀해로 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. Fig. 3은 고유치로부터 계산된 모드 진동수의 상대오차를 나타낸 것이다. 5번의 반복만으로 10차 모드까지 최대오차 0.5% 이내의 매우 신뢰도 높은 모드 진동수를 얻을 수 있다.

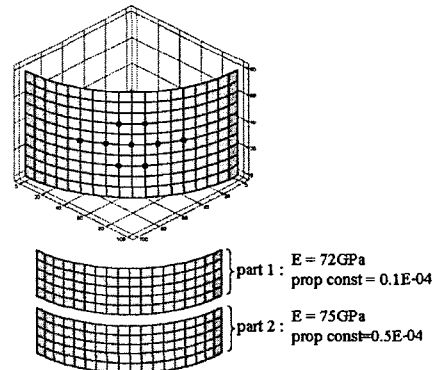


Fig. 2 Modeling and arbitrary selection of master DOFs of cylindrical panel( $\nu=0.3$ ,  $\rho=2,800 \text{ kg/m}^3$ )

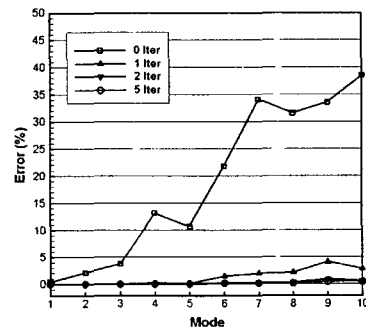


Fig. 3 Relative errors in modal frequency

**Table 1** First ten eigenvalues, modal frequencies and damping ratios of the cylindrical panel with IIRS method

Iteration / Mode		Eigenvalue				
		1	2	3	4	5
0		-0.0191+35.4268i	-0.0681+68.8251i	-0.1011+80.0277i	-0.2043+133.3630i	-0.3503+137.0400i
1		-0.0189+35.2829i	-0.0648+67.3729i	-0.0943+77.0176i	-0.1762+116.0228i	-0.2554+122.5746i
2		-0.0189+35.2827i	-0.0648+67.3688i	-0.0942+77.0063i	-0.1749+115.8487i	-0.2536+122.4255i
5		-0.0189+35.2827i	-0.0648+67.3687i	-0.0942+77.0060i	-0.1754+115.8429i	-0.2539+122.4212i
exact		-0.0189+35.2827i	-0.0648+67.3683i	-0.0942+77.0046i	-0.1760+115.8247i	-0.2543+122.4073i

Iteration / Mode		Eigenvalue				
		6	7	8	9	10
0		-0.7746+229.9408i	-1.2992+290.3524i	-1.7663+350.3928i	-2.4045+392.9915i	-3.2390+466.8840i
1		-0.4330+182.3843i	-0.6460+195.2212i	-0.8449+245.1631i	-1.1664+272.2272i	-1.2970+295.7691i
2		-0.3881+180.1530i	-0.6017+191.8964i	-0.7513+240.5962i	-0.9423+263.3044i	-1.1202+289.2661i
5		-0.3948+179.9977i	-0.6146+191.7263i	-0.7667+240.2679i	-0.9795+262.1607i	-1.1353+288.6475i
exact		-0.4144+179.7259i	-0.6290+191.3847i	-0.7883+239.8734i	-1.0923+261.0191i	-1.2271+287.4415i

Iteration / Mode		Modal frequency (rad/s)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		35.4268	68.8252	80.0277	133.3631	137.0404	229.9421	290.3553	350.3973	392.9988	466.8953
1		35.2829	67.3729	77.0177	116.0230	122.5748	182.3848	195.2223	245.1645	272.2297	295.7719
2		35.2827	67.3688	77.0063	115.8488	122.4257	180.1534	191.8973	240.5973	263.3061	289.2682
5		35.2827	67.3687	77.0060	115.8431	122.4215	179.9981	191.7272	240.2691	262.1625	288.6497
exact		35.2827	67.3683	77.0046	115.8248	122.4076	179.7264	191.3857	239.8747	261.0214	287.4441

Iteration / Mode		Damping ratio									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		0.0005	0.0010	0.0013	0.0015	0.0026	0.0034	0.0045	0.0050	0.0061	0.0069
1				0.0012		0.0021	0.0024	0.0033	0.0034	0.0043	0.0044
2							0.0022	0.0031	0.0031	0.0036	0.0039
5							0.0022	0.0032	0.0032	0.0037	0.0039
exact		0.0005	0.0010	0.0012	0.0015	0.0021	0.0023	0.0033	0.0033	0.0042	0.0043

#### 4. 부구조화 기법의 연동

##### 4.1 기본 개념

축소시스템을 구축하기 위해서는 전체 시스템에서 10% 이내의 주자유도 행렬 구성을 위해서 90% 이상의 부자유도를 제거해야 한다. 그리고 부자유도를 제거하기 위해서는 부자유도 행렬의 역행렬 연산을 통한 변환행렬이 필요하므로 제한된 메모리를 가지는 단일 PC나 Workstation에서는 변환행렬의 구성이 가장 큰 전산부담이 되고 있다. 비비례 감쇠 구조시스템에 대한 부구조화 기법 연동(combination)의 기본개념은 상태공간에서의 시스템 행렬 A, B를 여러 개의 부 시스템으로 나누고 부 시스템 단위로 주자유도, 부자유도 그리고 각 영역을 연결하는 인터페이스 자유도로 분리한 다음 각각의 시스템 별로 축소행렬을 구성하여 전체로 결합하는 것이다. 따라서 변환행렬의 크기는 전체가 아닌 부 시스템의 크기가 되므로 많은 전산부담을 줄이고 계산효율을 높일 수 있다.

##### 4.2 정식화

두 개의 부 구조를 가지는 시스템을 고려하면 전체 영역은 다음과 같이 두 개의 부 영역으로 나눌 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{mm} & A_{ms} & A_{mb} \\ A_{sm} & A_{ss} & A_{sb} \\ A_{bm} & A_{bs} & A_{bb} \end{bmatrix}_{(1)} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_m \\ \tilde{\Psi}_s \\ \tilde{\Psi}_b \end{bmatrix}_{(1)} = \tilde{\Omega} \begin{bmatrix} B_{mm} & B_{ms} & B_{mb} \\ B_{sm} & B_{ss} & B_{sb} \\ B_{bm} & B_{bs} & B_{bb} \end{bmatrix}_{(1)} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_m \\ \tilde{\Psi}_s \\ \tilde{\Psi}_b \end{bmatrix}_{(1)} \quad (20)$$
  

$$\begin{bmatrix} A_{mm} & A_{ms} & A_{mb} \\ A_{sm} & A_{ss} & A_{sb} \\ A_{bm} & A_{bs} & A_{bb} \end{bmatrix}_{(2)} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_m \\ \tilde{\Psi}_s \\ \tilde{\Psi}_b \end{bmatrix}_{(2)} = \tilde{\Omega} \begin{bmatrix} B_{mm} & B_{ms} & B_{mb} \\ B_{sm} & B_{ss} & B_{sb} \\ B_{bm} & B_{bs} & B_{bb} \end{bmatrix}_{(2)} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_m \\ \tilde{\Psi}_s \\ \tilde{\Psi}_b \end{bmatrix}_{(2)}$$

식 (20)의 두 영역을 하나로 결합하면 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\begin{bmatrix} A_{mm}^{(1)} & A_{ms}^{(1)} & A_{mb}^{(1)} \\ A_{sm}^{(1)} & A_{ss}^{(1)} & A_{sb}^{(1)} \\ A_{bm}^{(1)} & A_{bs}^{(1)} & A_{bb}^{(1)} + A_{bb}^{(2)} & A_{bs}^{(2)} & A_{bb}^{(2)} \\ & & A_{bs}^{(2)} & A_{ss}^{(2)} & A_{sb}^{(2)} \\ & & A_{bs}^{(2)} & A_{sm}^{(2)} & A_{sb}^{(2)} \\ & & A_{bm}^{(2)} & A_{bs}^{(2)} & A_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_m \\ \tilde{\Psi}_s \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \tilde{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mm}^{(1)} & \mathbf{B}_{ms}^{(1)} & \mathbf{B}_{mb}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{sm}^{(1)} & \mathbf{B}_{ss}^{(1)} & \mathbf{B}_{sb}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{bm}^{(1)} & \mathbf{B}_{bs}^{(1)} & \mathbf{B}_{bb}^{(1)} + \mathbf{B}_{bb}^{(2)} & \mathbf{B}_{bs}^{(2)} & \mathbf{B}_{bm}^{(2)} \\ & & & \mathbf{B}_{sb}^{(2)} & \mathbf{B}_{ss}^{(2)} & \mathbf{B}_{sm}^{(2)} \\ & & & & \mathbf{B}_{mb}^{(2)} & \mathbf{B}_{ms}^{(2)} & \mathbf{B}_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_s^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

식 (21)에서 두 영역의 부자유도를 제거하기 위하여 먼저 첫 번째 영역의 부자유도 상태장(state filed)인 두 번째 행에 대하여 부자유도 상태장을 주자유도와 인터페이스 자유도로 나타내면,

$$\tilde{\Psi}_s^{(1)} = -(\mathbf{A}_{ss}^{(1)} - \tilde{\Omega} \mathbf{B}_{ss}^{(1)})^{-1} [(\mathbf{A}_{sm}^{(1)} - \tilde{\Omega} \mathbf{B}_{sm}^{(1)}) \tilde{\Psi}_m^{(1)} + (\mathbf{A}_{sb}^{(1)} - \tilde{\Omega} \mathbf{B}_{sb}^{(1)}) \tilde{\Psi}_b] \quad (22)$$

식 (22)에서  $(\mathbf{A}_{ss}^{(1)} - \tilde{\Omega} \mathbf{B}_{ss}^{(1)})^{-1}$ 를  $\tilde{\Omega}$ 에 대해서 급수전개하고  $\tilde{\Omega}$ 의 1차 항까지만 고려하면,

$$(\mathbf{A}_{ss}^{(1)} - \tilde{\Omega} \mathbf{B}_{ss}^{(1)})^{-1} = (\mathbf{I} + \tilde{\Omega} \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{B}_{ss}^{(1)}) \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \quad (23)$$

식 (23)을 식 (22)에 대입하면 식 (24)와 같은 부자유도 상태장에 대한 식이 완성된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_s^{(1)} = & -\mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{A}_{sm}^{(1)} \tilde{\Psi}_m^{(1)} - \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{A}_{sb}^{(1)} \tilde{\Psi}_b + \\ & \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} (\mathbf{B}_{sm}^{(1)} - \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{A}_{sm}^{(1)}) \tilde{\Omega} \tilde{\Psi}_m^{(1)} + \\ & \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} (\mathbf{B}_{sb}^{(1)} - \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{A}_{sb}^{(1)}) \tilde{\Omega} \tilde{\Psi}_b \end{aligned} \quad (24)$$

같은 방법으로 두 번째 영역의 부자유도 상태장인 식 (21)의 네 번째 행에 대해서도 부자유도 상태장에 대한 식을 나타내면,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_s^{(2)} = & -\mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} \mathbf{A}_{sm}^{(2)} \tilde{\Psi}_m^{(2)} - \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} \mathbf{A}_{sb}^{(2)} \tilde{\Psi}_b + \\ & \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} (\mathbf{B}_{sm}^{(2)} - \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} \mathbf{A}_{sm}^{(2)}) \tilde{\Omega} \tilde{\Psi}_m^{(2)} + \\ & \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} (\mathbf{B}_{sb}^{(2)} - \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} \mathbf{A}_{sb}^{(2)}) \tilde{\Omega} \tilde{\Psi}_b \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)를 다시 정리하면 식 (26)과 같이 주자유도와 인터페이스 자유도를 가지는 상태장으로서의 변환관계로 나타낼 수 있으며,

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_s^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{sm}^{(1)} + \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} (\mathbf{B}_{sm}^{(1)} + \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sm}^{(1)}) \tilde{\Omega} & \mathbf{T}_{sb}^{(1)} + \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} (\mathbf{B}_{sb}^{(1)} + \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sb}^{(1)}) \tilde{\Omega} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서,  $\mathbf{T}_{sm}^{(1)} = -\mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{A}_{sm}^{(1)}$ ,  $\mathbf{T}_{sb}^{(1)} = -\mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} \mathbf{A}_{sb}^{(1)}$ 이다.

같은 방법으로 두 번째 영역에 대해서도 식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{bs}^{(2)} + \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} (\mathbf{B}_{bs}^{(2)} + \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{bs}^{(2)}) \tilde{\Omega} & \mathbf{T}_{sm}^{(2)} + \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} (\mathbf{B}_{sm}^{(2)} + \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{sm}^{(2)}) \tilde{\Omega} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

여기서,  $\mathbf{T}_{bs}^{(2)} = -\mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} \mathbf{A}_{bs}^{(2)}$ ,  $\mathbf{T}_{sm}^{(2)} = -\mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} \mathbf{A}_{sm}^{(2)}$ 이다.

식 (26)과 식 (27)을 결합하면 전체영역에 대한 변환관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_s^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{sm}^{(1)} & \mathbf{T}_{sb}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{bs}^{(2)} & \mathbf{T}_{sm}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

여기서, 변환행렬의 성분들은 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} &= \mathbf{T}_{sm}^{(1)} + \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} (\mathbf{B}_{sm}^{(1)} + \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sm}^{(1)}) \tilde{\Omega} \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} &= \mathbf{T}_{sb}^{(1)} + \mathbf{A}_{ss}^{(1-1)} (\mathbf{B}_{sb}^{(1)} + \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{sb}^{(1)}) \tilde{\Omega} \\ \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} &= \mathbf{T}_{bs}^{(2)} + \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} (\mathbf{B}_{bs}^{(2)} + \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{bs}^{(2)}) \tilde{\Omega} \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} &= \mathbf{T}_{sm}^{(2)} + \mathbf{A}_{ss}^{(2-1)} (\mathbf{B}_{sm}^{(2)} + \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{sm}^{(2)}) \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (29)$$

식 (21)을 사용한 최종의 축소시스템은 다음과 같이 구축된다.

$$\mathbf{A}_{IRS} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)T} & \mathbf{I} & \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mm}^{(1)} & \mathbf{A}_{ms}^{(1)} & \mathbf{A}_{mb}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{sm}^{(1)} & \mathbf{A}_{ss}^{(1)} & \mathbf{A}_{sb}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{bm}^{(1)} & \mathbf{A}_{bs}^{(1)} & \mathbf{A}_{bb}^{(1)} + \mathbf{A}_{bb}^{(2)} & \mathbf{A}_{bs}^{(2)} & \mathbf{A}_{bm}^{(2)} \\ & & & \mathbf{A}_{sb}^{(2)} & \mathbf{A}_{ss}^{(2)} & \mathbf{A}_{sm}^{(2)} \\ & & & & \mathbf{A}_{mb}^{(2)} & \mathbf{A}_{ms}^{(2)} & \mathbf{A}_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{B}_{IRS} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)T} & \mathbf{I} & \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mm}^{(1)} & \mathbf{B}_{ms}^{(1)} & \mathbf{B}_{mb}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{sm}^{(1)} & \mathbf{B}_{ss}^{(1)} & \mathbf{B}_{sb}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{bm}^{(1)} & \mathbf{B}_{bs}^{(1)} & \mathbf{B}_{bb}^{(1)} + \mathbf{B}_{bb}^{(2)} & \mathbf{B}_{bs}^{(2)} & \mathbf{B}_{bm}^{(2)} \\ & & & \mathbf{B}_{sb}^{(2)} & \mathbf{B}_{ss}^{(2)} & \mathbf{B}_{sm}^{(2)} \\ & & & & \mathbf{B}_{mb}^{(2)} & \mathbf{B}_{ms}^{(2)} & \mathbf{B}_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} & \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

식 (30)과 식 (31)로부터 축소된 고유치 문제는 다음과 같으며,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{IRS}^{(11)} & \mathbf{A}_{IRS}^{(12)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{IRS}^{(21)} & \mathbf{A}_{IRS}^{(22)} & \mathbf{A}_{IRS}^{(23)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{IRS}^{(32)} & \mathbf{A}_{IRS}^{(33)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} = \tilde{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{IRS}^{(11)} & \mathbf{B}_{IRS}^{(12)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{IRS}^{(21)} & \mathbf{B}_{IRS}^{(22)} & \mathbf{B}_{IRS}^{(23)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{IRS}^{(32)} & \mathbf{B}_{IRS}^{(33)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_m^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_b \\ \tilde{\Psi}_m^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

여기서, 축소된 강성행렬과 질량행렬의 각 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{IRS}^{(11)} &= \mathbf{A}_{mm}^{(1)} + \mathbf{A}_{ms}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{A}_{sm}^{(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{A}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} \\ \mathbf{A}_{IRS}^{(12)} &= \mathbf{A}_{mb}^{(1)} + \mathbf{A}_{ms}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{A}_{sb}^{(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{A}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} \\ \mathbf{A}_{IRS}^{(22)} &= \mathbf{A}_{bb}^{(1)} + \mathbf{A}_{bs}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)T} \mathbf{A}_{bs}^{(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)T} \mathbf{A}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} \\ &+ \mathbf{A}_{bb}^{(2)} + \mathbf{A}_{bs}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)T} \mathbf{A}_{sb}^{(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)T} \mathbf{A}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{bs(2)} \\ \mathbf{A}_{IRS}^{(23)} &= \mathbf{A}_{bm}^{(2)} + \mathbf{A}_{bs}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} \mathbf{A}_{sm}^{(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} \mathbf{A}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} \\ \mathbf{A}_{IRS}^{(33)} &= \mathbf{A}_{mm}^{(2)} + \mathbf{A}_{ms}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} \mathbf{A}_{sm}^{(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} \mathbf{A}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{IRS}^{(11)} &= \mathbf{B}_{mm}^{(1)} + \mathbf{B}_{ms}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{B}_{sm}^{(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)} \\
 \mathbf{B}_{IRS}^{(12)} &= \mathbf{B}_{mb}^{(1)} + \mathbf{B}_{ms}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{B}_{sb}^{(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(1)T} \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} \\
 \mathbf{B}_{IRS}^{(22)} &= \mathbf{B}_{bb}^{(1)} + \mathbf{B}_{bs}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)T} \mathbf{B}_{sb}^{(1)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)T} \mathbf{B}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(1)} \\
 &\quad + \mathbf{B}_{bb}^{(2)} + \mathbf{B}_{bs}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)T} \mathbf{B}_{sb}^{(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)T} \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} \\
 \mathbf{B}_{IRS}^{(23)} &= \mathbf{B}_{bm}^{(2)} + \mathbf{B}_{bs}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)T} \mathbf{B}_{sm}^{(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)T} \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sb(2)} \\
 \mathbf{B}_{IRS}^{(33)} &= \mathbf{B}_{mm}^{(2)} + \mathbf{B}_{ms}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} \mathbf{B}_{sm}^{(2)} + \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)T} \mathbf{B}_{ss}^{(2)} \mathbf{T}_{IRS}^{sm(2)}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

4.3 IIRS 방법과의 연동 절차

IIRS 방법이 부구조화 기법에 연동되는 절차는 앞 절의 단일 시스템에 대한 IIRS 절차와 동일하나 모든 행렬연산이 전체 영역에서가 아닌 나뉜 부 영역에서 이루어지고 있는 점이 다르다. 따라서 각 부 영역에서의 부자유도 행렬의 크기는 나뉜 시스템 행렬의 크기가 되며 변환행렬의 크기도 마찬가지로이다. 이것은 제한된 컴퓨터 메모리를 가지고서도 전체 영역을 여러 개의 부 영역으로 적절하게 나눌 수 있다면 많은 수의 자유도를 갖는 구조문제에 대해서도 동적 해석이 가능하다는 것을 의미한다. Fig. 4는 IIRS방법이 부구조화 기법에 연동되는 절차에 대한 순서도이다. 여기서  $\mathbf{A}(\mathbf{B})_{mm}^{d1(d2)}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{B})_{ms}^{d1(d2)}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{B})_{ss}^{d1(d2)}$  는 부 영역별로 나뉜 주자유도와 부자유도의 시스템 행렬을 나타내고  $\mathbf{T}_{C_{Gysn}(IRS)}^{d1(d2)}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{B})_{C_{Gysn}(IRS)}^{d1(d2)}$  부 영역별로 분리된 변환행렬, 축소된 시스템 행렬을 나타내며,  $\mathbf{A}(\mathbf{B})^{(i-1)}$  은 이전 단계에서 결합된 최종의 시스템 축소행렬을 나타내며,  $\alpha$  는 축소시스템에서 계산된 고유치를 나타낸다.

4.4 수치예제

4.4.1 단순 외팔보 구조물

Fig. 5 는 한쪽면이 고정된 CST 요소를 사용한

단순 외팔보 구조물로 총 자유도 수는 128이다. 따라서 상태공간에서의 시스템 행렬 A와B의 크기는 256x256이 된다. 부 영역은 세 개로 나누었으며 각각의 부 영역은 인터페이스 자유도를 포함 총 24개를 선정하여 18.8%에 해당하는 축소시스템을 구축하였다. 축소시스템을 구축할 때 가장 큰 메모리가 필요한 부자유도 행렬의 크기를 전체 시스템과 비교해 보면 전체 시스템에서는  $\mathbf{A}_{ss}$ 의 크기가 208x208이었으나, 세 개의 동일한 크기의 부 영역에서는 각각 96x96으로 줄어들게 되는 것을 알 수 있다.

Table 2는 부구조화 기법을 연계하여 구축한 축소시스템으로부터 계산된 고유치, 모드 진동수, 감쇠비를 나타낸 것이며, Fig. 6은 모드 진동수에 대한 상대오차를 나타낸 것이다. 반복횟수를 증가할수록 모두 엄밀해로 수렴하는 것을 볼 수 있으며 모드 진동수에 대한 상대오차는 10회 반복 후 10차 모드까지 1.8% 이내로 계산되었다.

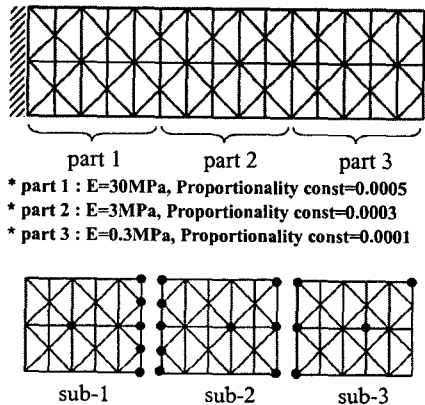


Fig. 5 Modeling and arbitrary selection of master DOFs of simple cantilever beam structure( $\nu=0.3$ ,  $\rho=0.01 \text{ kg/m}^3$ )

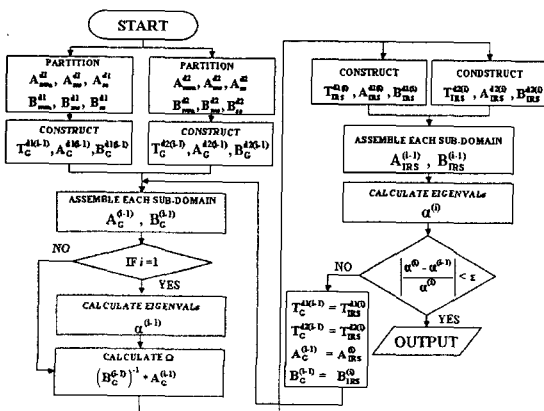


Fig. 4 Flowchart of the IIRS procedure combined with sub-structuring scheme

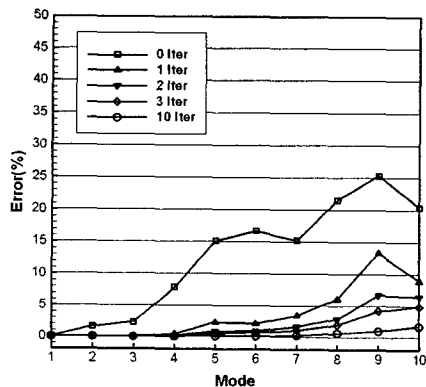


Fig. 6 Relative errors in modal frequency

**Table 2** First ten eigenvalues, modal frequencies and damping ratios of simple cantilever beam structure with sub-structuring scheme

Iteration / Mode	Eigenvalue				
	1	2	3	4	5
0	-0.0024+3.3888i	-0.0660+17.5017i	-0.1636+26.2289i	-0.4174+43.9312i	-0.9900+71.8594i
1	-0.0024+3.3866i	-0.0636+17.2283i	-0.1546+25.6372i	-0.3485+40.6595i	-0.7356+61.4109i
2		-0.0636+17.2269i	-0.1544+25.6305i	-0.3439+40.5519i	-0.6607+61.5281i
3		-0.0636+17.2267i	-0.1544+25.6296i	-0.3447+40.5311i	-0.6618+61.3361i
10 exact	-0.0024+3.3866i	-0.0636+17.2263i	-0.1544+25.6278i	-0.3453+40.4945i	-0.6857+61.0917i
10 exact	-0.0024+3.3866i	-0.0636+17.2261i	-0.1544+25.6271i	-0.3452+40.4787i	-0.6897+60.9783i

Iteration / Mode	Eigenvalue				
	6	7	8	9	10
0	-1.1347+75.6889i	-1.2301+87.8388i	-2.2657+106.3453i	-2.5052+117.7039i	-2.7160+125.1421i
1	-0.7954+64.3892i	-0.9808+77.0969i	-1.4739+88.8553i	-1.9952+101.3920i	-2.2712+109.3925i
2	-0.7512+63.6650i	-0.8852+75.7238i	-1.0937+85.8853i	-1.1814+94.2466i	-1.7713+106.5755i
3	-0.7566+63.4765i	-0.8840+75.2917i	-1.0697+85.0699i	-1.1660+91.7718i	-1.0550+104.7703i
10 exact	-0.7634+63.1481i	-0.9048+74.6657i	-1.1911+83.9711i	-1.3336+88.7938i	-1.5046+101.3763i
10 exact	-0.7616+63.0218i	-0.9076+74.4445i	-1.2203+83.4021i	-1.3477+87.8574i	-1.6243 + 99.6007i

Iteration / Mode	Modal frequency (rad/s)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3.3888	17.5018	26.2294	43.9331	71.8662	75.6974	87.8474	106.3694	117.7305	125.1716
1	3.3866	17.2285	25.6376	40.6610	62.4153	64.3941	77.1031	88.8675	101.4117	109.4163
2		17.2270	25.6310	40.5533	61.5317	63.6695	75.7289	85.8922	94.2540	106.5903
3		17.2268	25.6300	40.5326	61.3397	63.4810	75.2969	85.0766	91.7792	104.7756
10 exact	3.3866	17.2263	25.6283	40.4960	61.0956	63.1528	74.6711	83.9769	88.8038	101.3875
10 exact	3.3866	17.2262	25.6275	40.4812	60.9822	63.0264	74.4500	83.4110	87.8677	99.6139

Iteration / Mode	Damping ratio									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.0007	0.0038	0.0062	0.0095	0.0138	0.0150	0.0140	0.0213	0.0213	0.0217
1		0.0037	0.0060	0.0086	0.0118	0.0124	0.0127	0.0165	0.0197	0.0208
2				0.0085	0.0107	0.0118	0.0117	0.0127	0.0125	0.0166
3					0.0108	0.0119	0.0117	0.0126	0.0127	0.0101
10 exact	0.0007	0.0037	0.0060	0.0085	0.0112	0.0121	0.0121	0.0142	0.0150	0.0148
10 exact	0.0007	0.0037	0.0060	0.0085	0.0113	0.0121	0.0122	0.0146	0.0153	0.0163

4.3.2 단순 지지 평판

Fig. 7은 양쪽 면이 고정되어 있는 단순 평판 구조물이다. 유한요소 모델은 비정렬 격자로 구성된 Aminpour의 4절점 쉘 요소를 사용하였으며 총 자유도수는 1,830이다. 따라서 상태공간에서의 시스템 행렬 A와 B의 크기는 3,660×3,660이 된다. Fig. 8에서 보듯이 본 예제에서는 구조 모델을 두 개의 부분으로 나누었으며 부 영역은 4.3.1의 예제와 다르게 나뉜 부분의 수직방향으로 나누어 각 부 영역별로 서로 다른 감쇠특성을 갖도록 하였다. 주자유도는 각 부 영역별로 인터페이스 자유도와 영역 내에서 임의로 선정된 주자유도를 합하여 총 180개를 선정하였으며 축소비율은 9.8%이다.

Table 3은 축소시스템으로부터 계산된 고유치, 모드에 대한 진동수, 감쇠비를 나타낸 것이다. 모든 계산된 고유특성값들은 반복을 통하여 엄밀해에 잘 수렴해 가는 것을 볼 수 있다. Fig. 9는 모드

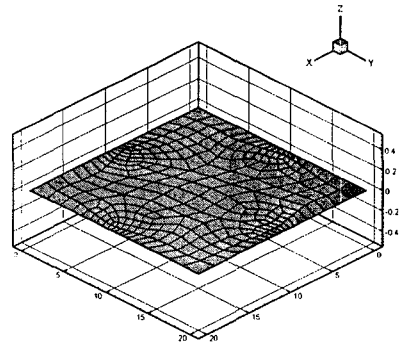


Fig. 7 Simple plate( $\nu=0.3, \rho=2800 \text{ kg/m}^3$ )

진동수에 대한 상대오차를 나타낸 것이다. 총 10회의 반복으로 최대 상대오차 0.2% 이내의 매우 정확한 모드 진동수가 계산되었다.



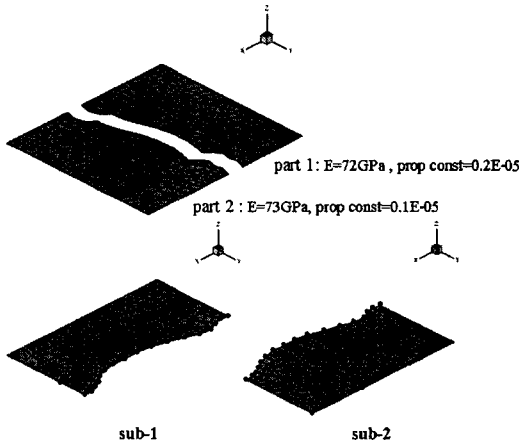


Fig. 8 Arbitrary selection of master DOFs of simple plate at each sub-domain

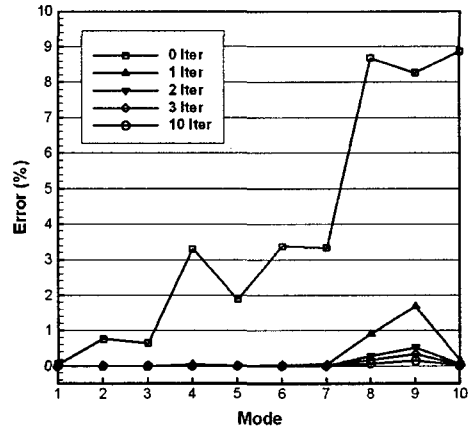


Fig. 9 Relative errors in modal frequency

Table 3 First fifteen eigenvalues, modal frequencies and damping ratios of the simple plate with sub-structuring scheme

Iteration / Mode	Eigenvalue( $\times 10^3$ )				
	1	2	3	4	5
0	-0.0498+261.6361i	-0.4937+872.0088i	-0.6503+986.9762i	-1.2023+1344.3051i	-2.0395+1707.4760i
1	-0.0497+261.4935i	-0.4875+865.4528i	-0.6387+980.6589i	-1.1156+1300.5681i	-1.9616+1675.6701i
2		-0.4875+865.4411i	-0.6387+980.6492i	-1.1136+1299.9940i	-1.9609+1675.4794i
3		-0.4875+865.4405i	-0.6387+980.6484i	-1.1141+1299.9608i	-1.9612+1675.4674i
10 exact	-0.0497+261.4935i	-0.4875+865.4389i	-0.6387+980.6464i	-1.1147+1299.8956i	-1.9612+1675.4406i
		-0.4875+865.4365i	-0.6387+980.6440i	-1.1149+1299.8176i	-1.9611+1675.4025i

Iteration / Mode	Eigenvalue( $\times 10^3$ )				
	6	7	8	9	10
0	-3.2759+2244.6303i	-3.6727+2372.4016i	-5.1000+2749.2636i	-6.3319+3009.5126i	-7.1534+3134.3702i
1	-3.0830+2169.7689i	-3.4179+2294.3289i	-4.3735+2533.4071i	-4.3076+2808.1209i	-5.7192+2860.1711i
2	-3.0800+2169.2046i	-3.4150+2293.6515i	-4.2318+2517.5674i	-3.9737+2775.3540i	-5.6997+2857.6022i
3	-3.0806+2169.1389i	-3.4160+2293.5857i	-4.2355+2514.9239i	-3.9635+2770.3162i	-5.7040+2857.3123i
10 exact	-3.0807+2168.9838i	-3.4165+2293.4455i	-4.2794+2512.4659i	-4.0620+2765.2056i	-5.7051+2856.7389i
	-3.0802+2168.8355i	-3.4161+2293.3110i	-4.3008+2510.5355i	-4.1167+2760.9659i	-5.7023+2856.2565i

Iteration / Mode	Modal frequency ( $\times 10^3$ , rad/s)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.2616	0.8720	0.9870	1.3443	1.7075	2.2446	2.3724	2.7493	3.0095	3.1344
1	0.2615	0.8655	0.9807	1.3006	1.6757	2.1698	2.2943	2.5334	2.8081	2.8602
2		0.8654	0.9806	1.3000	1.6755	2.1692	2.2937	2.5176	2.7754	2.8576
3				1.3000	1.6755	2.1691	2.2936	2.5149	2.7703	2.8573
10 exact				1.2999	1.6754	2.1690	2.2934	2.5125	2.7652	2.8567
	0.2615	0.8654	0.9806	1.2998	1.6754	2.1688	2.2933	2.5105	2.7610	2.8563

Iteration / Mode	Damping ratio( $\times 10^3$ )									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.0190	0.0566	0.0659	0.0894	0.1194	0.1459	0.1548	0.1855	0.2104	0.2282
1		0.0563	0.0651	0.0858	0.1171	0.1421	0.1490	0.1726	0.1534	0.2000
2				0.0857	0.1170	0.1420	0.1489	0.1681	0.1432	0.1995
3				0.0857	0.1171		0.1489	0.1684	0.1431	0.1996
10 exact				0.0857			0.1490	0.1703	0.1469	0.1997
	0.0190	0.0563	0.0651	0.0858	0.1171	0.1420	0.1490	0.1713	0.1491	0.1996

## 5. 결 론

## 참고문헌

유한요소법을 사용한 동적 해석을 수행하기 전에 시스템 행렬을 축소하는 방법은 제한된 전산 자원 면에서 매우 효율적인 방법이다. 그러나 지금까지 연구되어온 많은 축소방법들은 실제적인 유한요소모델에 적용하기에는 제한적일 수 밖에 없으며, 특히 비비례 감쇠 구조시스템은 상태공간에서의 시스템 행렬을 구성해야 하므로 많은 메모리가 필요하다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 반복적 IRS 방법에 부구조화 기법을 연동시키는 알고리즘을 개발하였으며 이로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 연구를 통하여 개발된 알고리즘은 몇 가지 수치예제를 통하여 축소시스템으로부터 계산된 고유특성값들이 반복을 통하여 전체 시스템에서 계산된 고유특성값들로 잘 수렴하는 것을 확인하였다.

(2) 부구조화 기법을 연동시킨 IIRS 방법은 축소된 시스템 행렬을 구축할 때 전체 영역을 소단위의 부 영역으로 나누어 구축하므로 많은 컴퓨터 메모리가 요구되지 않아 비교적 큰 구조물에 대해서도 효율적으로 구축할 수 있다.

(3) 본 연구에서 개발된 방법은 비비례 감쇠 구조 시스템에 대한 진동해석, 구조 최적화, 진동 제어 등의 여러 분야에 매우 효율적으로 사용될 수 있을 것이다.

(4) 그러나 이미 Part I 에서도 언급하였듯이 본 연구를 통하여 개발된 방법은 부 영역별로 주자유도 선정 시 인터페이스 자유도를 모두 포함시켜야 하므로 트러스나 평판, 셸과 같은 1, 2차원 구조물에 대해서는 매우 효율적이거나 부 영역으로 나뉘었을 경우 많은 인터페이스 자유도가 발생하는 솔리드 구조물과 같은 모델에 대해서는 축소 효율이 다소 떨어지는 단점을 가지고 있다. 따라서 좀더 보편적으로 사용되기 위해서는 인터페이스 자유도를 주자유도와 부자유도로 분리하여 부자유도를 미리 제거하는 추가적인 연구가 필요하다.

## 후 기

본 연구는 국방과학연구소 및 서울대학교 비행체특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구결과입니다.

- (1) Robert J. Guyan, 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, p. 380.
- (2) Bruce Irons., 1965, "Structural Eigenvalue Problems-elimination of Unwanted Variables," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 5, pp. 961~962.
- (3) Friswell M. I., Garvey S. D. and Penny J. E. T., 1995, "Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, No. 2, pp. 311~323.
- (4) Friswell M. I., Garvey S. D. and Penny J. E. T., 1998, "The Convergence of the Iterated IRS Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 1, pp. 123~132.
- (5) Qu Z. -Qu. and Fu Z. -F., 1998, "New Structural Dynamic Condensation Method for Finite Element Models," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 7, pp. 1320~1324.
- (6) Rivera M. A., Singh M. P. and Suarez L. E., 1999, "Dynamic Condensation Approach for Nonclassically Damped Structures," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 5, pp. 564~571.
- (7) Qu Zu-Qing and R. Panneer Selvam, 2002, "Efficient Method for Dynamic Condensation of Nonclassically Damped Vibration Systems," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 2, pp. 368~375.
- (8) Qu Z. -Q., Jung Y. and Selvam R. P., 2003, "Model Condensation for Non-Classically Damped Systems - Part I : Static Condensation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 5, pp. 1003~1016.
- (9) Qu Z. -Q., Selvam R. P. and Jung Y., 2003, "Model Condensation for Non-Classically Damped Systems - Part II : Iterative Schemes for Dynamic Condensation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 5, pp. 1017~1032.
- (10) Hyungi Kim and Maenghyo Cho, 2006, "Two-Level Scheme for Selection of Degrees of Freedom and Semi-Analytic Sensitivity Based on the Reduced System," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, Issues. 33-36, pp. 4244~4268.
- (11) Hyungi Kim and Maenghyo Cho, 2005, "Dynamic Analysis of Reduced System Partitioned by Domain Decomposition," *46<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA 2005-2297.
- (12) Hyungi Kim and Maenghyo Cho, 2006, "Improvement of Reduction Method Combined with Sub-domain Scheme in Large Scale Problem," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, (in press).
- (13) Hyungi Kim et al., 2006, "Study on the Reduced System Based on the Sub-Domain Method," *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 30, No. 9, pp. 1062~1069.
- (14) Hyungi Kim and Maenghyo Cho, 2006, "Structural Design Optimization on the Reduced System Constructed from Large-Scaled Problem," *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 30, No. 9, pp. 1070~1077.