대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.4, 467-486. Dec. 2007

수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할

손 홍 찬* · 류 희 찬**

이 논문은 스프레드시트를 활용한 수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화과정에 어떤 영향을 미치는 지를 고찰한 것이다. 좀 더 자세히 살피면 수학적 모델링에서 스프레드시트 모델의 활용은 학생이 분석 불가능한 수학적 모델도 분석할 수 있도록 해줌으로써 모델을 단순화하지 않고, 대신 모델을 정교화할 수 있는 기회를 제공하고 수학적 개념을 확장해 나갈 수 있음을 보였다. 또한 수학적 모델을 스프레드시트 모델로 변환하여, 수학적 모델로부터 수학적 결론을 얻는 단계를 거치지 않고도 실세계 상황을 해석하고 설명할 수 있는 기회를 제공할 수 있음을 보였다.

Ⅰ. 머리말

수학적 모델링이란 일반적으로 현실 세계 문제 상황을 수학적 모델을 도출하여 문제의 답을 얻어내는 과정으로 대략 다음과 같은 네 단계를 갖는다(Dossey, McCrone, Ciordano, & Weir, 2002). 첫 번째 단계는 주어진 실세계 상황을 모델로 나타내는 모델 형성 단계, 두 번째 단계는 모델을 분석하여 결론에 이르는 단계, 세 번째 단계는 모델을 해석하여 예측하고 설명하는 단계, 네 번째 단계는 결론이 주어진 실세계 상황에 맞는지 여부를 검증해보는 단계이다. 모델링 과정은 한 번으로 끝나지 않고 실세계 상황을 보다 잘 설명할 수 있는 모델을 얻을 때까지 되풀이 될 수 있다. 상황을 설명하는 데 도움이 되는 변인을 추가로 생각하거나 그들 사이의 관계를 새롭게 하여 새로운 모델을 만드는 과정을 모델의 정교화라고 한다.

수학적 모델링을 하는 데는 그래프, 수식, 표, 기하학적 도형 등과 같은 다양한 수학적 표상 또는 고안물을 만들 필요가 있고, 한 가지 지식만이 아닌 여러 가지 지식이 동시에 요구되며 이들 사이의 관계를 파악할 필요가 있다. 모델링을 하는 활동에서 공학을 사용하면 다양한 수학적 표상을 쉽게 만들 수 있고, 이들 사이의 연결을 통해 수학적 개념의 의미를 용이하게 파악할 수 있어 수학 내적 연결을 강화하고 실제적 문제 상황과 수학적 표상의 연결을 통하여 수학과 실생활과의 외적 연결을 강화할 수 있다(Ferrucci & Carter, 2003). 또한 학생이 공학을 이용하면 수학의 어떤 분야에서 얻은 아이디어들을 다른 분야를 이해하는데 더 잘 사용할 수 있어 대수, 기하, 자료 분석과 같은 주제 사이의 구분도 의미가 줄어든다(NCTM, 2000). 공학의 활용에서 나타나는 이와 같은 특징은 수학 내적

* 한국교육과정평가원(hcson@kice.re.kr)
** 한국교원대학교(hclew@knue.ac.kr)

연결 및 외적 연결 모두가 중요시되는 모델링 활동 전반에서 중요한 영향을 미칠 수 있다. 공학의 한 가지인 스프레드시트 환경에서는 상호작용적이고 시각적으로 모델을 만들 수 있으며 'what if' 모델링을 통해 문제 상황의 여러 가지 측면을 탐구할 수 있다(Neuwirth & Arganbright, 2004). 이러한 이유로 본 연구에서는 공학으로 스프레드시트를 선택하였다. 스프레드시트를 이용한 근래의 연구에서 김현주(2005)는 스프레드시트 활용을 통하여 학생은 문자를 어떤 대상을 대신하는 것으로 인식할 수 있었고, 같은 대상은 다른 문자로 그리고 다른 대상을 같은 문자로 나타낼 수 있음을 인식할 수 있음을 보고하였고, 김지연(2005)은 엑셀을 활용한 소그룹 모델링에서 모델링 주기의 형성, 학생들의 상호작용의 유형이 모델 형성에 미치는 영향 그리고 모델의 정교화에 사용된 전략 등에 대해 논의하면서 학생 간 의사소통 및 교사 중재 정도 등이 모델링에 영향을 미치고, 엑셀 환경과 지필 환경의 상호보완이 필요하다는 것, 그리고 학생 간 적극적인 동의나 비동의가 이루어지는 경우에 주로 안정된 형태의 정교화된 모델이 구성된다고 주장한 바 있다.

이 논문에서는 학생이 스프레드시트를 활용한 모델링 활동에서 모델의 정교화 과정에 대한 구체적인 사례를 통하여, 학생이 분석 불가능한 수학적 모델을 스프레드시트 모델을 이용하여 분석할 수 있어서 모델을 단순화하지 않고, 대신 모델을 정교화할 수 있는 기회를 얻고 아울러 정교화 과정에서 학생이 가지고 있는 수학적 개념을 확장해 나갈 수 있음을 보이고자 하였다.

이 논문에서 수학적 모델은 실세계 현상을 연구하기 위해 만들어진 수학적 고안물로 그래프, 수식, 기하학적 도형 등을 의미한다. 스프레드시트 모델(Neuwirth & Arganbright, 2004)은 대수식을 스프레드시트 환경에 맞는 식으로 바꾼 스프레드 수식, 그 수식으로부터 얻게 되는 표나 그래프, 그리고 스크롤바 등을 이용한 시뮬레이션 환경을 뜻한다. 스프레드시트 모델과 구분하기 위해 수학적 모델에 시뮬레이션 상황은 포함시키지 않는다.

II. 이론적 배경

여기에서는 수학적 모델링, 문제해결과 문장제 등에 대한 몇 가지 의견을 살피고 수학적 모델링의 특징과 그 과정을 좀 더 자세히 논하기로 한다.

1. 수학적 모델링과 문제해결

수학적 모델링이 중등 수학교육과정에 영향을 미치기 시작한 것은 1960년대의 새수학 운동이 지향한 형식주의에 대한 반성에서 1970년대에 전 세계적으로 수학의 응용과 현실 세계와의 연결성을 강조하는 운동이 일어나면서부터이다(Blum, 1989). 수학적 모델링이 중등 수학교과육정에 영향을 미치기 시작한 것은 대략적으로 40여년이 되어가며, 그 중요성이 날로 커져가고 있고, 미국에서는 모든 수준의 학생은 그들 수준에 맞게 다양한 현상을 모델링할 수 있는 기회를 가져야만 한다고 보고 있다 (NCTM, 2000).

수학적 모델링은 그 이름이 시사하는 바와 같이 현실 세계에 있는 문제 상황으로부터 출발한다. 이 때 현실 세계를 수학적으로 해결하고자 하는 데서 나오는 방법들인 수학적 모델링, 응용수학, 문장제(word problem) 또는 과학적 방법 들 사이에 유사한 측면이 있다. 이들의 개념에 대한 의견은 다양하지만 몇 사람의

의견을 살피고, 다른 것에 비해 수학적 모델링이 두드러지게 갖는 특징을 살펴본다.

Henry O. Pollack(1997)은 실제 세계 문제를 수학적으로 해결할 수 있는 과정에서 나타나는 수학적 모델링, 응용수학, 문장제(word problem) 등을 다음과 같은 단계를 두어 구분하였다.

(1) 이해하고자 하는 수학 외적인 상황에서 출발하여, 해결 가능하고 잘 정의된 실세계 문제를 얻는다.

(2) 상황 속의 중요한 대상이나 관계를 선택하여 탐구하고자 하는 중요 개념을 확인한다.

(3) 대상과 그 관계들에 관한 지식들 중 어떤 것을 무시하고 선택할 지를 결정한다. 그 결과로 이상화된 문제를 얻는다.

(4) 위 (3)의 결과로 얻게 된 이상화된 문제를 수학적인 용어로 번역한다. 그 결과로 수학적 문제를 얻는다.

(5) 수학의 영역을 구별하고 이 영역에서의 직관과 지식을 일깨운다.

(6) 수학을 한다. 그 결과로 해, 정리, 특이한 경우, 알고리즘, 근사치 등을 얻는다.

(7) 원래 문제 상황으로 번역한다.

(8) 원래 상황으로 번역했을 때 들어맞는지 검토한다. 들어맞지 않으면 처음으로 돌아간다.

Pollack은 위 전 범위를 모델링 과정으로 보았다. 응용수학은 (4)~(7)까지를 의미하는 것으로 보고, 특히 (6)에서의 수학적 방법에 초점을 맞추는 것으로 보았다. 문장제는 수학 밖의 몇몇 단어들로부터 시작하여 (4)를 거쳐 (6)에 초점을 맞추는 것으로 보고, 이 경우에는 주로 (5)가 명백하며 교과서에서 자주 볼 수 있다고 하였다. 문제해결에 대해서는 일치된 견해는 없다고 전제하면서, 응용수학, 문장제, 수학적 모델링 어느 것도 될 수 있다고 보았다. 어떤 경우에는 수학 외적 상황이 전혀 필요 없을 수도 있고, 외적 상황이 주어지는 경우로 (4)에서 출발하는 응용수학이나 문장제일 경우에는 (1)~(3)을 문제 해결 과정에서의 '문제 발견' 또는 '문제 형성'으로 보았다. 그리고 다른 것에 대해 수학적 모델링이 갖는 특징은 본원적 상황의 이해이고 수학적인 작업의 결과가 외부 세계에 의미를 전해주는 것이라고 보았다. Swetz(1991)도 수학교육자마다 문제해결에 대해 서로 다른 의미를 부여할 수 있다는 것을 전제하면서 수학적 모델링이 문제해결의 한 가지라고 보았다. 계산 문제, 문장제 그리고 마방진이나 하노이 탑 문제와 같은 퍼즐의 풀이와 같은 것도 문제해결의 예로 들었다. 그리고 수학적 모델링은 문제해결의 여러 특징을 공유하면서도, 선거 결과의 예측, 유가의 장기 전망 또는 산림의 성장 패턴 등과 같이 수학적으로 보이지 않는 정치, 경제 또는 생태학에 연관된 상황에서, 중요한 요인을 구별하고 그들 사이의 관계를 결정하고 그 관계를 수학적으로 해석하고 수학적 해석을 통해 현상을 분석하고 결론을 얻는 데 그 독특한 특징이 있다고 보았다.

본래 자연세계를 탐구하는 과학적 방법과 수학적 모델링 사이에도 많은 유사점이 있다. 이에 대해 Dossey(2002)는 다음과 같이 과학적 방법의 절차를 나열하고 두 방법 사이의 유사점과 차이점을 밝혔다.

(1) 현상에 대한 일반적 관찰을 한다.

(2) 현상에 대해 가설을 세운다.

(3) 가설을 검증할 방법을 개발한다.

(4) 검사에 사용할 자료를 모은다.

(5) 자료를 사용하여 가설을 검증한다.

(6) 가설을 채택하거나 기각한다.

그는 과학적 방법과 모델링에는 가정을 하고

가설을 세우는 점, 실세계 자료를 모으는 점, 그 자료를 사용하여 가설을 검증하거나 증명하는 점에서 유사성이 있지만 주된 목적에서 두 가지 방법은 서로 다르다고 보았다. 수학적 모델링의 목적은 과학적 방법과는 달리 모델을 채택하거나 기각하는 것이 아니라 모델을 가설화하여 그 합리성을 검증하는 것에 있으며, 모델링 과정에서는 어떤 변인을 취하느냐, 변인들 사이의 관계를 어떻게 설정하느냐에 따라 타당할 수도 있는, 또는 타당하지 않을 수도 있는 가정을 할 수 있다고 보았다. 만일 모델이 만족할 만하고 유용하면 그 모델을 받아들여 선택하고, 그렇지 않으면 새로운 모델을 만들고, 극단적인 경우에는 본래 모델을 거부하는 의미에서 문제를 재 정의할 수도 있는 결정 과정이 수학적 모델링의 중심을 이룬다고 하였다.

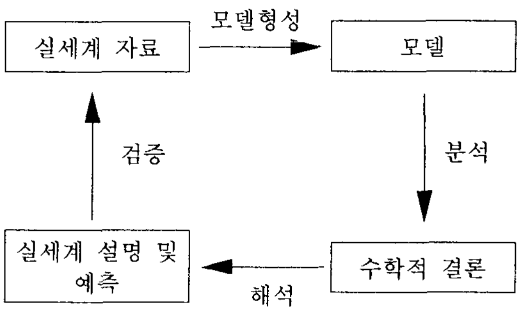
Lesh와 Doerr(2003)는 전통적인 관점에서의 문제해결이 보통 다른 사람에 의해 제기된 문제에 대해 대답하는 것이라 한다면 모델링 관점에서의 문제해결은 주어진 것, 목적, 가능한 해답에 이르는 길, 그리고 사물의 표면 밑에 있는 패턴과 규칙성의 성격을 해석하기 위한 유용한 방법을 개발하는 것을 중요하게 여기는 것으로 보고, 모델링을 강조하는 관점에서는 학생이 수학적으로 중요한 구성에 대해 필요성을 느끼고, 자신의 사고방식을 반복적으로 표현하고 검사하고 정제하고, 수정하는 경험을 구조화하는 것에 초점을 둔다고 하였다.

위 몇 가지 견해에서 보면 수학적 모델링은 응용수학 또는 문제해결이나 문장제와 견주어 볼 때 몇 가지 두드러진 특징이 있다. 첫째, 수학 외적인 실세계 상황에서 시작하여 다시 실세계 상황을 설명하고 예측하는 것으로 귀결된다는 점이다. 둘째, 실세계 상황에 영향을 미치는 변인과 변인들 사이의 관계를 파악하고 이들로부터 모델을 도출했을 때, 모델의 채택 및 기각을 한 번으로 결정하지 않고 실세계 상황을 보다 잘 설명할 수 있는 모델을 얻을 때까지 반성 및 수정을 거쳐 정교화하는 과정이 반복될 수 있다는 점이다.

이 정교화 과정은 특히 모델링의 핵심이며 정교화 과정을 지속시킬 수 있는 환경을 만드는 것은 학생에게 자신의 생각을 반복적으로 검토하고 반성하는 기회를 줄 수 있다는 점에서 수학의 학습 측면에서 매우 의미 있는 일이라고 할 수 있다. 이 때, 정교화 과정을 활발히 일어나게 만들 수 있는 요인으로 적절한 문제 상황이나 교사의 역할과 함께 중요한 것이 스프레드시트와 같은 효율적인 도구의 사용 등이 될 수 있다.

2. 수학적 모델링의 과정

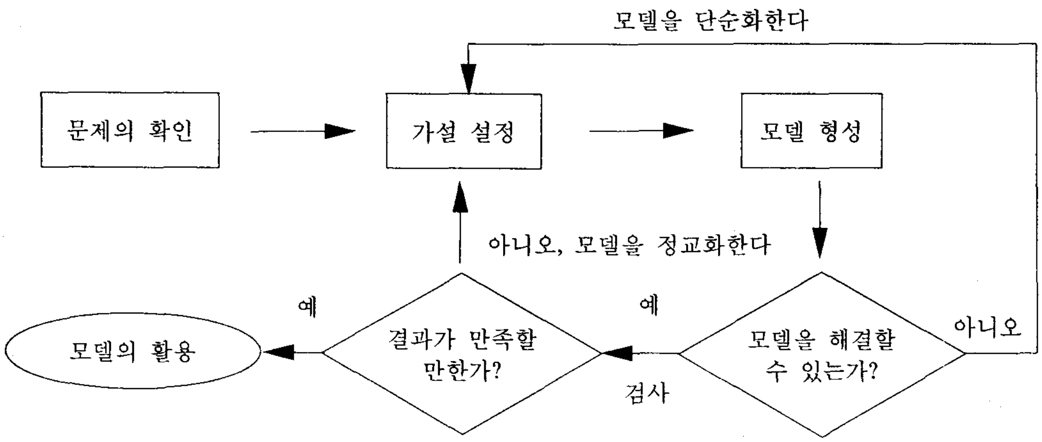
현실 세계 상황으로부터 수학적 모델을 만들어 이를 분석하여 실세계 상황을 설명하고 예측하고자 하는 수학적 모델링의 과정은 머리말에서 언급한 바와 같이 크게 네 단계를 갖는다. 이것을 아래와 같이 도식화하여 나타낼 수 있다(NCTM, 2000; Giordano, Weir, & Fox 2003; Dossey, McCrone, Ciordano, & Weir, 2002).



[그림 Ⅱ-1] 모델링 과정

모델링의 구성 과정은 몇 개의 다음과 같은 하위의 과정으로 나누어질 수 있다(Dossey et al, 2002). 첫 번째는 문제 확인 단계로 궁극적으로 무엇을 해결해야 하는지를 파악하는 과정이다. 실세계 문제 상황에 내포된 변인들이 무엇인지 파악하고 자료를 분류하거나 상황 속의 특정한 성질을 파악한다. 실세계 문제 상황을 해결 가능한 수학적 문제로 번역하는 것은 쉽지 않기 때문에 문제 확인의 과정은 엄밀해야 한다. 두 번째 단계는 가설 설정 단계로 주어진 상황에 맞는 수학적 모델을 찾기 위해 변인들 중 중요한 것을 선택하고, 독립변인과 종속변인을 구분하며 이들 변인 사이의 관계를 잠정적으로 결정하는 단계이다. 세 번째 단계는 모델 해석 단계로 앞에서 얻어진 모델을 해결하거나 해석하는 과정이다. 모델을 해석할 수 없으면 위의 두 번째 단계로 돌아가서 다시 변수 사이의 관계를 점검한다. 네 번째 단계는 모델 검증 단계로 첫 번째 단계에서 확인한 문제에 대한 답이 될 수 있는지, 실용적 의미가 있는지 등을 검증해보는 단계이다. 검증에 통과하였다면 구체적인 데이터를 이용하여 모델의 적합성을 점검할 수 있다. 다섯 번째 단계는 모델 실행 여부의 판단 단계로 만들어진 모델이 사용자들이 편리하게 사용할 수 있는지의 여부를 판단하는 단계이다. 여섯 번째 단계는 모델 수정 단계로 위의 검증 단계와 실행 여부를 판단한 다음 모델을 수정하여 수정된 모델이 문제 조건에 맞는지를 최종 확인하는 단계이다.

위 두 번째 단계에서 주어진 상황 속에서 여러 가지 변인을 이용하여 모델을 만들었을 때 그 모델을 해결할 수 없으면 모델을 단순화하는 과정이 수반된다. 모델의 단순화는 어떤 변인을 상수로 바꾸거나 무시함으로써, 또는 변인 사이의 관계를 간략화하고 문제 상황에 좀 더 제약을 가함으로써 할 수 있다. 그리고 마지막 단계에서 모델을 해석한 결과가 실세계 상황을 충분히 설명하지 못할 때는 보다 잘 설명할 수 있는 섬세한 모델을 만드는 과정이 수반되는데 이 과정을 모델의 정교화 과정이라 한다. 모델의 정교화는 단순화 과정과 반대로 새로운 변인을 추가하고 변인 사이에 좀 더 정교한 관계를 설정하며 문제 상황의 제약을 제거함으로써 할 수 있다. 모델이 정교화되어 전체와 부분을 잘 설명할 수 있으면 현상을 보다 보편적으로 설명할 수 있는 일반성을 갖게 된다. 정교한 수학적 모델의 형성 과정은 간단하



[그림 II-2] 모델 구성의 반복적 성질

지 않다. 수학적 모델의 형성 과정에서는 제시된 문제 상황의 일부만이 고려되어 전체의 내용을 반영할 수 없거나, 또는 전체적인 상황에만 집중하여 세부적인 사항이 간과되거나 극소수의 세부 사항만을 고려한 불완전한 모델이 나타날 수 있고(Zawojewski, Lesh, & English, 2003), 수학적 모델에 이르지 못하고 단순한 그림과 같은 비형식적인 모델에서 그치는 경우도 많다.

모델의 단순화와 정교화 과정을 도식화하면 다음과 같다(Dossey et al, 2002).

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

이 연구에서는 스프레드시트 모델이 수학적 모델링에서 모델의 정교화 과정과 모델링 과정에 어떤 영향을 미치는 지를 정성연구의 사례연구 방법을 사용하여 분석하였다.

이 연구에서 참여한 학생은 대도시에 위치한 여자 인문계 고등학교 1학년 6명의 여학생이며 실험 수업은 3명씩 2개조로 나누어 진행되었다. 6명의 여학생은 자발적 참여자로 학생과 학부모로부터 실험 수업 동의서를 받았고 특별히 학업성취도에 제한을 두지 않았으나 그들의 학업성취도는 상중하를 기준으로 상 2명, 중상 2명, 중 2명으로 구성되었다. 이들 중 세명은 수학을 좋아한다고 하였고 나머지 한 명은 보통, 다른 두 명은 싫어하는 편이라고 밝혔다. 스프레드시트 사용경험자는 1명이었고 각 조는 출신 반과 스프레드시트의 사용 정도에 따라 이질집단으로 구성하였다. 학생에게는 문제 상황으로부터 간단한 대수적 모델을 스프레드시트 모델로 변환하는데 필요한 기본적인 대수식을 세울 수 있는지를 퀴즈를 통하여 검증하였다. 학생들은 미적분을 배우지 않은 상태였고 지수함수에 대해서도 알지 못하였음을 면담을 통하여 확인하였다. 교사는 중등 9년차 남자 교사로 컴퓨터교육을 따로 받은 적은 없지만 책을 보고 스스로 공부하여 기본적인 프로그램들을 사용할 수 있는 정도의 지식을 가지고 있었다. 교사는 엑셀 프로그램을 주로 행정 처리용도로 사용해왔으며 수학 수업에서 사용해본 경험은 가지고 있지 않았지만 수업에서 공학을 사용하는 것에 대해 우호적이었다. 연구에 사용된 스프레드시트는 엑셀이었다. 교사는 연구자가 아니며 연구자는 관찰자로서 참여하였다.

2. 실험 수업

실험은 과학 교실에서 진행되었으며 교사는 컴퓨터와 대형 프로젝트 TV 그리고 칠판을 자유롭게 사용할 수 있었다. 학생은 3명으로 된 1개조마다 하나의 컴퓨터를 사용하였다.

소그룹 모델링 활동을 본격적으로 시작하기에 앞서 학생들이 기본적인 엑셀의 기능을 익히는 시간을 90분 정도 가졌다. 이어서 본 실험에 쓰인 것보다는 쉬운 문제 상황을 예로 들어 약 2시간의 예비실험을 하였다. 예비 실험에서는 학생이 익힌 기본적인 기능을 사용할 수 있으면서 엑셀의 활용이 절대적으로 도움이 되는 전형적인 문제 상황을 다루었다. 예비 모델링 활동에서는 학생들이 엑셀의 기능을 활용하는 정도와 소그룹활동에서의 참여 정도 등을 파악하여 그룹의 재조정에 참고하였으나 교사와 상담 후 처음에 나눈 소그룹을 그대로 유지하기로 하였다.

엑셀 기능을 익히는 시간과 예비 실험을 제외하면 실험 수업은 약 2개월 동안 학생 모두

가 참여할 수 있는 날을 위주로 총 8회에 걸쳐 방과 후에 실시되었고 6개의 문제 상황을 다루었다. 모델링 활동은 매 회마다 대략 두 시간씩 활동하였지만 문제 상황이 복잡하거나 문항의 수가 많을 때에는 두 회에 걸쳐 진행된 적도 있다. 한 번의 모델링 활동을 수행한 후에는 문제 상황의 구성이나 모델링 활동의 진행 상황을 고찰하고 반성하여 문제점을 파악한 후 다음 모델링 활동에 반영하였다. 문제 상황의 난이도와 학생의 지식수준 및 기존 지식의 활용 수준과 모델링 활동에 영향을 줄 수 있는 외적인 환경이 고찰 및 반성의 대상이 되었다. 이 논문에서 분석하고자 하는 두 개의 문제 상황에 대한 실험 수업은 2회 분에 해당하는 것으로 약 네 시간에 걸쳐 진행되었으며 모든 학생이 참여하였다.

3. 자료 수집과 분석

자료는 면담 자료, 관찰 자료, 오디오 및 비디오 자료, 필드 노트, 그리고 모델링 활동한 과정을 컴퓨터상에서 동영상으로 저장한 파일을 통하여 수집하였다.

면담 자료는 실험 전후로 약 5분 내지 10분씩 반 구조화된 면담을 통해 수집하였고 면담은 주로 과학 교실에서 이루어졌고 때로는 교실 밖에서도 이루어졌다. 학생에게는 주로 사설 학원에서 배우는 수학의 내용, 모델링 활동에 대한 소감 등을 질문하였고, 교사와는 수업 전후의 학생의 활동과 수업의 진행 방향에 대해 논의하였다. 관찰 자료는 비디오와 오디오를 이용하여 학생들의 모델링 활동을 녹화·녹음하고 컴퓨터 스크린에 보이는 엑셀 조작 활동을 동영상 캡쳐 프로그램을 이용하여 녹화하여 수집하였다. 연구자는 실험 기간 중에 필드 노트를 작성하여 모델링 활동 중에 관찰한 학생들의 행동, 언어 등에 대해 기록하고 학생이나 교사와의 대화 그리고 연구자의 느낌 등을 기록하였다. 문서자료는 모델링 활동에서 사용된 활동지와 실험 전후에 교사와 학생에게 실시한 설문자료로 구성되었다. 활동지는 문제 상황을 해결해 나가는 난과 후반부에 활동에 대한 반성 난을 두어 엑셀 활용의 효과, 소감, 그리고 어려운 점 등을 물었다. 실험 전 학생에게 실시한 설문 조사는 학생이 수학을 학습한 방법, 실생활에서 사용하는 학생들의 컴퓨터 활용 정도, 특히 수학 학습과 관련하여 컴퓨터 활용을 한 경험이 있는지 알아보고자 하였다. 실험 후에는 실세계 문제 상황을 엑셀을 사용하여 해결해 본 소감과 엑셀을 활용해서 얻은 점 등을 알아보았다. 교사에게 실험 전에 행한 설문에서는 교사의 컴퓨터 활용 능력, 수학 수업에서의 컴퓨터 사용에 대한 견해, 엑셀 사용 경험의 유무 등을 질문하였고, 실험 후에 행한 설문에서는 실험 수업 전반에 대한 소감과 모델링 수업지도에서 어려운 점 등을 질문하였다.

자료의 분석은 조별로 녹화된 동영상 캡쳐 파일과 녹음된 오디오 파일을 비교하면서 전사하여 분석하는데 참고하였다. 분석은 전사, 동영상 화면, 활동지 그리고 설문 자료 등을 토대로 삼각 검증법을 사용하였다. 주로 동영상 캡쳐 파일로 저장한 동영상 화면의 대화 내용과 학생의 스프레드시트 조작 화면이 주 분석 대상이 되었으며 이것이 불분명할 경우 전사 자료와 학생이 컴퓨터 상에서 제작한 엑셀 파일을 참조하였다. 이 논문에 등장하는 스프레드시트 파일의 모습은 [그림 Ⅳ-14]을 제외하면 동영상 화면에서 캡쳐한 것이며, [그림 Ⅳ-14]는 학생이 제작한 엑셀 파일에 설명을 돕기 위해 연구자가 색을 넣어 캡쳐한 것이다.

4. 문제 상황

실험에서 사용된 [문제 상황 1]과 [문제 상황 2]는 각각 Stewart(2004)과 Heid(1997)에 나오는 문항을 참조하여 만든 것이다. [문제 상황 1]은 본래 학생이 아직 배우지 않은 미적분학 지식을 이용하여 다양한 경우에 최적화 문제를 해결할 수 있는지에 관한 문항으로부터 각색한 것이다. 본 연구에서는 이 문항을 학생으로 하여금 원의 넓이, 직사각형의 넓이 그리고 원기둥의 부피를 구할 수 있는 기본적인 지식을 이용하여 부피가 변하여도 원기둥이 최소면적을 갖게 되는 원기둥 모양의 특징을 스프레드시트 모델을 이용하여 찾을 수 있는 기회를 주고, 이를 바탕으로 캔의 대량 생산과 같은 실생활에서 일어날 수 있는 경우에 가장 경제적이 되게 하는 캔의 모양을 다양하게 탐구하는 기회를 줄 수 있도록 단계별로 만든 것이다. 특히 [문제 상황 1]의 문제 3에서는 캔의 옆면이 직사각형이므로 대량 생산 시 이웃하는 직사각형의 배열로 재료를 자를 것이 곧바로 예측되나 뚜껑과 밑면은 원의 배열에 따라서는 경제적 효율성이 달라질 수 있으므로 학생들에게 다양한 사고를 요구하는 문항이다. [문제 상황 2]는 학생이 배우지 않은 지수함수의 개념을 요구하는 문항을 스프레드시트 모델을 만들어 문제를 해결하고, 지수함수의 개념을 형성하며 이들의 특징을 파악해나갈 수 있는지를 보고자 하는 문항이다. 두 문제 상황 모두 스프레드시트 모델을 만들어 바로 답을 구할 수 있는 것이라기보다는 문제 상황을 해결하기 위해 모델을 정교화 해나가기를 요구하는 것들이다.

[문제 상황 1] 캔 문제

※ 어느 용기 제조회사는 과일 쥬스 제조회사로부터 쥬스를 담을 원기둥 모양의 캔을 만들어 달라는 부탁을 받았다. 그 캔의 용량은 240ml였다. 생산비를 최소화하기 위해 가능한 재료를 적게 써서 만들고자 할 때 캔의 규격을 어떻게 해야 하는가?

1. 용량이 240ml일 때 겉넓이가 최소가 될 때의 원기둥의 밑면의 반지름은 얼마인가?
2. 용량을 다르게 하였을 때 겉넓이가 최소가 되는 원기둥 밑면의 반지름과 높이 사이의 규칙이 존재하는가?
3. 캔을 대량 생산하고자 할 때 원기둥의 뚜껑과 밑면을 만들기 위해 잘려나가는 자투리를 고려한다면 가장 경제적이 되는 원기둥의 모양은 어떤 모양이어야 하는가?

[문제 상황 2] 수영장 박테리아 문제

※ 수영장의 박테리아 수가 월요일 오전 8시에 $1cm^3$당 1500마리이고, 매일 2배씩 늘어난다고 할 때 다음에 답하여라.

1. 수요일 오전 8시에 박테리아 수는 얼마인가? 토요일 8시에는 그 수가 어떻게 되는가?
2. 수요일 오후 2시에는 얼마가 되는가?
3. 수요일 오전 8시부터 6시간 동안 증가한 박테리아 수와 금요일 같은 시간 동안 증가한 박테리아 수를 비교하고 시간이 지남에 따라 박테리아 수의 증가추이에 대해 그래프를 보고 토론하여라.
4. 수영장 위생관리법이 최대 허용한 박테리아 수를 $1cm^3$당 200,000마리라고 하면 이 수영장은 며칠 동안 안전한가?

Ⅳ. 스프레드시트를 활용한 수학적 모델링에서의 모델의 정교화 과정

이 장에서는 수학적 모델링의 과정에서 나타난 모델의 정교화 과정을 실험 결과를 중심으로 분석한다. 먼저 실험 수업에서 나타난 모델의 정교화 과정을 캡처된 동영상과 전사를 중심으로 분석한 후, 스프레드시트 모델이 모델의 정교화와 수학적 모델링 과정에 어떤 영향을 미쳤는지에 초점을 두어 기술한다.

1. 모델의 정교화 과정

[문제 상황 1]의 문제 1을 해결하기 위해 학생들은 원기둥 모양과 그 전개도를 그렸다. 그리고 원기둥의 겉넓이와 부피를 구하여 엑셀에 입력하였다. 즉, 원의 반지름과 높이를 각각 x와 h라 하면 부피 $240=\pi x^2 h$로부터 높이 $h=\frac{240}{\pi x^2}$를 얻고 겉넓이 $A=2\pi x^2+2\pi xh$를 얻은 다음 엑셀에 이 식들을 입력하여 겉넓이가 최소가 되는 반지름을 구해 나갔다.

<u>**발췌문 1.** 문제의 해결</u>

(1.1) 정윤: 높이 구하려면 이것 해야 하는 거 아니야?
(1.2) 아영: 높이는 그러면 y는 240나누기 x 제곱 π지 맞지? 아닌가?
(1.3) 정윤: 음 맞아. 근데 그것 어떻게 쓸라고?
(1.4) 아영: 240 슬래쉬(/) 이거(반지름) 제곱.
....
(1.5) 교사: 최소, 최소. 최소잖아 겉넓이가 최소.
(1.6) 아영: 아 최소? 이거보다 더 작아져요. 아. 아니구나.
(1.7) 교사: 작아졌다 커지는데?
(1.8) 정윤: 216([그림 Ⅳ-1]에서C7의 겉넓이를 가리키며).
(1.9) 아영: 216. 또 사이를 찾아야겠네.
....
(1.10) 아영: 아이 정말. 그러면 최소를 찾으려면 어디를 찾지? 이 사이([그림 Ⅳ-1]의 3과 4를 가리키며)?
(1.11) 정윤: 이 사이는 아니고 요 사이 같은데([그림 Ⅳ-1]의2와 3을 가리키며) 아냐 이건 늘어나는 거잖아
(1.12) 아영: 요 사이다. 요사이([그림 Ⅳ-1]의 3과 4사이를 가리키며).
....
(1.13) 아영: 이 사이를 구해야 되나?([그림 Ⅳ-2]의 3.3과 3.4 사이를 가리키며)
(1.14) 교사: 어디가 최소가 되나?
(1.15) 정윤: 됐다.
(1.16) 교사: 고 위쯤이겠네. 약 얼마야(그래프를 보고)?
(1.17) 아영: 3.6 머시기.
(1.18) 교사: 3.36에 가깝나, 7에 가깝나.
(1.19) 아영: 6에. 7인가?
(1.20) 정윤: 맞네. 3.37.
(1.21) 교사: 7가까이에 있겠다. 정확히는 이 사이를 더 조사해봐야겠고([그림 Ⅳ-3]의 3.36과 3.37 사이를 가리킴). 그렇지?

학생은 먼저 반지름을 입력한 후 높이와 겉넓이에 관한 스프레드시트 수식을 입력하여 높이와 겉넓이를 구하였다. 또한 교사의 권유로 반지름과 높이의 비율과 그래프를 함께 그렸다. (1.8)은 반지름의 차이를 1로 두었을 때 때 캔의 겉넓이가 최소가 되는 것을 처음으로 찾은 장면이다([그림 Ⅳ-1] 참조).

(1.10)에서 (1.13)까지는 겉넓이가 최소가 되는 반지름이 어느 구간에 위치해 있는지를 탐구하는 모습을 보여준다. (1.20)은 마지막으로 최소가 되는 원의 반지름으로 소수 두 자리 수를 구한 것을 보여준다. 이 때 학생들은 정확한 값을 찾기 위해 이웃한 행과 행 사이에 다른 행을 삽입하는 전략을 사용하였다. 특정한 값을 구하고자 할 때 학생들은 이 방법을 주로 즐겨 쓰는 것을 확인할 수 있었다([그림 Ⅳ-2]

와 [그림 Ⅳ-3] 참조).

실제로 겉넓이 $S(x)=2\pi x^2+2\pi xy=2\pi x^2+\frac{480}{x}$ 를 얻고 $S'(x)=0$을 풀면 $x\approx 3.368$에서 겉넓이가 최소가 됨을 알 수 있다.

교사는 캔의 부피가 240ml일 때 겉넓이가 최소가 되는 밑변의 반지름이 3.37이라는 것을 구하도록 한 후 캔 모양을 결정하는 것은 밑면의 반지름과 높이임을 암시하고 이들의 비가 1:2에 가까움을 확인시켰다. 문제 2를 해결하기 위해 교사는 곧이어 부피가 280ml일 때와 300ml일 때의 경우를 살피고 이들 사이의 규칙을 찾도록 하였다. 아래의 발췌문은 부피가 300ml일 때의 경우를 탐구하는 장면이다.

<u>**발췌문 2.** 캔 모양의 결정</u>

(2.1) 교사: 하나만 더 해보지. 300일 때만 하나 찾아보자. 300일 때.

(2.2) 정윤: 이거 나중에 어떻게 될지 모르잖아 (3.3에서 3.4까지만 그래프를 가리키면서).

(2.3) 원진: 하하.

(2.4) 교사: 최소일 때를 한번 찾아봐야지. 겉넓이가 최소일 때. 300일 때도.

(2.5) 원진: 소수점도.

(2.6) 정윤: 250~이 아니라.

(2.7) 아영: 248.09([그림 Ⅳ-4] 최소의 겉넓이를 가리키면서)

(2.8) 정윤: 248.09.

....

(2.9) 교사: 지금, 최소일 때를 찾아야지 겉넓이가.

(2.10) 정윤: 그럼 3.6인데?

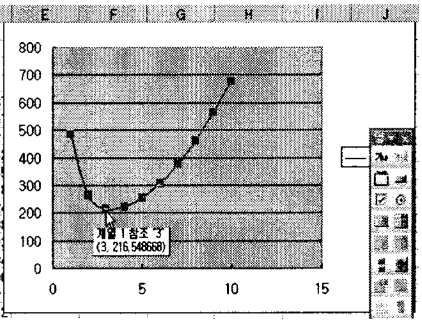
....

(2.11) 교사: 자, 그러면 일단 해결했어요. 다. 그죠? 자, 비율이 몇 대 몇 일 때 최소가 되지?

(2.12) 정윤, 아영: 1대 2.

(2.13) 교사: 1대 2죠.

	A	B	C	D
1	부피	240		
2				
3				
4	반지름	높이	겉넓이	비율
5	1	76,39437268	486,2831853	76,3943
6	2	19,09859317	265,1327412	9,54929
7	3	8,488263632	216,5486678	2,82942
8	4	4,774648293	220,5309649	1,19366
9	5	3,055774907	253,0796327	0,61115
10	6	2,122065908	306,1946711	0,35367
11	7	1,55906883	376,4475086	0,22272
12	8	1,193662073	462,1238597	0,14920
13	9	0,943140404	562,2713432	0,10479
14	10	0,763943727	676,3185307	0,07639
15	11	0,631358452	803,9017858	0,05739
16	12	0,530516477	944,7786842	0,0442
17	13	0,452037708	1098,781394	0,03477



[그림 Ⅳ-1] 스프레드시트 모델을 만듦

16	3	8,488263632	216,5486678	2,829421
17	3,1	7,94946646	215,2201205	2,564344
18	3,2	7,460387957	214,3398175	2,331371
19	3,3	7,01509391	213,8784334	2,125786
20	3,4	6,608509748	213,8100927	1,943679
21	3,5	6,236275321	214,1118772	1,781793
22	3,6	5,894627522	214,7634149	1,637397
23	3,7	5,580304798	215,7465366	1,50819
24	3,8	5,290469022	217,0449853	1,392229
25	3,9	5,022641202	218,6441716	1,287857

[그림 Ⅳ-2] 반지름을 소수 첫째자리까지 구함

19	3,3	7,01509391	213,8784334	2,125786
20	3,31	6,972770665	213,8543123	2,106577
21	3,32	6,930829283	213,834095	2,087599
22	3,33	6,889265183	213,8177577	2,068848
23	3,34	6,848073854	213,8052769	2,050322
24	3,35	6,807250852	213,7966292	2,032015
25	3,36	6,766791798	213,7917917	2,013926
26	3,37	6,726692379	213,7907416	1,996051
27	3,38	6,686948346	213,7934565	1,978387
28	3,39	6,647555511	213,7999142	1,960931

[그림 Ⅳ-3] 반지름을 소수 둘째자리까지 구함

이 때 학생은 부피의 변화에 따른 값을 용이하게 조사하기 위해 스크롤바를 만들어 부피의 값을 연결하여 쉽게 변할 수 있도록 한 후 탐구하였다. (2.11)에서 교사는 캔의 부피가 300ml에서도 반지름 대 높이가 1:2가 되는지를 알아보도록 하였다. 이 때 학생은 아래 [그림 Ⅳ-4]와 같이 캔의 부피가 300ml일 때 최소가 되는 겉넓이 248.09와 그 때의 반지름 3.6, 그리고 높이 대 반지름의 비를 구하고 1: 2에 가까움을 확인하였다.

18	3.4	8.260637	249.1042	2.429599
19	3.5	7.795344	248.3976	2.227241
20	3.6	7.368284	248.0967	2.046746
21	3.7	6.975381	248.179	1.885238
22	3.8	6.613086	248.6239	1.740286
23	3.9	6.278302	249.4134	1.609821

[그림 Ⅳ-4] 부피 300일 때 겉넓이의 최소값을 찾음(좌로부터 반지름, 높이, 겉넓이, 높이/반지름)

(2.10)는 두 번째로 부피가 300ml일 때 반지름의 길이는 3.6으로 소수 첫째 자리까지 찾는 것을 보여준다. 이 때 높이 대 반지름의 비가 2.046746으로 나오자 학생들은 이것을 2로 받아들이는 것을 볼 수 있다.

위에서 볼 수 있는 것처럼 학생들을 스프레드시트 모델을 만들어서 특정한 캔의 부피에서 밑면의 반지름과 높이 사이의 특징을 파악하게 되었을 뿐만 아니라 다른 부피에서도 이 비가 일정하게 유지된다는 사실을 확인할 수 있었다. 곧, 하나의 캔을 만들 경우 그 부피가 어떻게 변하더라도 최소 넓이를 갖기 위해서는 반지름 대 높이의 비가 1:2임을 알 수 있었다.

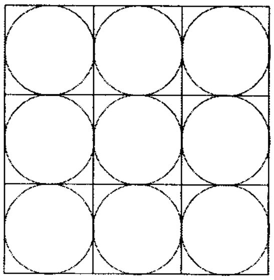
문제 3은 현실적인 요구를 반영하는 상황으로 여러 가지 변인을 고려하여 모델을 도출할 필요가 있는 문제라고 볼 수 있다. 교사는 주어진 문제 상황의 1과 2까지 해결하는 동안 부피가 일정할 때 최소의 겉넓이를 가지는 원기둥의 모양은 반지름과 높이의 비가 1:2였음을 환기시킨 후 대량 생산을 고려하면 그 모양을 어떻게 하면 좋을까에 대한 질문으로부터 시작하였다.

<u>발췌문 3. 다양한 변인을 고려하여 모델을 정교화하기</u>

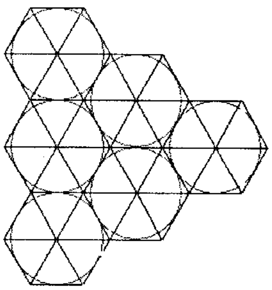
(3.1) 교사: 아, 근데 이거는 지금 비율이 어떻지?(캔을 보여주며)
(3.2) 원진: 1대 2가 아니에요.
(3.3) 교사: 1대 2보다 더. 그러니까 1대 2라면 지름하고 높이하고 똑같았었지 그 때. 그지? 근데 이건 조금 더 기네. 뭐 여러 가지 이유가 있겠죠? 근데 또 한 가지 이유는, 이유는 뭐가 있냐면 이건 잘라낼 때 동그라미를 잘라낼 때, 이것만 잘라내는 게 아니고 이렇게 요 사각형으로 잘라내야지(아래 [그림 Ⅳ-5]과 같은 모양을 가리키며). 그죠?
(3.4) 아영: 왜?
(3.5) 교사: 원판을 잘라낼 때 원만 우리가 철판에서 원만 잘라내면 나머지 버리는 것들이 생기지? 그지? 그니까 그런 것까지 감안을 해야겠지?
(3.6) 원진: 그래도.
(3.7) 교사: 그죠? 그래서, 그래서 사각형으로 잘라낸다라고 생각할 수도 있겠지? 그지?
....
(3.8) 교사: 근데 더 경제적이 되려면, 어떻게 하면 돼? 원은 모양이 좀, 뭔가 좀 여러분들이 동전을 배열해보면 알겠지만 사이에 공간이 적어야겠지, 잘려나가는 게.
(3.9) 원진: 네.
(3.10) 교사: 그 공간이 적을 때면, 적으려면 어떻게 되면 공간이 적을까?
(3.11) 정윤: 지그재그.
(3.12) 원진: 사이, 사이에 들어가요.
(3.13) 교사: 어떻게 지그재그?
(3.14) 아영: 원이랑 원 사이에 껴서.

(3.1)에서 (3.7)까지 교사는 먼저 어떤 캔을 실제로 들어 보이며 그것이 어림으로 반지름

대 높이의 비가 1:2가 아님을 시사하면서 대화를 시작하였다. 그리고 그렇게 될 수 있는 이유 중의 한 가지를 [그림 Ⅳ-5]에서와 같이 캔의 밑면과 뚜껑을 만들 때 자투리로 버리게 되는 원과 원 사이의 양철판의 면적을 들었다. 밑면이나 뚜껑을 만들기 위해서는 실제로는 정사각형 넓이가 필요함을 일깨워준 것이었다. (3.11)에서 정윤이 의미한 것은 나중에 지필 환경에서 그린 그림을 통하여 아래 [그림 Ⅳ-6]과 같은 모양을 염두에 둔 것임을 알 수 있었다.



[그림 Ⅳ-5] 직사각형 모양으로 원을 배열



[그림 Ⅳ-6] 지그재그로 원을 배열

학생들은 문제 2에서 캔의 밑면과 뚜껑에 필요한 재료의 넓이로 원만을 고려하였던 것에서 정사각형으로 바꾸어 문제 2에서와 유사한 과정을 거쳐 반지름과 높이의 비가 약 1:2.55임을 구할 수 있었다. (3.8)에서부터 교사는 원과 원 사이의 버려지는 재료를 줄이기 위해 또 다른 방법으로 원을 어떻게 배열하는 것이 좋을까라고 질문하였다. 정윤과 아영은 바로 원과 원 사이에 다른 원이 지그재그로 들어가는 것이 좋다고 하고 이어서 이러한 원을 포함하는 다각형은 정육각형임을 추론하였다. 그리고 앞에서의 과정을 되풀이하여 이 경우에 부피가 일정할 때 재료를 최소로 필요로 하는 원기둥의 반지름과 높이의 비는 약 1:2.1257임을 구하였다.

[문제 상황 2]의 문제 1을 해결하기 위해 학생은 1500, 3000, 6000,…와 같이 수를 나열하여 해결한 경우도 있고, 날짜 수 n에 대하여 $2^n \times 1500$과 같이 식을 세워 해결한 경우도 있었다. 후자의 경우도 주로 수를 나열하거나 수형도를 그려 식을 유도한 것을 확인할 수 있었다. 문제 1의 경우는 경과한 시간이 자연수 날짜인데 비하여, 문제 2의 수요일 오후 2시까지는 월요일 오전 8시로부터 2일과 1/4일이 지난 시점이다. 이때 박테리아 수가 얼마인가를 묻는 질문에 여섯 명의 학생은 수요일 오전 8시까지 6000마리이고 6시간이 지났으므로 $6000 \times 1/4$를 6000에 더하여 7500마리로 답하였다. 즉, $6000 + 6000 \times \frac{1}{4} = 7500$로 구하였고 이것은 날짜 수 n과 시간 수 x에 대하여 모델 $1500 \times 2^n(1 + \frac{x}{24})$을 사용한 것이다. 위에서 학생들은 $2^n \times 1500$와 같은 식을 사용하였지만, 이 때 2^n는 단순히 2의 거듭제곱의 의미를 가지고 있고, 시간을 나타내는 분수가 n자리에 올 수 있다는 생각을 하지 못하였다.

다음의 발췌문은 학생이 함수 $y = 2^n \times 1500$이 가지는 특성과 지수 n에 자연수뿐만 아니라 자연스럽게 유리수도 가능하다는 생각을 하게 된 과정을 보여준다. 즉 보다 일반적인 모델을 얻을 수 있었음을 보여준다. 특히 이 과정에서는 표와 그래프를 이용한 문제 상황에 대한 해

석이 중요한 역할을 함을 볼 수 있었다.

발췌문 4. 모델의 수정과 정교화를 통한 일반적인 모델의 형성

(4.1) 원진: 한 배가 되면 얘가 0.25가 돼야 하니까. 6000 * 4분의 1.

(4.2) 정윤: 사분의 일.

(4.3) 원진: 1500. 1500이 늘어나? 그러면 7500마리? 그런 거 아냐?

....

(4.4) 아영: 식이 뭐라고?

(4.5) 원진: 24분의 시간 곱하기 전에 있던 거를~ 더한 거야, x에다가. 아하 아하. 이상한가?

(4.6) 아영: 몰라. 왜 나는 바로 납득이 안 되지?

....

(4.7) 아영: 이 전날 박테리아 수에 이것을 더하는 게 터무니없는 거 같아.

(4.8) 원진: 알았어. 알았어. 새로 하자. 우리 새로 해. 어 좋아. 박테리아. 좀 쳐줘. 박테리아.

(4.9) 아영: 내 아이큐가 들통 나지 않나?

(4.10) 정윤: 그런데 어쩔 수가 없어. 얘가 막 매일 매일 다른 변수로 두 배식 늘어나기 때문에.

....

(4.11) 아영: 뭐야? 식이 어느 거야?

(4.12) 원진: 1500 곱하기 2의 x시간이니까, 24분의 시간, 이거요.

....

(4.13) 교사: 그니까, 비율이 일정하다고 계산하거야?

(4.14) 원진, 정윤: 네.

(4.15) 원진: 계속변하니까 비율이 달라져서 그런 거예요?

(4.16) 교사: 그렇겠지?

(4.17) 원진: 우리가 틀린 거예요?

(4.18) 교사: 그렇지. 여러분들이 비례식대로 한 것은 비율이 일정하다는 가정을 하고 계산한 거지? 우리가 비율이 일정하다면 그래프는 모양이 어떻게 되나?

(4.19) 원진: 일자로.

(4.20) 교사: 쭉 올라가지. 그지? 그런데 그런 모양이었나?

(4.21) 원진: 아니요.

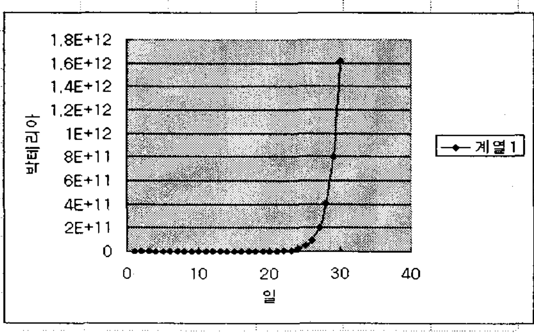
(4.22) 교사: 그런 모양이었나? 이렇게 되지? 점점 더 늘어나지. 시간이 지날수록 더 변하지. 그지? 비례식은 이렇게 직선일 때.

(4.23) 정윤: 실제 상황에서는 비율이 일정하지 않다는 거야?

(4.24) 원진: 그런 거지. 박테리아가 계속 변하니까.

발췌문에서 학생들은 처음에 지필 환경에서 푼 것을 스프레드시트에 표로 그렸다. (4.6)은 지필 환경에서 원진과 같은 생각을 했던 아영이 표를 보면서 이전 모델에 대한 의구심을 드러내는 것을 보여준다. (4.7)은 아영이 [그림 Ⅳ-7]

	A	B	C	D
1		1500	2	6
2	일	박테리아		
3	1	3000	3750	
4	2	6000	7500	
5	3	12000	15000	
6	4	24000	30000	
7	5	48000	60000	
8	6	96000	120000	
9	7	192000	240000	
10	8	384000	480000	
11	9	768000	960000	
12	10	1536000	1920000	
13	11	3072000	3840000	
14	12	6144000	7680000	
15	13	12288000	15360000	
16	14	24576000	30720000	
17	15	49152000	61440000	
18	16	98304000	1.23E+08	
19	17	1.97E+08	2.46E+08	



[그림 Ⅳ-7] 날짜에 따른 박테리아의 증가를 나타내는 그래프

과 같은 그래프를 본 후에 여전히 의문을 간직하고 있음을 보여준다. 그림에서 C열은 A열보다 6시간 후의 박테리아 수를 나타낸 것으로, C3에는 '=B3+B3*D1/24'이 입력되어 있다.

(4.12)은 여러 논의 끝에 원진이 날짜 대신 시간을 단위로 하여, 즉 1500×2^{n}의 n대신에 '시간/24'를 대입하는 식을 만드는 것을 보여준다. 이 식이 맞는 지 확인하기 위해 각각의 시간대별로 아래와 같이 다시 표를 만들었다([그림 Ⅳ-8]). 예를 들어 A3은 1시간=0.041667일을 의미한다.

	A	B	C
1			
2	시간	박테리아	늘어난박테리아
3	0.041667	1543.953	43.95335497
4	0.083333	1589.195	89.19464154
5	0.125	1635.762	135.761599
6	0.166667	1683.693	183.6930725
7	0.208333	1733.029	233.0290453
8	0.25	1783.811	283.8106725
9	0.291667	1836.08	336.080315
10	0.333333	1889.882	389.8815748
11	0.375	1945.259	445.259332

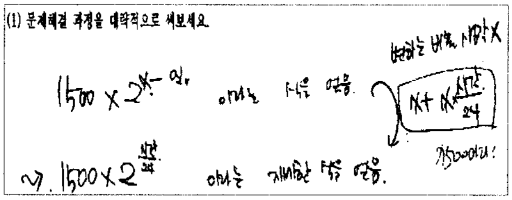
[그림 Ⅳ-8] 시간을 날짜로 환산하여 박테리아수를 계산함

그리고 하루 이틀이 지난 후, 즉 자연수 날 만큼 지난 경우에는 새로운 식으로 계산했을 때에도 예전의 날짜 기준으로 했을 때와 다르지 않다는 것을 확인하였다.

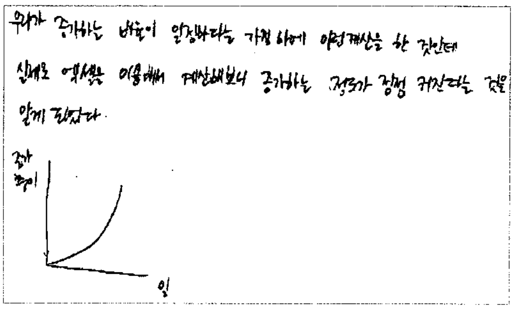
19	0.708333	2450.873	950.8731799
20	0.75	2522.689	1022.689246
21	0.791667	2596.61	1096.609683
22	0.833333	2672.696	1172.696154
23	0.875	2751.012	1251.01213
24	0.916667	2831.623	1331.622938
25	0.958333	2914.596	1414.595823
26	1	3000	1500

[그림 Ⅳ-9] 날짜수를 기준으로 했을 때와 같은 지를 확인함

(4.13)부터는 교사가 날짜와 날짜 사이에는 기하급수적으로 박테리아가 증가하고, 하루 미만의 시간 동안에는 일차함수와 같은 정비례로 그 수가 증가한다고 본 학생의 가정이 잘못되었음을 그래프를 이용하여 설명하는 장면이다. (4.19)에서 볼 수 있듯이 학생은 [그림 Ⅳ-7]의 C열이 일차함수로 주어졌고 그 그래프가 직선임을 알고 있었고, [그림 Ⅳ-7]에서의 그래프가 직선이 아닌 곡선으로 나타난 것을 볼 수 있었기 때문에 시간을 단위로 하였을 때에도 곡선 모양으로 증가함을 이해할 수 있었다. 그리고 거듭제곱에 유리수가 대입될 수 있음을 이해하고 이것이 문제 상황을 올바로 해석하는 식이 됨을 알게 되었다. 문제 3에 대해 학생들은 표와 그래프를 통하여 수요일의 6시간 동안보다 금요일 6시간 동안 박테리아 수가 훨씬 많이 늘어남을 알 수 있었고 그 증가 추이에 대해 시간이 지날수록 증가하는 정도가 점점 커진다는 것을 알게 되었다. 다음 그림은 활동지의 반성 난에서 문제 해결과정을 대략적으로 서술한 것 일부이다([그림 Ⅳ-10], [그림 Ⅳ-11], [그림 Ⅳ-12] 참조). 학생이 모델을 수정하게 되는 과정과 지수함수의 증가 패턴을 이해하게 되었음을 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-10] 원진이 보여준 모델의 정교화 과정



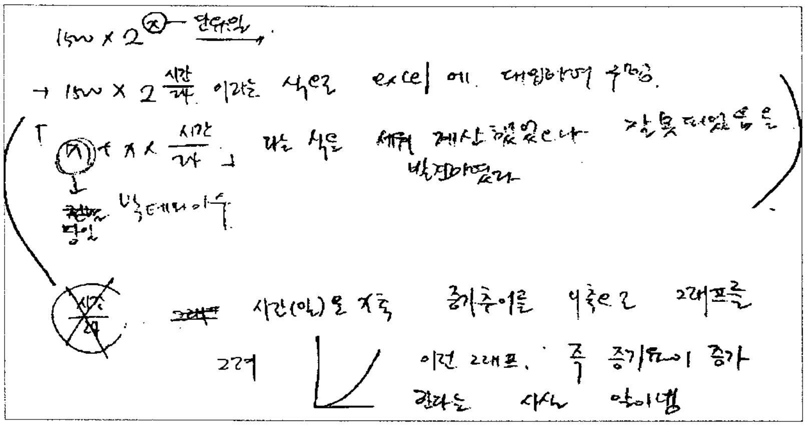
[그림 Ⅳ-11] 정윤의 사고의 변화

2. 모델의 형성 과정과 스프레드시트 모델의 역할

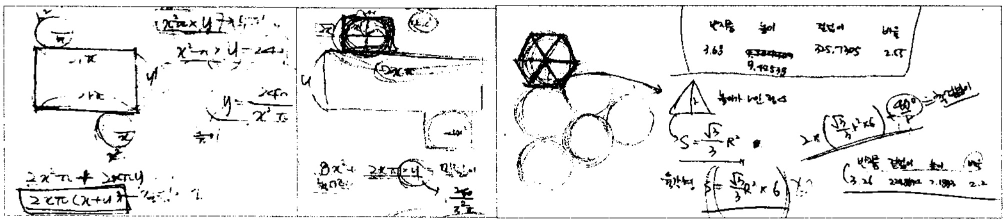
이 절에서는 [문제 상황 1]과 [문제 상황 2]에서 나타난 모델의 형성 과정을 살펴보고 특히 모델의 정교화에 스프레드시트 모델이 어떤 영향을 끼쳤는지를 서술하기로 한다.

아래의 그림은 [문제 상황 1]에서 하나의 캔에서의 최소 겉넓이를 갖는 캔의 모양과 대량 생산을 했을 때 캔의 모양을 나타내는 모델로 정윤이 만든 것이다. 다른 학생도 대동소이하게 그림을 그려 대수식을 구하였다.

원의 반지름과 높이를 각각 x와 h라 했을 때, 학생들은 하나의 캔을 만들 때, 대량 생산할 경우의 원의 배열을 직사각형 모양으로 배열할 때와 지그재그로 배열할 때 필요한 재료의 넓이를 각각 $A(x)=2\pi x^2+2\pi xh$, $A(x)=2\pi xh+2\cdot 4x^2$, $A(x)=2\pi xh+2\cdot 2\sqrt{3}x^2$와 같이 얻을 수 있었다. 첫 번째 식으로부터 스프레드시트 모델을 사용하여 용량에 관계없이 반지름 대 높이의 비가 1:2인 원기둥이 최소 재료를 필요로 한다는 사실을 알 수 있었다. 두 번째와 세 번째 식으로부터도 역시 스프레드시트 모델을 만들어 반지름 대 높이의 비가 각각 1:2.55와 1:2.12인 경우에 최소의 재료를 사용하게 됨을 알 수 있었다. 이것을 미분법에 의해 구하면 각각 $1:8/\pi(\approx 2.55)$, $1:4\sqrt{3}/\pi(\approx 2.21)$이 나옴을 알 수 있다. 아래의 [그림 Ⅳ-14]는 학생이 작성한 파일의 일부를 잘라 캡쳐한 것으로 원을 지그재그로 놓아 정육각형 안에 배치했을 때 반지름 대 높이의 비를 찾는 장면이다.



[그림 Ⅳ-12] 아영의 과정과 해석



[그림 Ⅳ-13] 정윤이 만든 모델의 정교화 단계

필요한 재료의 넓이를 나타내는 식은 모델링의 과정에서 매우 중요한 수식이지만 그것만으로는 충분하지 않다. 대량 생산을 할 때 경제적인 캔의 모양, 즉 원기둥의 반지름 대 높이의 비를 구할 수 없기 때문이다. 필요한 재료의 넓이를 나타내는 수식을 x에 대하여 미분하여 $A(x)$가 최소가 될 때의 $x{:}h$를 찾을 수 있어야 의미가 있다. 이와 같이 넓이를 나타내는 각각의 수식으로부터 원기둥의 특징을 구할 수 없을 때 [그림 II-2]에 나타난 것처럼 해결 가능한 보다 단순한 모델을 만드는 과정으로 되돌아갈 수도 있다. 그러나 학생들은 스프레드시트 수식, 차트 등이 들어 있는 스프레드시트 모델을 이용하여 각각의 모델을 분석하고 그 모델의 이면에 있는 의미를 찾을 수 있었다. 즉 용량에 관계없이 최소 겉넓이를 갖는 원기둥의 모양이 존재함과 대량 생산할 경우에도 필요한 재료 넓이를 최소로 하는 원기둥의 모양이 일정함을 알 수 있었다. 이것은 [그림 II-2]에 나타난 것과는 달리 지필 환경에서 수학적 모델을 해결할 수 없을 때에도 스프레드시트 모델을 만들어 수학적 결론을 추측하고 그 결과가 만족스러운지를 검토할 수 있었음을 의미한다. 따라서 뒤이은 모델링의 정교화 과정을 의미 있게 지속할 수 있었다.

[문제 상황 2]에서 학생들은 시간이 n일 후의 박테리아 수를 1500×2^n와 같이 옳게 구하였으나 2일과 6시간이 지날 때처럼 날짜 단위가 아닐 때에는 $6000+6000\times\frac{1}{4}$와 같이 구하였다. 이것을 형식화하면 일과 x시간이 지난 후의 박테리아수를 $1500\times2^n(1+\frac{x}{24})$와 같이 구한 것이다. 그러나 [그림 IV-7]과 같은 스프레드시트 모델을 만들면서 모델 $1500\times2^n(1+\frac{x}{24})$을 수정하여 $15000\times2^{\frac{24n+x}{24}}$을 얻고, 이 모델을 x가 0, 즉 날짜 단위로 바뀔 때에도 여전히 성립함을 역시 스프레드시트 모델을 통해 확인할 수 있었다. 그리고 수정 전 모델은 곡선으로 나타난 그래프를 통하여 불합리한 모델이었음을 알 수 있었다.

거듭제곱밖에 모르던 학생들은 스프레드시트 모델을 사용하여 지수가 유리수로 확장된 지수함수 $15000\times2^{\frac{24n+x}{24}}$을 자연스럽게 얻고 그 그래프를 통하여 증가 패턴을 파악할 수 있었으며, 표를 통하여 모델 $15000\times2^{\frac{24n+x}{24}}$이 1500×2^x보다 일반화된 정교한 모델임을 확인할 수 있었다.

스프레드시트 모델을 활용했을 때 모델링의 과정에 대한 지금까지의 논의의 결과를 도식화

	A	B	C	D	E	F
1	캔의 용량	240				
2	r	h	겉넓이	비율	네모철판	육각철판
3	1	76.39437	486.2832	76.39437	488	486.9282
4	2	19.09859	265.1327	9.549297	272	267.7128
5	3	8.488264	216.5487	2.829421	232	222.3538
22	3.26	7.520388	214.3998	2.391371	231.98	221.0048
23	3.27	7.530388	214.4098	2.401371	231.99	221.0148
24	3.28	7.540388	214.4198	2.411371	232	221.0248
25	3.29	7.550388	214.4298	2.421371	232.01	221.0348
26	3.3	7.015094	213.8784	2.125786	232.5745	220.9027
27	3.31	6.972771	213.8543	2.106577	232.6639	220.9212
28	3.32	6.930829	213.8341	2.087599	232.7575	220.9437

[그림 IV-14] 원을 지그재그로 배치했을 때 재료가 최소가 되는 비율을 찾음

하면 다음과 같이 할 수 있다([그림 Ⅳ-15]).

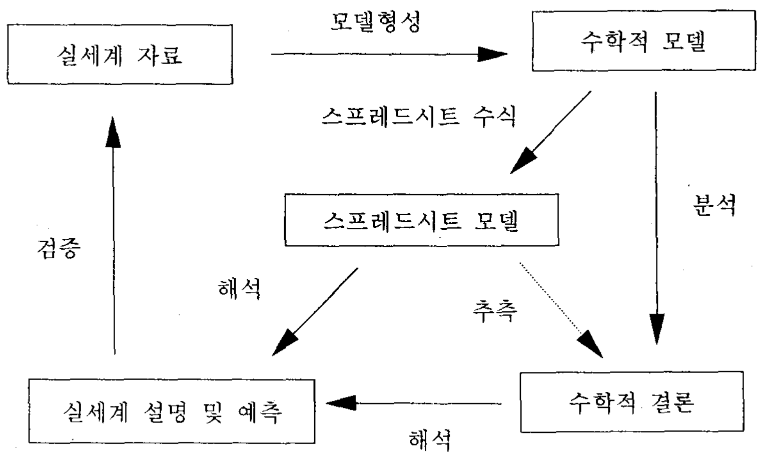
학생들은 분석할 수 없는 수학적 모델을 만든 경우에도 스프레드시트 모델을 통해 다량의 정확한 데이터와 그래프에 의지하여 수학적 결론을 추측할 수 있었으며 실세계를 설명하거나 예측할 수 있었다. 즉 수학적 모델을 분석하여 그 결론을 얻는 단계를 거치지 않아도 모델링 과정이 지속될 수 있음을 보았다. 따라서 학생이 수행할 수 있는 모델링 상황의 범위는 넓어진다고 볼 수 있다. 그 과정에서 학생은 새로운 수학적 사실을 발견할 수도 있고 새로운 수학적 개념에 비형식적으로 접근할 수도 있음을 알 수 있다.

Ⅴ. 맺음말

전통적인 문제해결이 기존의 지식을 잘 활용하여 온전한 해를 구하는 과정이라고 한다면 수학적 모델링은 현실 상황을 설명할 수 있는 보다 합리적인 설명 체계를 만들어가는 과정이다. 이는 초기에 수학자가 수학을 만들어가는 과정과 흡사하며 수학을 한다는 것이 수학자의 사고방식과 활동을 닮아가는 것이라고 볼 때, 학교에서의 모델링 활동은 이러한 점에서 큰 의미가 있다. 그러나 수학적 지식의 위계를 고려하여 선형적으로 배열된 수학 교과서의 지식의 습득과는 달리, 현실 문제 상황을 탐구하는 것은 학생의 지식으로 온전히 해결하기가 어려운 경우가 대부분이다. 수학적 모델을 도출하는 데서 어려움을 겪을 수도 있고 얻어진 모델을 해결할 수 없어서 모델의 정교화 과정을 더 이상 진행할 수 없을 수도 있다.

그러나 지금까지 살펴본 수학적 모델링 활동은 6명의 소수 학생에 의해 진행된 것으로 일반성을 가진다고 보기는 힘들지만 다음과 같은 긍정적인 측면을 엿볼 수 있었다.

수학적 모델링에서 스프레드시트의 활용은 지필 환경에서 그래프나 표 등의 시각적인 표현과 즉각적인 피드백을 통하여 모델링 활동에 중요한 도움을 줄 수 있음을 볼 수 있었다. 이러한 사실은 김지연(2005), Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland, & Ursini(1999)의 결과와도 유사하다. 흔히 학생의 지식이 부족함을 경험하게 되는 모델링 활동에서 스프레드시트 모델은 학생이 분석할 수 없는 모델을 만들었을 경우에도 실세계를 예측하고 설명할 수 있는 다



[그림 Ⅳ-15] 모델링 과정에서 스프레드시트의 역할

리를 만들어 줄 수 있음을 보았다. 이것은 학생이 다룰 수 있는 모델링 문제 상황이 확장될 수 있음을 의미한다. 그리고 많은 자료와 그래프를 생성할 수 있는 시뮬레이션 환경 속에서 학생은 새로운 수학적 발견을 하거나 수학의 새로운 지식에 비형식적으로 접근할 수 있는 기회를 가질 수 있음을 보았다. 스프레드시트를 활용한 모델링 활동에서처럼 많은 예를 통하여 수학적 사실을 접하게 된다면 보다 많은 학생들이 수학적 지식을 보다 수월하게 받아들일 수 있으며 수학적 지식의 효용성도 더 잘 알게 될 것이다.

다만 스프레드시트를 이용한 모델링 활동을 위해서 교사는 활동에 필요한 스프레드시트의 기능을 알고 학생의 수준에서 스프레드시트를 활용하여 해결할 수 있는 문제 상황을 선택할 수 있는 안목을 갖추어야 하며, 도전적인 문제 상황을 가지고 의미 있는 모델링 활동을 하는 데는 일반적인 수업 시간보다 긴 시간이 요구되어 정규 수업 시간에 하기에는 어려운 제한점이 있음에 유의할 필요가 있다.

참고문헌

김지연(2005). **엑셀을 활용한 소그룹 모델링에서의 상호작용.** -중학교 2학년 대수 영역을 중심으로-. 한국교원대학교 석사학위 논문.

김현주(2005). **스프레드시트 환경에서 대수 문장제 해결 경험을 통한 학생들의 문자 인식과 문자식 표현에 관한 연구.** 한국교원대학교 석사학위 논문.

Blum, W. (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics,* Ellis Horwood Limited.

Brumbaugh, Douglas K., Ashe, Donna E., Ashe, Jerry L., & Rock, David (1997). *Teaching secondary mathematics.* NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Dossey, J. A., McCrone, S., Ciordano, F. R., & Weir, M. D. (2002). *Mathematics methods and modeling for today's mathematics classroom: a contemporary approach to teaching grade 7-12.* California. Brooks Cole Publishing Company.

Ferrucci, B. J., & Carter, J. A. (2003). Technology-active mathematical modeling, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(5), 663-670.

Giordano, F. R., Weir, M. D., & Fox, W. P. (2003). *A first course in Mathematical Modeling,* 3rd edition. California. Brooks Cole Publishing Company.

Heid, M. Kathleen (1997). *Algebra in a Technological World.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving, In Lesh, R. & Doerr, H. M.(Ed.), *Beyond constructivism: model and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*(pp. 3-33). Mawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., & Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: The interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 167-183.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neuwirth, E., & Arganbright, D. (2004). *The active modeler: Mathematical modeling with Microsoft Excel.* Belmont, California, Brooks Cole Publishing Company.

Pollack, H. O. (1997). Mathematical Modeling and Discrete Mathematics. In Rosenstein, J. G., Franzblau, D. S. & Roberts, F. S. (Ed.), *Discrete Mathematics in the School.* (pp. 99-104). American Mathematical Society.

Stewart, J. (2004). *Calculus: early transcendentals.* California, Brooks Cole Publishing Company.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991), *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum,* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zawojewski, J. S., Lesh R. A., & English, L. (2003). A model and modeling perspective on the role of small group learning activities. In Lesh, R. & Doerr, H. M.(Ed.), *Beyond constructivism: model and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*(pp. 337-358). Mawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

The Role of Spreadsheet in Model Refinement in Mathematical Modeling Activity

Son, Hong Chan (KICE)
Lew, Hee Chan (KNUE)

In mathematical modeling activity modeling process is usually an iterative process. When model can not be solved, the model needs to be simplified by treating some variables as constants, or by ignoring some variables. On the other hand, when the results from the model are not precise enough, the model needs to be refined by considering additional conditions.

In this study we investigate the role of spreadsheet model in model refinement and modeling process. In detail, we observed that by using spreadsheet model students can solve model which can not be solved in paper-pencil environment. And so they need not go back to model simplification process but continue model refinement. By transforming mathematical model to spreadsheet model, the students can predict or explain the real word situations directly without passing the mathematical conclusions step in modeling process.

* key words : spreadsheet(스프레드시트), model refinement(모델 정교화), modeling process(모델링 과정), modeling activity(모델링 활동).

논문접수 : 2007. 10. 11
심사완료 : 2007. 12. 8