대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.4, 487-506. Dec. 2007

수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정[1)]
- 정당화 과정과 표현 과정을 중심으로 -

이 경 화* · 최 남 광** · 송 상 헌***

본 연구는 14명의 중학교 2학년 수학영재들이 아르키메데스 다면체를 소재로 한 공간기하과제를 해결하면서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 대한 연구이다. 문헌 연구를 통해 정당화 유형과 수학적 표현 분석을 위한 분석틀을 마련하고 이들의 다양한 반응들을 분석하였다. 정당화 유형에서는 부분적인 분석을 통해 형식화를 추구하는 학생과 비형식적이며 경험적인 정당화이지만 모든 구성요소를 고려하여 전체적 정당화를 시도하는 두 반응간의 비교를 통해 비형식적 정당화의 유용성에 분명한 주의를 기울일 필요가 있었다. 수학적 표현에서 시각적 표현은 문제해결을 위한 아이디어를 찾고, 구조를 파악하는데 유용한 역할을 하고 있었으며, 기호적 표현을 점진적으로 발전시키는 과정에서 수학적 개념을 표현 속에 함축시키고 정제시켜 정교한 기호(Harel & Paput, 1994)를 창출하려는 욕구를 발견할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

기하학이란 2차원 및 3차원 공간의 구조를 연구하는 분야이다(우정호, 1998). 그러나 Gutiérrez (1996, 2002, 2004)가 지적하고 있듯이, 현재의 기하교육은 3차원 공간기하에 관한 연구보다는 2차원 평면기하 연구에 치중되어 있다. Freudenthal (1973)은 지나치게 일방적인 평면기하 공부가 3차원 대상의 도입 없이 너무 오래 지속되면 학생들의 공간 능력을 사장시킬 수 있다고 경고하면서(나귀수 재인용, 1996), 아동들이 활동하고 숨쉬며 움직이는 공간을 이해하는 것이 기하이며, 따라서 아동들이 공간 속에서 더 나은 생활을 하고 활동하기 위해서는 공간을 알고 탐구할 필요성이 있다(Clements, & Battista, 1992; 류성림, 1999 재인용)고 하였다.

지금까지 공간기하에 관한 연구로는 공간기하와 공간 시각화능력 사이의 관계를 연결하는 연구(Gutiérrez, 1996; Gray, 1999; Owens, 1999; Kwon et al. 2001), 공간기하에서의 van Hiele의 사고수준과 접목시키려는 연구(Gutiérrez, 1992; Saads & Davis, 1997), 각기둥을 이용한 SOLO 분류법과 van Hiele의 사고수준에 의해 학생들의 반응을 분석한 연구(Lawrie et al., 2000, 2002), 그리고 학생들의 공간추론과 증명능력에 관한 연구(Gutiérrez, 2004; Lee, 2005) 등이 있다. 본 연구는 이러한 3차원 공간기하에 관한 연구의 한 부분으로서, 크게 공간추론에 의한 정당화 유형과 수학적 표현이라는 두 개의 내

* 한국교원대학교(khmath@knue.ac.kr)
** 한국교원대학교 대학원(dclick21@hanmail.net)
*** 경인교육대학교(shsong@ginue.ac.kr)
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

용으로 구성되어 있다.

최근에는 엄밀한 형식적 증명방법 이외에도 학생들의 비형식적 정당화 과정 속에서 교수학적 시사점을 찾으려는 추세이다(Graves & Zack, 1997; Weber, 2003; Lee, 2005). 수학영재 관련 연구에서도 이와 유사한 경향이다. 수학영재들이 수학적 추론능력이 탁월하다고는 하지만 그것이 구체적으로 어떻게 나타나고 있는지에 대해서는 더 많은 사례의 수집과 분석이 필요하다는 주장이 제기되었다(송상헌, 허지연, 임재훈, 2006). 본 연구의 첫 번째 내용은 수학영재들이 아르키메데스 다면체를 소재로 공간추론 과정에서 보여주는 정당화 유형이다.

한편, "표현(representation)"이라는 용어는 과정과 산물을 모두 언급하는데, 수학적 표현이라는 것은 수학을 행하는 사람의 마음속에 내적으로 일어나는 것(표상) 뿐만 아니라 외적으로 관찰 가능한 그림, 그래프, 표, 조작물로서의 표현, 그림, 수직선, 기호, 언어 등 다양한 형태로 표현하는 것을 의미한다(Janvier, Bednarz & Belanger, 1987; 최은희 2006, 재인용). 이러한 표현의 역할에 대해서 우정호 (2002)는 일종의 기하학적 언어로 관련된 요소를 공간적, 동시적으로 나타내는 것이 가능하며, 사고를 요약해 주고 문제해결 과정에서 사고를 돕는 등 매우 중요한 수학적 수단이라고 하였다.

그러나 수학에서는 여타의 학문보다 다양한 표현양식을 사용하고 있고, 표현의 선택에 대한 민감도가 문제해결의 결정적 요인임을 널리 알려져 있는데 반해, 표현의 관점에서의 교육적 고찰, 반성은 미흡한 실정이며 왜 어떤 표현이 다른 것들보다 더 효율적으로 작용하는지에 대해서는 관심이 부족한 편이다(김선화, 1992). 또한, 학생이 산출한 표현은 학생 자신에게 뿐만 아니라 교사에게도 매우 유익한데, 학생이 산출한 표현을 통해 그들이 문제 상황을 어떻게 지각하고 있으며, 마음속의 표상은 어떠한지를 알려줌으로써 교사가 학생활동을 안내하기 위해 해야 할 교수활동에 대한 정보들을 얻을 수 있기 때문이다(장혜원, 1997).

이러한 다양한 지적들에 의하면 학생 스스로 표현을 산출해 볼 수 있는 학습 기회를 제공하여 적극적으로 표현을 다루고 수학적 개념과 수학적 구조를 구성해 나가는 활동은 수학교육적인 입장에서 분명한 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

그러므로 본 연구는 수학영재들이 수학적 사고 과정에 필요한 중요한 표현 방법을 발달시킬 것으로 가정하고 그 세부 과정과 특징을 알아보고자 한다. 특히 이미 알고 있는 수학적 표현 방법을 단지 적절히 사용하는가보다는 새로운 표현 방법을 개발해야 하는 상황에서 영재아들이 어떻게 반응하는가에 초점을 둘 것이다. 즉, 상대적으로 연구가 빈약했던 3차원 공간기하 학습과정에서 수학영재들이 보여주는 정당화의 유형과 수학적 표현 방식에 대해 알아보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 정당화 유형

증명을 정당화라는 포괄적인 의미에서 해석하고 학생들이 갖고 있는 증명에 대한 다양한 이해를 토대로 여러 가지 정당화 유형들을 타당한 정당화 유형으로 받아들일 필요가 있다 (조완영, 2000). 정당화 과정에서 학생들은 사고의 특성에 따라 나름대로의 다양한 반응 유형을 보여주고 있다는 구체적인 연구들이 있다 (Bell, 1976; Balacheff, 1987; Tall, 1995; Simon & Blume, 1996; Harel & Sowder, 1998).

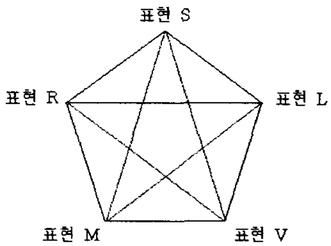
Balacheff (1987)는 기하문제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 정당화 과정을 소박한 경험주의(naive empiricism), 결정적 실험(crucial experiment), 포괄적인 예(generic example), 사고실험(thought experiment)이 라는 네 가지 유형으로 구분하였다. Tall (1995)은 증명에 사용된 표현에 따라 활동적 증명(enactive proof), 시각적 증명(visual proof), 수치적 증명(numeric proof), 형식적인 증명(formal proof)으로 분류하였다. Simon & Blume (1996)은 Balacheff (1987)를 비롯한 기존의 연구를 바탕으로 대수적 관계의 일반화과정에서 이루어지는 정당화 수준을 0수준에서 4수준까지 범주화하여 설명하였다. 같은 맥락에서, Harel & Sowder (1998)는 학생들의 정당화 유형을 증명 스키마(proof schemes)로 표현하여 범주화를 하였다. 교과서나 교사의 권위와 같은 외부자원에 의존하여 정당화하는 외부적 증명 스키마(externally based proof schemes), 예를 이용하여 정당화하는 경험적 증명 스키마(empirical proof scheme) 일반적으로 증명으로 받아들이고 있는 형식적 증명인 분석적 증명 스키마(analytic proof schemes)라는 3가지 카테고리로 크게 분류한 후 다시 외부적 증명 스키마를 권위적(authoritarian) 증명 스키마, 관습적(rutual) 증명 스키마, 기호적(symbolic) 증명 스키마로, 경험적 증명 스키마를 지각적(perceptual) 증명 스키마와 예-기반(examples-based) 증명 스키마로, 분석적 증명 스키마는 변환적(transformational) 증명 스키마와 공리적(axiomatic) 증명 스키마로 각각 세분하여 체계화하였다.

또한 송상헌, 허지연, 임재훈 (2006)은 초등학교 수준의 수학영재들이 평면 및 공간의 최대 분할이라는 과제에서 보여주는 정당화의 방법을 4가지 수준(외부적, 귀납적, 포괄적, 형식적)으로 분류하고 그에 해당하는 각각의 사례를 분석하고 있다.

이처럼 다양한 수준에서 여러 단계로 정당화 유형을 분류하고 있는 것은 그만큼 학생들의 정당화하는 방법이나 사고의 수준이 다양함을 시사한다. 그러나 정당화 유형을 크게 2가지의 유형으로 간단히 분류하는 경우도 있다. 즉, 구체적인 경험과 예에 주목하는 비형식적 방법인 '경험적(empirical) 정당화'와 구체적인 경험에 한정하는 것이 아니라 보다 일반적이고 형식적인 방법까지 고려하는 '연역적(deductive) 정당화'가 그것이다(Marrades & Gutiérrez, 2000; Gutierrez, et al., 2004).

2. 수학적 표현체계

장혜원 (1997)은 Bruner의 행동적(enactive)·영상적(iconic)·상징적(symbolic)표현으로 구성되는 EIS이론과 Lesh와 Nakahara의 표현체계이론을 바탕으로 학교수학에 등장하는 표현체계를 [그림 Ⅱ-1]과 같이 다섯 가지로 분류하였다.



[그림 Ⅱ-1] 장혜원의 표현체계 분류

표현 R: 실제적 표현-실제적 대상 및 그에 대한 행동

표현 M: 조작적 표현-수학학습을 위해 고안된 교육 자료 및 그것을 다루는 행동

표현 V: 시각적 표현

V1: 구체적 그림

V2: 추상성을 띤 다이어그램이나 도형

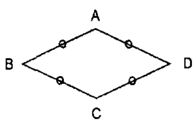
V3: 표현 규약을 알아야 표현 및 표상 가

능한 그래프, 표

표현 L: 언어적 표현- 문장제와 같은 일상 언어의 사용

표현 S: 기호적 표현- 수학 기호, 숫자, 문자

이는 각 표현체계가 보다 어려운 표현을 도입하기 위한 수단이 되기도 하지만 그 자체로 가장 적절한 최종의 표현일 수 있다는 입장에서 상하 관계를 고려하지 않고 그 대등성을 평면적으로 나타낸 것이다. 예를 들어, '마름모의 두 대각선은 서로 직교한다.'라는 정리를 증명할 때 다음과 같이 세 가지 표현으로 나타낼 수 있음은 각 표현체계의 대등함을 보여주는 적절한 예시라고 보았다. 그것은 옳고 그름이나 수준의 차이가 아니라 인지 양식과 관련된 선호의 문제로 볼 수 있다고 하였다(장혜원, 1997:119)

시각적 표현 : 

언어적 표현 : 어떤 사각형이 마름모이다.

기호적 표현 :

□ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$

3. 기호 표현의 정교성과 투명성

Harel & Paput (1994)은 수학적 기호를 암시적인 기호(tacit symbol)와 정교한 기호(elaborated symbol)로 나누어 설명하였다. 정교한 기호는 표현하고자 하는 대상의 요소들 사이의 구조와 관계를 정교하게 부호화한 것을 가리킨다. 이에 반해, 암시적인 기호는 필수적인 구조의 특징을 포함하지 못하고 단순히 변수에 이름을 붙이는 색인(index)을 의미한다. 예를 들어, "β를 순서쌍이라고 하자"라는 표현이 암시적인 기호의 대표적인 예이다. 반면 정교한 기호의 예는 "순서기저 μ와 ν에 관한 선형변환 T의 행렬"이란 개념을 기호로 표현하고자 할 때 $[T]_{\mu,\nu}$이 아니라 $[T]_{\mu\to\nu}$로 표현하는 것이다. 이것을 좀 더 세밀하고 정교한 기호적 표현으로 발전시킨다면,

$$[\,[T(\mu_1)]_\nu : [T(\mu_2)]_\nu \cdots [T(\mu_n)]_\nu]$$

로 표현이 되며, 이 표현 속에는 상대적으로 더 많은 변수들 사이의 관계와 구조들이 함축되어 있기 때문이다.

한편, Lesh, Behr, Post는 표현방법을 투명성에 의해 구분하였는데, 투명한(transparent) 표현이란 개념이나 구조가 드러난 것을, 불투명한(opaque) 표현이란 감추어진 것을 가리킨다(Zazkis & Liljedah, 2004). 예를 들어, 784를 28^2으로 표현하면 이 수가 완전제곱수라는 것이 드러나고, 98로는 나누어진다는 사실은 감추어진다. 따라서 완전제곱의 성질은 투명해지고, 98로 나누어떨어진다는 성질은 불투명해진다. 이 수를 $13\times60+4$의 표현으로 바꾸면 13으로 나누었을 때 나머지가 4라는 것이 투명해지는 대신 완전제곱의 성질은 불투명해진다. 이와 같이 표현 대상을 어떻게 나타내느냐에 따라 그 대상의 성질과 개념이 투명해지기도 하고 불투명해지기도 한다. 학생들이 만든 표현에서 어떤 수학적 개념과 성질들이 투명해지는가를 살펴보면 그 학생의 내면에 있는 수학적 개념과 구조를 알 수 있다.

III. 연구의 방법

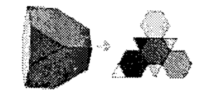
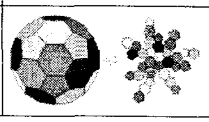
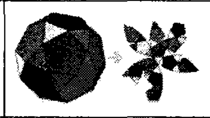
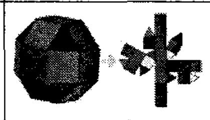
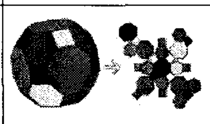
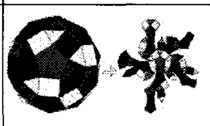
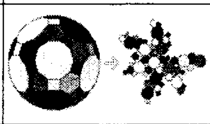
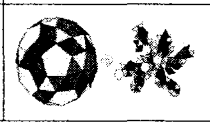
1. 연구의 과제

우리나라에서 중학교 수준의 많은 수학영재들은 이미 선행 학습을 하고 있으므로, 그들에게 생소하지만 이전의 학습 경험과 적절히 관련되면서도 수학적 사고를 유발할 수 있는 과

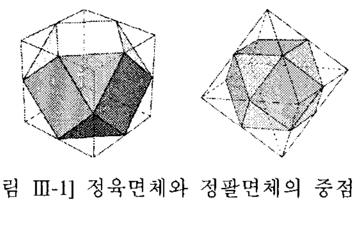
제를 찾아야만 했다. 학생들에게 제시한 과제는 다면체들 간의 관계와 성질을 기하학적으로 추론하여 정당화하고 수학적으로 표현하는데 필요한 조건들을 반영하였다.

각 면이 모두 합동인 정다각형이고 각 꼭지점에 모이는 면의 개수가 같은 볼록다각형은 5개의 정다면체뿐이다. 이들의 각 꼭지점 부분을 일정한 방법으로 잘라내거나 각 면을 일정한 거리로 부풀리고 그 사이를 정삼각형으로 메우면 각 꼭지점에 모이는 면이 모두 일정한 정다각형으로 형성되는 13종의 아르키메데스 입체(Archimedian solids)가 만들어진다. 이 다면체들은 아르키메데스에 의해 발견되었다고는 하나 정확한 기록은 없고, 1619년에 케플러에 의해 복원되었다. 만든 방법에 따라 종류를 구분하면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 아르키메데스 다면체(13종)

구분	이름	아르키메데스 다면체들의 모양	각 꼭지점에 모이는 정다각형의 종류
각 모서리의 3등분점을 기준으로 잘라 만듦	깎은정사면체		(3,6,6)
	깎은정육면체		(3,8,8)
	깎은정팔면체		(4,6,6)
	깎은정십이면체		(3,10,10)
	깎은정이십면체		(5,6,6)
각 모서리의 2등분점을 기준으로 잘라 만듦	육팔면체		(3,4,3,4)
	십이이십면체		(3,5,3,5)
깎은 다면체의 각 꼭지점을 다시 절단하여 만듦	부풀린육팔면체		(3,4,4,4)
	부풀려깎은육팔면체		(4,6,6)
	부풀린십이이십면체		(3,4,5,4)
	부풀려깎은십이이십면체		(4,6,10)
면을 옮기고 그 사이를 정삼각형으로 채워 부풀려서 만듦	다듬은육팔면체		(3,3,3,3,4)
	다듬은십이이십면체		(3,3,3,3,5)

이 중 본 연구에서 사용한 과제는 [그림 Ⅲ-1]에서 보는 것처럼 정육면체와 정팔면체의 각 모서리의 2등분점을 기준으로 잘라 만든[2] 육팔면체(cuboctahedron)이다.

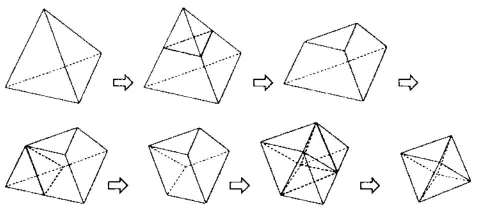


[그림 Ⅲ-1] 정육면체와 정팔면체의 중점깎기

2) 본 실험의 학습과제에서는 이를 학생들이 쉽게 접근할 수 있도록 '중점깎기'라 명명하였다.

이를 바탕으로 실험에 투입한 과제의 구체적 내용은 [그림 Ⅲ-2]과 같다.

※ 아래 그림은 정사면체의 모든 꼭지점에서 모서리길이의 1/2이 되는 지점까지 깎아내어 만들어지는 다면체를 나타낸다. 이와 같이 깎는 방법을 "중점깎기"라고 하자.



(과제1) **<u>정팔면체</u>**를 "중점깎기"를 하면 어떤 다면체를 얻겠는가? 그 이유는 무엇인가?

(과제2) 나눠 준 <그림> "여러 가지 다면체들"을 참고할 때 **<u>정팔면체</u>**를 "중점깎기"를 하면 어떤 다면체를 얻겠는가? 이 다면체를 수학적으로 표현해보시오

(과제3) **<u>정육면체</u>**를 "중점깎기"를 하면 어떤 다면체를 얻겠는가? 그 이유는 무엇인가? 이 다면체를 수학적인 기호를 사용하여 표현해보시오.

(과제4) 정육면체와 정팔면체를 "중점깎기"하여 얻은 다면체들 사이에는 어떤 관계가 있는가? 그러한 결과가 나온 이유가 무엇인지 설명하시오.

[그림 Ⅲ-2] 연구에 사용한 과제

(과제1)과 (과제4)는 공간추론에 의한 정당화를 요구하는 질문으로 구성되어 있다. 즉, 서로 다른 두 정다면체를 깎았는데 같은 다면체가 제작된다는 사실을 직접 확인한 후, 왜 같은 다면체가 되었는지에 대해서 공간추론을 토대로 조사하고 분석하여 정당화할 수 있도록 하였다.

<표 Ⅲ-2> 정육면체와 정팔면체의 쌍대관계

구분	한 면을 이루는꼭지점의 개수	한 꼭지점에 모인 면의 개수	면의 개수	꼭지점의 개수
정육면체	4	3	6	8
정팔면체	3	4	8	6

정육면체와 정팔면체는 각 모서리의 이등분점을 기준으로 잘라 만들면, 다면체의 모서리를 2등분할 때 새로 생기는 다각형의 모양은 각 꼭지점에 모여 있는 원래 면의 수와 같고 새로 생기는 다각형의 수는 원래 꼭지점의 수와 같은 쌍대(dual)의 관계를 이루기 때문이다.

(과제2)와 (과제3)에서는 3차원 입체인 육팔면체를 2차원 평면에 표현하도록 하였다. 정다면체와 달리 서로 다른 정다각형이 포함되어 있고, 그 공간적 배열도 파악해야 2차원 표현이 가능하다.

수학영재들은 정당화와 수학적 표현을 요구하는 위 과제에 대해 어떤 수학적인 내용들에 주목하고, 그것들을 어떻게 활용하는지, 대상의 본질을 왜곡하지 않으면서 정제된 수학적 표현들로 어떻게 나아가는지를 살펴보고자 한다.

2. 연구의 대상

이 연구에서는 3시간 단위의 공간기하수업에 참여한 중학교 2학년 수학영재 14명을 연구의 대상으로 선정하였다. 이들은 중소도시에 거주하면서 영재교육진흥법에 따라 과학기술부의 지원으로 운영되는 대학부설 과학영재교육원에 선발되어 6개월 이상의 교육을 받아오고 있는 같은 반 소속의 학생들이다. 본 기관의 선발시험 절차와 과정에 따르면 이 학급에 소속된 학생들의 문제해결능력은 또래 연령의 상위 1%이내에 속한다. 그런데 이 학급을 대상으로 아르키메데스 다면체와 관련된 내용을 알고 있는지를 사전조사를 통해 확인하여 의심이 가는 3명을 제외한 14명만 본 연구에 참여시켰다. 이들은 모두 정다면체와 오일러 정리에 대해서는 이해하고 있었지만 아르키메데스 다면체와 유사한 공부를 한 적은 없었다.

3. 자료의 수집 및 분석

본 실험은 2007년 5월 19일에 실시하였고 수업녹화자료, 학생들이 작성한 활동지, 도우미 교사가 작성한 관찰일지, 면담기록지 등을 수집하여 분석하였다. 학생들에게는 자신들의 생각을 최대한 자세히 표현하도록 하였으며, 생각을 수정할 필요가 있을 때는 이전의 기록한 내용을 지우지 말고 쓸 수 있도록 유도하였다.

자료 분석은 특정 연구자가 가질 수도 있는 개인적인 편향성의 문제를 극복하기 위해 공동 연구자들과 함께 사고과정을 분석하고 그 특징들에 대한 합의가 이루어 질 때까지 논의를 계속하였다.

정당화 유형에 대한 학생들의 이해수준을 Balacheff, Tall, Simon & Blume, Harel & Sowder 등의 연구처럼 세부적으로 분류할 필요도 있겠지만 본 연구에서는 Marrades & Gutiérrez (2000)가 구분한 방법처럼 '경험적(empirical) 정당화'와 '연역적(deductive) 정당화'로 단순화하였다.

한편, 주어진 과제에서 구성요소들을 고려하는 방식에 따라서도 정당화를 구분할 수가 있다. 특정요소를 포착하고 문제의 부분적 구조까지는 파악하지만, 전체적인 구조를 찾지 못하는 경우에는 '부분적(partial) 정당화'로, 문제의 본질을 파악하고 전체적인 과정을 총괄하여 해결하는 경우에는 '전체적(whole) 정당화'로 각각 구분할 수 있다.

그러므로 이 연구에서는 학생들에게 제시한 과제의 특징과 여러 선행 연구결과를 참고하여 사고의 특성을 고려한 추론방식(경험적, 연역적)과 과제의 구성요소를 고려한 방식(부분, 전체)을 종합하여 <표 Ⅲ-3>과 같이 정돈하여 이를 정당화 유형 분석틀로 삼고자 한다.

<표 Ⅲ-3> 정당화 유형 분석틀

사고의 유형 / 과제에서 고려하는 내용요소	경험적 (empirical) 정당화	연역적 (deductive) 정당화
부분(partial)적 정당화	부분 & 경험	부분 & 연역
전체(whole)적 정당화	전체 & 경험	전체 & 연역

기호가 얼마나 정교한가의 여부는 그 기호가 사전 수학 지식과 어느 정도 관련이 있느냐에 따라 결정되는 것으로 상당히 인지적인 문제이다. 따라서 본 연구에서는 서로 다른 표현체계 간에는 서로 대등한 입장에서 우열의 문제가 아닌 선호의 문제라는 입장을 취하지만, 한 표현체계 내에서는 대등한 입장보다는 좀 더 정교한 표현이 가능하다는 입장을 취할 것이다. 특히, 기호적 표현에서의 정교성 여부를 고려하고자 하는데, 그것은 수학영재들의 사고특성상 그들은 표현을 함축적으로 절약시켜 사고의 경제성을 도모(Hoare & Wood, 1984; 송상헌, 1996 재인용)하려는 수학자의 자질이 있다고 한 만큼 이들에게서 드러나는 기호적 표현에서의 정교성을 논하는 것은 타당하다고 하겠다. 그러나 기호적 표현의 정교성을 논하는데 있어서는 많은 어려움이 따르는 것이 사실이다. 어떤 사람에게는 정교한 것으로 보이는 기호가 또 다른 사람에게는 아주 쓸모없거나 암시적인 것이 될 수도 있기 때문이다. 그러므로 개념에 대한 기호를 개발할 때는 사용자가 개념을 이해하고 있는 정도에 맞추어 기호의 정교성을 결정해야 한다는 Harel & Paput (1994)의 주장은 수학영재들의 기호적 표현을 논의하는데 적절한 분석틀을 제공해주고 있다.

더욱이, 수학영재들의 사고 특성에 관한 선행연구들에 의하면(Sriraman, 2004; Lee, 2005; 김지원, 송상헌, 2004), 수학영재들은 단순히 수학적 지식들을 교사의 주도하에 전달받기 보다는 심화된 내용을 바탕으로 자기주도적으로 수

학적 사실이나 지식들을 연구하면서 발견해나가는 과정을 즐기는 특성이 있다고 한 만큼, 스스로 표현을 산출해 볼 수 있는 학습 기회를 제공하여 적극적으로 표현을 다루고 수학적 아이디어와 수학적 구조를 구성해 나가는 활동은 수학교육적인 입장에서 분명한 시사점을 얻을 수 있다고 하겠다.

Ⅳ. 연구의 결과

1. 정당화 반응 유형 분석

정육면체와 정팔면체를 각각 중점깎기를 하면 서로 쌍대(dual)관계에 의해 동일한 다면체가 된다. 이 둘이 왜 같은 다면체가 되는지 그것을 정당화하라는 질문에 대해 수학 영재아들은 다양한 반응을 보여주었다. 14명의 수학영재들이 보여준 정당화의 방법을 본 연구를 위해 새롭게 구성한 2차원 구조의 분석틀[3]에 비추어 분류하면 아래 <표 Ⅳ-1>와 같으며, 그 반응들의 구체적인 내용들을 자세히 살펴보고자 한다.

<표 Ⅳ-1> 연구 대상자들이 보여준 정당화 유형

사고의 방식 / 과제에서 고려하는 요소	경험적 (empirical) 정당화	연역적 (deductive) 정당화
부분(partial)의 정당화	M1, M2 (2명)	M7, M9, M13 (3명)
전체(whole)의 정당화	M3, M4, M8, M10, M11 (5명)	M5, M6, M12, M14 (4명)

구분	과제에서 고려하는 요소					사고방식	
	쌍대(dual)의 원리					결과	
	꼭지점의 수	면의 수	한 꼭지점에 모인면의수	한 면을 이루는 꼭지점의 수	모서리의 수	전체(W) 또는 부분(P)	경험(E) 또는 연역(D)
M1	○	○			○	P	E
M2	○	○			○	P	E
M3	○	○	○	○		W	E
M4	○	○	○	○		W	E
M5	○	○	○	○	○	W	D
M6	○	○	○	○	○	W	D
M7	○	○				P	D
M8	○	○	○	○		W	E
M9	○	○			○	P	D
M10	○	○	○	○	○	W	E
M11	○	○	○	○	○	W	E
M12	○	○	○	○		W	D
M13	○	○			○	P	D
M14	○	○	○	○	○	W	D

가. 부분 · 경험적(*partial & empirical*) 정당화

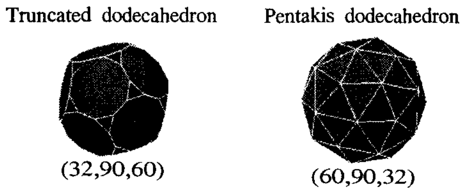
경험적인 사고와 문제의 부분적인 구조를 파악하여 정당화를 시도한 학생의 답변의 예는 다음과 같다.

M1: 정육면체의 꼭지점의 수는 정팔면체의 면의 수와 같고, 정육면체의 면의 수는 정팔면체의 꼭지점의 수와 서로 같다. 또한 모서리의 수가 서로 같다.

학생 M1은 정육면체와 정팔면체가 '꼭지점의 수'와 '면의 수'가 서로 반대이고 모서리의 수가 같기 때문이라고 설명하고 있다. 이 학생의 설명 속에는 쌍대(dual)의 원리(구체적인 언급은 없었지만)가 반영되어 있다. 그러나 이 학

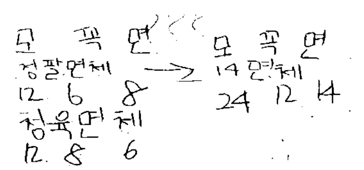
3) 14명의 정당화 반응들은 문제의 전체적인 구조나 문제 해결의 본질적인 요소를 통합적으로 고려하여 정당화를 시도하는 것과 문제의 본질에 접근하지 못하고 부분적이고 특정요소만을 포착하여 그것만으로 정당화를 시도하는 것으로 확연히 구분되었다. 또한 구체적인 예에 한정하여 경험적인 수준에서 만족하는 반응과 경험적인 수준에서 만족하지 않고 좀 더 일반화시키고 확장하려는 연역적 정당화 반응들로 확연히 구분되었다. 이러한 반응결과는 기존의 선형적인 정당화 분석틀로는 분석하기가 어려웠다. 또한 이러한 분류가 단순히 학생들의 반응들을 새로운 분석틀로 분류하는데 목적이 있는 것이 아니라, 경험적인 수준에서의 비형식적 정당화 반응이지만 문제의 본질 및 전체적인 구조를 파악할 줄 아는 학생반응과 부분적이고 특정요소만을 포착하여 형식화를 추구한 학생반응을 서로 비교해 봄으로써 비형식적 정당화의 유용성에 의의를 두고자 하였다.

생은 '꼭지점의 수'와 '면의 수'의 쌍대관계에 만 초점을 두고 있을 뿐, '한 면을 이루는 꼭지점의 수'와 '한 꼭지점에 모인 면의 수' 또한 쌍대관계임을 반영하지 못했다. 실제로 [그림 Ⅳ-1]에서 보는 것처럼 두 다면체는 '꼭지점의 수'와 '면의 수'가 서로 반대이며 모서리의 수는 일치한다. 그러나 중점깎기를 시행 후에도 같은 다면체가 되는 것은 아니다. 따라서 이 반응은 부분적인 설명을 하고 있지만 전체적인 변화과정에 대한 반영이라고 할 수는 없다.



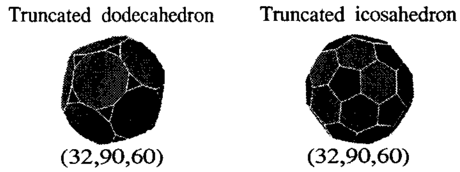
[그림 Ⅳ-1] 꼭지점의 수와 면의 수가 서로 반대인 두 다면체

부분적인 반응을 보인 또 다른 학생(M2)의 예를 살펴보면 아래와 같다.



[그림 Ⅳ-2] 부분 · 경험적 정당화 반응을 보인 학생(M2)의 예

이 답변은 "정팔면체의 꼭지점의 수는 6개, 모서리의 수는 12개, 면의 수는 8개이고, 정육면체의 꼭지점의 수는 8개, 모서리의 수는 12개, 면의 수는 6개인데, 이 두 다면체를 모두 중점깎기를 하면 동일하게 꼭지점의 수가 12개, 모서리의 수가 24, 면의 수가 14개가 되어 같은 다면체가 된다."는 의미이다. 이 학생은 다면체의 '꼭지점의 수', '모서리의 수', '면의 수'를 통해서만 정당화를 시도하고 있다. 그렇다면, '꼭지점의 수', '모서리의 수', '면의 수'가 서로 같은 다면체들은 항상 동일한 다면체가 되는가에 대해서 생각해 볼 필요가 있다. 아래 [그림 Ⅳ-3]에서 보는 것처럼, 꼭지점, 모서리, 면의 수가 모두 같아도 서로 다른 다면체가 존재한다.



[그림 Ⅳ-3] 꼭지점, 모서리, 면의 수가 모두 동일하지만 서로 다른 두 다면체

따라서 추가적으로 쌍대 관계와 한 꼭지점에 모인 면의 수의 요소들을 함께 고려할 필요가 있다. 그러므로 이 학생의 반응도 반드시 고려해야 할 요소들을 충분하게 고려하지 못한 부분적인 정당화 반응이다.

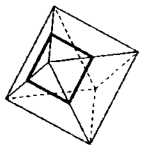
나. 전체 · 경험적(*whole & empirical*) 정당화

다음은 경험적 정당화이면서 전체적 정당화 반응을 보인 답변들(M3, M4)을 살펴볼 것이다. 앞에서 살펴본 부분적인 정당화 반응과 아래의 전체적인 정당화 반응으로 분류한 학생 반응을 서로 비교해본다면 이들의 구분이 명확해진다.

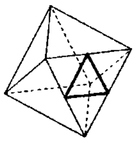
M3: ①정팔면체는 4개의 삼각형이 모여서 한 꼭지점을 이루기 때문에 자르면 사각형이 6개 생기고 ②처음 8개의 삼각면이 남아 있으므로 6개의 정사각형과 8개의 정사각형으로 구성된다. 반대로, ③정육면체는 3개의 사각형이 한 꼭지점을 만들기 때문에, 8개의 꼭지점을 자르면 삼각면이 8개 생기고 ④처음 6개의 사각면이 남아 있으므로 6개의 정사각형과 8개의 정삼각형으로 구성된다. 그러므로, 두 다면체는 모두 중점깎기 후 6개의 정사각형과 8개의 정삼

각형으로 구성된 다면체를 만들 수 있다.

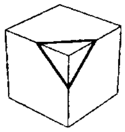
학생 M3의 답변 중 ①은 그림으로 표현하면 [그림 Ⅳ-4a]을 의미하고, ②는 [그림 Ⅳ-4b], ③은 [그림 Ⅳ-4c], ④는 [그림 Ⅳ-4d]를 의미한다.



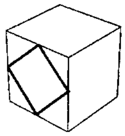
[그림 Ⅳ-4a]



[그림 Ⅳ-4b]



[그림 Ⅳ-4c]



[그림 Ⅳ-4d]

[그림 Ⅳ-4] 중점깎기의 원리의 시각적 표현

이 학생은 아래 [그림 Ⅳ-5]에서 보는 것처럼 '꼭지점의 수(⇔면의 수)'에만 쌍대관계를 적용한 것이 아니라, 한 꼭지점에 모이는 면의 수(⇔한 면을 이루는 꼭지점의 수)'에도 쌍대관계를 모두 적용하고 있다.

개수 \ 종류	정육면체	정팔면체
꼭지점	8	6
면	6	8
한 꼭지점에 모인 면	3	4
한 면을 이루는 꼭지점 ~~모이는~~	4	3

∴ 정육면체의 면의 개수 = 정팔면체 꼭지점 개수
정육면체 꼭지점에 모인면 = 정팔면체 한면의 꼭지점.

반대의 경우도 성립 하므로
∴ 정팔면체 면 = 정육면체 꼭지점
정팔면체 꼭지점에 모인면 = 정육면체 면의 꼭지점

[그림 Ⅳ-5] 전체 · 경험적 정당화 반응을 보인 학생(M4)의 예

따라서 전체적인 변화과정을 정확하게 통찰하고 있으며 모든 구성요소들을 고려하여 합리적으로 설명하고 있는 전체적인 정당화 반응으로 볼 수 있다.

다. 부분 · 연역적(*partial & deductive*) 정당화

다음은 경험적인 시도를 넘어 연역적인 시도를 하지만 부분적인 요소만을 고려한 정당화 반응으로 분류한 학생(M7)의 반응을 살펴보고자 한다.

왜냐하면 중점깎기 후, 면의 갯수는
처음 다면체의 꼭지점 + 면 이기때문.
그래서 정 팔면체는 8개의 면과 6개의
꼭지점을 가지고 있으어서 8+6=14 이다
그리고 정6면체는 6개의 면과 8개의
꼭지점이 있기 때문에 6+8=14 이다,

[그림 Ⅳ-6] 부분 · 연역적 정당화 반응을 보인 학생(M7)의 예

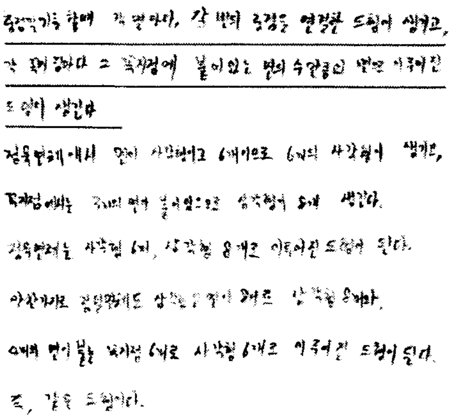
이 학생의 앞부분은 다면체를 중점깎기하였을 때, 변형 후의 총 면의 개수는 변형 전의 꼭지점의 수와 면의 수의 합으로 표현될 수 있다는 것을 일반화하여 나타내고 있다. 그러나 '꼭지점의 수'와 '면의 수'로만 쌍대관계를 적용하고 있을 뿐, '한 꼭지점에 모인 면의 수', '한 면을 이루는 꼭지점의 수'에는 주목하지 못하고 있다. 그러므로 전체적 구조를 파악하지 못하고 부분적 구조만을 파악하였다고 볼 수 있다.

라. 전체 · 연역적(*whole & deductive*) 정당화

다음은 전체적인 요소들을 고려하면서 확장과 일반화를 시도한 연역적인 정당화 반응의 예이다.

M5: <u>중점깎기를 하는 것은 각각의 모서리의 반</u>

을 서로 이어 깎는 것을 말하는데, 이렇게 해서 깎는 부분은 모두 꼭지점 부분이다. 따라서, 한 꼭지점에 모이는 모서리의 개수에 따라 나오는 면의 모양이 정해진다(3개가 모이면 정삼각형, 4개가 모이면 정사각형…) 이 때, 각 면에서는 각 변의 중점을 연결한 면의 모양이 정해진다. 정육면체와 정팔면체를 예를 들면, 정육면체는 한 꼭지점에 3개의 모서리가 모여서 중점깎기를 하면 정삼각형이 8개 나오고, 정육면체에서 면이 정사각형이고 6개이므로 6개의 정사각형이 생기게 된다. 반대로, 정팔면체는 한 꼭지점에 4개의 모서리가 모여 정사각형이 6개 나오고, 각 면은 정삼각형이므로 8개의 정삼각형이 되는 도형이 된다.



[그림 Ⅳ-7] 전체 · 연역적 정당화 반응을 보인 학생(M6)의 예

학생 M5와 학생 M6의 반응이 외관상으로는 학생 M3과 학생 M4의 반응과 크게 차이가 나질 않아 보이지만 이들 간에는 매우 분명한 차이가 있다. 이 답변들은 크게 두 부분으로 나눌 수가 있다. 밑줄 친 부분은 중점깎기에 대한 일반적인 원리를 설명하고 있는 것이고, 나머지 부분은 그 일반적인 원리의 구체적인 예에 해당된다. 즉, 밑줄 친 부분은 보다 일반화된 답변으로 정육면체이든, 정팔면체이든 관계없이, 모든 정다면체들에 대한 중점깎기의 원리를 설명하고 있는 것이고, 그 후에 정팔면체와 정육면체를 구체적인 예로 설명하고 있다. 따라서 학생 M3이나 학생 M4보다는 더욱 발전된 정당화 반응을 보여주고 있으며, 확장과 일반화를 시도한 연역적인 반응이라 할 수 있다.

2. 수학적 표현에 대한 반응 분석

(과제2)에서 정팔면체를 중점깎기한 후 얻어지는 다면체를 '수학적으로 표현'하라는 요구에 몇몇 학생들은 그 의미를 즉시 이해하고 언어적인 표현, 시각적인 그림, 도형, 기호, 등 다양하게 접근하는 학생들도 있었다. 그러나 '수학적인 표현'이라는 용어의 의미가 무엇인지 설명해 달라는 학생도 있었으며, 그림이나 언어적 표현 선에서 만족하는 학생들이 더 많았다. 그래서 (과제3)에서는 좀 더 구체적으로 다면체를 '기호적으로 표현'을 해보라고 요구하였으며, 학생들은 기호적 표현을 만들어 내는데 많은 시간을 보냈다. 이들의 반응을 언어적 표현, 시각적 표현, 기호적 표현으로 분류하여 살펴보고자 한다.

가. 언어적 표현(L)

육팔면체(cuboctahedron)에 대한 모든 학생들의 언어적 표현들을 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-2> 언어적 표현 반응

구분	언어적 표현	인원수 (14명)
L(1)	(정)삼각형 8개 (정)사각형이 6개로 이루어진 14면체(입체도형)	6명
L(2)	면 14개, 모서리 24개, 꼭지점 12개로 이루어진 다면체	2명
L(3)	면 14개, 모서리 24개, 꼭지점 12개, 한 꼭지점에서 만나는 모서리가 4개, 삼각형이 8개, 사각형이 6개로 이루어진 도형, 일명 14면체	1명
L(4)	모든 꼭지점에서 2개의 정사각형과 2개의 정삼각형으로 구성된 14면체	1명
L(5)	삼각형과 사각형이 규칙적으로 배열되어 있는 다면체	1명
L(N)	언어적 표현 없음	3명

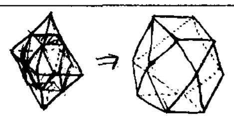
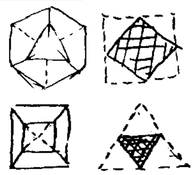
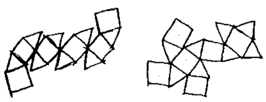
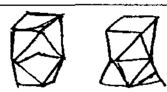
다수의 학생들이 육팔면체를 언어적으로 표현하는데 있어서 다면체의 구성요소들 중 '면의 모양'과 '면의 개수'에 초점을 두어 다면체를 표현하였다(L(1), L(2), L(3)). 이는 '정육면체', '정팔면체'와 같이 이들의 명칭이 면의 개수에 주목하여 표현되어 있다는 사실에서 유추해 볼 수 있다. L(2)는 정당화과정에서 부분적 정당화 반응을 보인 M2학생의 반응이다. 이 학생은 정당화 과정에서 '꼭지점', '모서리', '면'의 수로 정당화를 시도했던 것처럼 육팔면체에 대한 언어적 표현 역시 '꼭지점', '모서리', '면'의 수에 한정해서 다면체를 표현하고 있다. 그러나 정당화 분석에서 언급했던 것처럼, '꼭지점', '모서리', '면'의 수가 서로 동일하여도 서로 다른 다면체가 존재하기 때문에 이 반응은 정보가 좀 더 요구된다고 볼 수 있다. 그에 반해 L(3)은 정당화 과정에서 전체적 정당화 반응을 보인 M11학생의 반응이다. 이 학생은 자신이 고려할 수 있는 모든 구성요소들은 가능한 모두 기술하려는 모습을 보여주고 있다. 정보의 과잉적 측면이 있다고 하겠다. 이 학생에게 "고려된 요소들 중에 불필요한 것은 없을까?"와 같은 추가적인 질문을 통해 정보의 경제성을 고려해보도록 발문하지 못한 것이 아쉽게 느껴진다. 결과적으로 L(2)학생은 정당화 과정에서 부분적 반응을 보였고 L(3)학생은 전체적 정당화 반응을 보였는데, 이들의 반응에서 언어적 표현과 정당화 유형의 유사성을 보여주었다.

L(4)는 정당화반응에서 전체적·연역적 반응을 보인 학생의 언어적 표현이다. 이 학생은 다면체의 구성요소 중 '한 꼭지점에 모이는 면(모서리)의 수'에 주목하여 표현하고 있다. 이러한 반응은 상대적으로 적었는데(L(3), L(4)), 이는 정당화 과정에서 이 요소에 주목 여부에 따라 학생의 정당화 방법이 달라졌던 것만큼 '한 꼭지점에 모이는 면(모서리)의 수'는 다면체의 구성요소들 중에서 학생들이 주목하기 어려운 요소로 드러났다.

한편, 반응 L(N)처럼 3명 학생들은 언어적 표현을 하지 않았다. 대신에 이들은 모두 구체적인 도형이나 그림과 같은 시각적인 방법으로는 육팔면체를 표현하였다.

나. 시각적 표현(V)

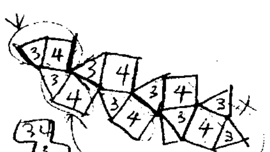
<표 Ⅳ-3> 시각적 표현 반응

구분	시각적 표현	인원수 (14명)
V(1)		10명
V(2)		V(1)에 속하는 10명중 3명
V(3)		V(1)에 속하는 10명중 4명
V(4)		3명
V(N)	시각적 표현 없음	1명

수학영재들의 시각적 표현은 다양하게 나타났다. 특히 학생들은 시각적 표현을 통해 육팔면체를 분석하여 규칙성과 패턴을 찾을 수 있었으며 그것을 기반으로 하여 기호적 표현으로 발전시켰다. 14명 중 10명의 학생들은 V(1)과 같은 입체적 표현을 통해 육팔면체의 표상을 획득하였으며 이 중 3명은 다시 V(2)와 같은 방법으로 정육면체와 정팔면체가 육팔면체가 되는 원리를 시각적적 방법으로 표현하였다. 즉, V(2)에서는 정육면체의 8개의 꼭지점에서는 정삼각형이 형성되고, 정육면체의 6개의 각 면에서는 정사각형이 형성되는 다면체가 되며 반

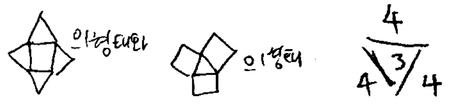
대로 정팔면체는 6개의 꼭지점에서는 정사각형이 형성되고 정팔면체의 8개의 면에서는 정삼각형이 형성된다는 중점깎기의 원리를 그림을 통해 설명하였다. 그러나 14명중 3명은 V(3)와 같이 생성되는 다면체를 파악하고자 시각적 표현을 여러 번 시도하였으나 그 형태를 입체적으로 표현해내지는 못했다. 그 결과 차후에 진행되는 질문에서도 문제의 본질에 접근하지 못하게 되었으며 정당화 과정과 표현에 있어서도 부분적인 반응만 가능했다.

4명의 학생은 V(4)에서 보듯이 육팔면체의 전개도로 표현하였는데. 이 4명 중 2명은 이 전개도를 육팔면체의 구조를 파악하는데 매우 유용한 정보로 활용하고 있었다. 즉, [그림 Ⅳ-8]과 같이 전개도의 각 면들에 숫자 3, 4를 기입하고 육팔면체의 면들이 정삼각형과 정사각형으로만 이루어져 있다는 사실에 주목할 수 있었고, 이 숫자들이 규칙성 있게 반복되고 있다는 사실을 통해 자연스럽게 한 꼭지점에 모이는 면 또는 모서리들이 일정하다는 사실이나 한 면에 동일한 다각형들이 일정하게 배치되어 있다는 사실(즉, 꼭지점의 차수나 면의 차수)과 같은 수학적인 내용들을 발견하게 되었으며 이를 더욱 발전시켜 기호적 표현으로 이르게 되었다.

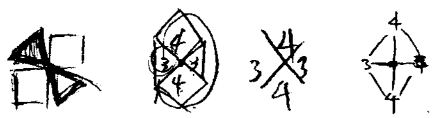


[그림 Ⅳ-8] 학생(M11)의 시각적 표현 반응

아래 그림은 육팔면체의 전개도에서 3각형과 4각형이 규칙적으로 배열되었다는 것을 파악한 후 규칙적인 패턴을 찾은 내용들을 시각적으로 표현한 것들인데, [그림 Ⅳ-9a]는 각 면을 중심으로, [그림 Ⅳ-9b]는 한 꼭지점을 중심으로 파악하는 과정이다.

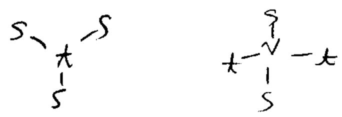


[그림 Ⅳ-9a] 한 면을 중심으로 한 시각적 표현



[그림 Ⅳ-9b] 한 꼭지점을 중심으로 한 시각적 표현

[그림 Ⅳ-10]은 [그림 Ⅳ-9]의 시각적인 표현들을 분자 구조도와 흡사한 기호적인 방법으로 발전시켰다. [그림 Ⅳ-10a]는 3각형(t-riangle)을 중심으로 봤을 때, 4각형(s-quare)이 3개씩 이웃하여 형성되어 있다는 것이며, [그림 Ⅳ-9b]은 꼭지점(v-ertex)을 중심으로 삼각형(t)과 사각형(s)이 배열시켜 결국 (3,4,3,4)를 의미하고 있다.



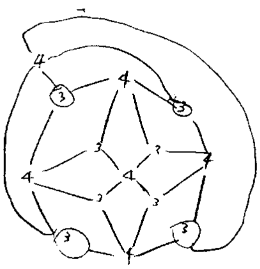
(a) (b)

[그림 Ⅳ-10] 한 꼭지점(면)을 중심으로 기호화를 시도한 표현

이들의 표현에서 Polya가 권고했던 “기호를 쉽게 인식할 수 있게 하는 간단한 방법은 첫 글자를 기호로 사용하는 것이다.”라는 원칙을 자연스럽게 사용하고 있음을 확인할 수 있었다. 이들의 표현에서 숫자나 삼각형(t), 사각형(s), 꼭지점(v)을 의미하는 기호만 있는 것이 아니라 육팔면체의 꼭지점이나 면의 배열과 같은 공간적 성질도 함께 표현되고 있다. 이것은 공간 기하적 성질을 갖고 있는 다면체의 구조를 표현하고자 하였기 때문으로 풀이된다.

[그림 Ⅳ-11]는 한 면의 다각형을 숫자로 표시하고 숫자(면)와 숫자(면) 사이를 연결시켜서 육팔면체의 전체를 표현한 것인데, 이것은 결

국 꼭지점과 면을 서로 맞교환된 형태로 다면체를 표현한 것으로 그래프이론(Graph Theory)의 중요 내용 중에 하나인 쌍대 그래프(dual graph)로 표현한 것이다.

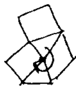


[그림 Ⅳ-11] 학생(M10)이 그린 육팔면체의 dual graph

이와 같이 학생들은 시각적 표현을 통해 육팔면체의 구조와 규칙성, 패턴을 찾고 그것을 발전시켜 기호적 표현으로 발전시키는 모습을 보여주었다. 이는 Skemp(1986)가 시각적 표현은 직관적 사고와 관련하여 수학적 사실을 즉각적으로 이해하도록 도와주며, 문제해결 과정에서도 유용한 단서나 해결책을 제공해 주는 도구라고 언급한 것처럼 실험에 참여한 학생들 또한 시각적 표현을 활용하고 있었다.

다. 기호적 표현(S)

<표 Ⅳ-4> 기호적 표현 반응

구분	기호적 표현	인원수 (14명)
S(1)	△8□6 다면체 8α6β(4)	4명
S(2)	육팔면체: s-4t-4s-4t-s (f) 육팔면체: s-4t-4s-4t-s (v)	1 명
S(3)	 →(3,4,3,4) 12(3,4,3,4)	2명
S(4)	⟨3·8 4·6⟩	1명
S(N)	기호적 표현 창안해 내지 못함	6명

S(1)은 언어적 표현 L(1)을 그대로 기호적 표현을 한 것으로 볼 수 있다. 면의 모양과 개수에 초점을 둔 표현으로서 "삼각형이 8개 있고 사각형이 6개 있는 다면체"를 의미로, 언어적 표현처럼 빈도수가 가장 많았다.

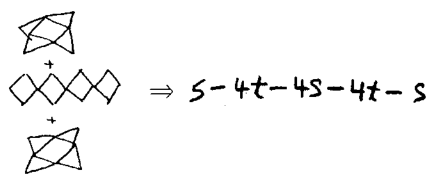
두 번째 $8\alpha 6\beta_{(4)}$에서 문자 α, β는 [그림 Ⅳ-12]처럼 3각형과 4각형을 의미하는 표현규약이며, 암시적 기호(Harel & Kaput, 1991)에 해당된다. 첨자로 붙은 (4)의 의미는 한 꼭지점에 모이는 면들이 항상 4개씩 서로 같아서 그것을 반영하기 위해 붙인 것이라고 하였다. 단순히 다면체를 구성하는 면의 개수나 모양만을 반영한 표현에서 한 단계 발전된 내용을 표현하였다.

$8\alpha 6\beta_{(4)}$

(α=3각형 β=4각형 γ=5각형의 약속)

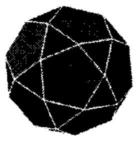
[그림 Ⅳ-12] 표현 규약이 있는 기호적 표현

표현 S(1)에서는 육팔면체를 구성하는 면의 모양과 개수가 투명(transparent)하나 이들 3각형과 4각형의 공간 구조적 위치와 배열은 불투명(opaque)하다. 표현 S(2)는 이러한 육팔면체를 구성하는 3각형과 4각형의 공간 구조적 배치와 배열들을 고려하여 S(1) 보다는 더 정교하게 표현한 것이다. 즉, 아래 [그림 Ⅳ-13]처럼 육팔면체를 공간상에서 3층으로 분류하여 아래 1층과 3층엔 3각형(s) 한 개에 4개의 4각형(s)이 이웃한 도형(s-4t)을 배치하고, 2층에는 4개의 사각형(4s)을 배치한 다면체로를 표현한 것이다.



[그림 Ⅳ-13] 육팔면체의 구조적 배열을 반영한 기호적 표현

이 학생은 정12면체와 정20면체를 중점깎기하여 만들어지는 십이이십면체(Icosidodecahedron)도 같은 방법으로 표현하고 있었는데, 단순히 p12t20 이라는 표현보다는 각 다각형들이 어떻게 공간 구조적으로 배열되어 있는지에 대한 구체적인 정보를 제공해주는 표현이다.



⇩

구조식: p-5t-5p-10t-5p-5t-p (v)
구조식: p-5t-5p-10t-5p-5t-p (f)

[그림 Ⅳ-14] 십이이십면체의 공간 구조적 표현

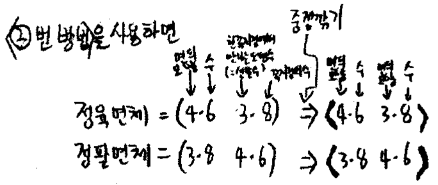
표현 S(3)의 (3,4,3,4)는 육팔면체가 모든 꼭지점에서 3각형과 4각형이 동일한 방법으로 배치되어 있다는 것을 표현한 예이다. 결국 육팔면체는 모든 꼭지점에서 정삼각형2개와 정사각형2개가 모인 다면체임을 설명하는 표현인데, 이 표현법은 현재 아르키메데스 다면체를 다룰 때 활용되고 있는 표준화된 기호적 표현에 해당된다. 그러나 이 표현만으로는 구성되고 있는 정삼각형과 정사각형의 개수가 몇 개로 구성되어 있는지 표현 S(1)의 △8□6처럼 투명하게 드러나지 않는다. 또 다른 학생은 (3,4,3,4)을 더 발전시켜 (3,4,3,4) 앞에 꼭지점의 수 12를 표현해주는 것이 더 유의미한 표현이라고 하였다. 이 표현을 통해 육팔면체가 지닌 모든 구성요소에 대한 정보들이 투명하게 드러낼 수 있었다. 즉, 다면체의 꼭지점의 수를 표현해 줌으로서, 각 꼭지점의 차수 4와 연결하여 전체 모서리의 수 $\frac{12 \cdot 4}{2}=24$를 이 표현법 속에서 얻을 수 있고, 다시 오일러 공식을 이용하여 전체 면의 개수 14를 얻을 수가 있다. 또한, 이미 (3,4,3,4)라는 표현 속에서 3각형과 4각형의 면들로 구성되어 있다는 것은 자명하며, 이 3각형과 4각형의 개수들을 변수 t, s로 각각 두었을 때, 연립방정식

$$\begin{cases} t+s=14 \text{ (면의 수)} \\ 3t+4s=48 \text{ (모서리의 수의 2배)} \end{cases}$$

을 이용하면, $t=8, s=6$을 구할 수 있으므로 육팔면체를 구성하는 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수와 정삼각형 8개, 정사각형 6개로 구성되어 있는 다면체라는 정보들을 추가로 얻을 수가 있다. Harel & Paput(1994)은 수학적 기호를 암시적인 기호와 정교한 기호로 나누어 설명하고 있는데, 기호가 얼마나 정교한가의 여부는 그 기호가 사전 수학 지식과 어느 정도 관련이 있느냐에 따라 결정되는 것이라고 하였는데, 이러한 기준을 적용한다면 (3,4,3,4)보다는 12(3,4,3,4)라는 표현이 더 많은 수학적인 내용들을 함축하고 있으며 정교한 기호라고 풀이할 수가 있다.

한편, S(4)의 ⟨3·8 4·6⟩는 표현상 3각형 8개와 4각형 6개로 구성되어 있다는 의미의 S(1)의 △8□6 다면체와 유사해 보이지만 이 표현의 의미는 매우 정교했다. 즉, [그림 Ⅳ-15]에서 보는 것처럼 (3·8 4·6)은 변형전의 다면체(=정팔면체)를 의미하며, 앞의 3은 정팔면체의 한 면의 모양을 의미하고 8은 그 면의 개수를 의미한다. 또한, 뒤의 숫자 4는 정팔면체의 한 꼭지점에 모이는 면의 개수를 의미하며, 6은 그런 꼭지점의 개수를 의미한다. 변형 후의 다면체(=육팔면체)는 ⟨3·8 4·6⟩으로 표현하고 있는데, 괄호를 ( )에서 ⟨ ⟩으로 바꾸어 표현해주고 있으며, 3은 변형전의 면의 모양을, 8은 그 개수, 4는 변형 전에 한 꼭지점에 모이는 면의 수가 4개가 모여서 4각형 모양의 면이 되었다는 것을 의미한다. 6은 4각형이 6개로 구성되어 있음을 의미한다. 이와 같이 정육면체와 정팔면

체를 중점깎기를 하였을 때 동일하게 얻어지는 육팔면체에 대한 쌍대(dual)의 원리를 정교하게 기호적 표현에 용해시켜 표현하고 있었다.



[그림 Ⅳ-15] 쌍대(Dual)의 원리를 정교하게 적용한 기호적 표현

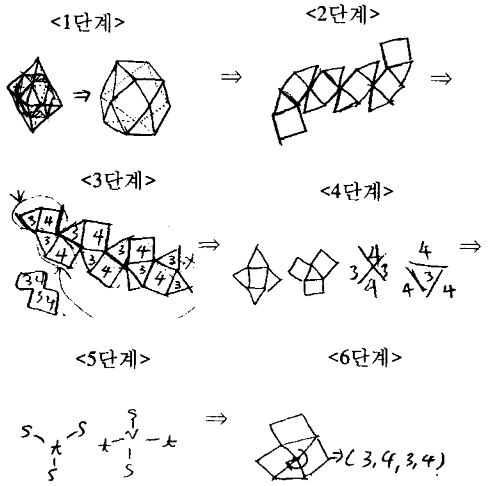
마지막으로, 이렇게 다양한 개념이해 수준을 반영한 기호적 표현들을 창안해 내는 수학영재들도 있었지만 전체 14명중 6명이 기호적 표현을 창안해 내지 못했다. 정당화를 요구하는 문제에 대해서 수학적으로 합리적인 정당화 능력을 보여주었음에도 불구하고, 기호적 표현을 창출하는데 있어서는 적절한 반응을 보이지 못했다. 이것은 주어진 문제를 해결하고 정당화하고 추론하는 수학적 활동에 익숙해 있지만 직접 기호적 표현을 만들어 보도록 하는 경험이 이들에게 다소 생소했던 경험으로 풀이된다.

Ⅴ. 논의 및 결론

이 글은 공간기하과제에서 중학교 수준의 수학영재들이 보여주는 정당화 유형과 표현의 방식을 고찰하고 있다. 먼저 정당화 반응에서 경험적 정당화와 연역적 정당화의 반응 분류(Marrades & Gutiérrez, 2000)는 전체적으로 고르게 나타났으며, 부분적·전체적 정당화 반응 역시 고르게 분포하고 있었다. 이는 동일한 영재교육과정에 따라 수업에 참여하는 아동들 사이에도 정당화의 수준에는 차이가 있음을 보여준다. 특히, 비록 비형식적인 경험적 정당화의 반응을 보이긴 했지만, 전체적인 변화과정을 통찰하고, 모든 구성요소들을 고려하여 합리적으로 설명하고 있는 학생들의 반응(M3, M4)과 부분적인 분석에 의한 형식화과정을 거친 학생의 반응(M7)에 서로 비교해 봄으로써, 비형식적 증명의 유용성에 분명한 주의를 기울일 필요가 있다. 송상헌, 허지연, 임재훈 (2006)에 따르면, 초등수준에서 형식적 정당화의 수준에 이른 학생들이 일부 있기는 하지만 일반화된 식의 산출보다는 정당화에 좀 더 초점을 맞춘 학습 지도가 필요하다고 한다. 하지만 비록 중학생이라 할지라도 너무 빨리 형식화를 요구하기 보다는 좀 더 다양하고 충분한 비형식적 경험을 통해 점진적으로 형식화로 안내되어야 할 것이다. 영재들을 위한 교수학적 상황 역시 비형식적 추론의 발전을 이끌어 다양한 종류의 추론에 의해 형식적인 증명에 접근하도록 해야 한다(이경화, 2005).

한편, 공간기하과제에서 보여준 수학영재들의 표현들은 언어적·시각적·기호적 표현들로 분류할 수 있었는데, 이 연구에 참여한 수학영재들은 문제해결을 위해 시각적 표현을 선호하고 있었다. 특히 몇몇 수학영재들의 수학적으로 표현하는 과정을 정리하면, 우선 입체적인 시각적 표현을 통해 어떤 다면체가 형성되는지 살펴본 후 이 다면체를 다시 전개도로 표현을 하여 일정한 패턴들을 발견하고 분석하는 과정을 통해 꼭지점에 모이는 면 혹은 한 면을 중심으로 이웃해 있는 면들이 규칙적으로 배열되어 있음을 도출하여 그것들을 기호적 표현으로 발전시켜 나갔다([그림 Ⅴ-1])[4].

4) 그러나 모든 학생들이 위와 똑같은 단계를 거쳐서 기호적 표현으로 발전시키지는 않았으며, 학생들의 표상능력에 따라 과정이 조금씩 차이를 보여주었다. 예를 들면, 2단계의 전개도를 그렸으나 그 전개도에서 더 이상 유의미한 내용을 도출하지 못하는 학생도 있었으며, 1단계에서 전개도를 그리지 않고 4단계인 각 꼭지점이나 면에서의 차수에 주목하여, 기호적 표현으로 발전시키는 반응도 있었다.



[그림 V-1] 시각적 표현이 기호적 표현으로 발전하는 과정

이러한 결과는 시각적 표현이 아이디어를 찾고, 전체적인 구조를 파악하는데 매우 유용하게 활용되고 있음을 보여주는 예이며, 외적표현[5]이 직관적 사고를 돕고 문제해결을 위한 발견술적 역할(heuristical role)을 한다는 Mesquita (1998)의 주장과 일치한다.

기호적 표현에 있어서 △8□6 다면체 와 ⟨3·8 4·6⟩는 표면적으로는 매우 유사해 보이는 표현이지만 이들 표현이 함축하고 있는 의미에 있어서는 수학영재들의 수학적 능력의 정도가 다르다는 것을 확인해주었다. 수학적 기호를 개발할 때 그 기호적 표현 속에는 그 개발자의 수학적 아이디어나 개념에 대한 이해 정도에 따라 달리 표출될 수 있으며, 기호적 표현 (3,4,3,4)을 12(3,4,3,4)으로 발전시키는 과정에서 수학적 개념을 표현 속에 보다 함축시키고 정제시키려는 이른바 정교한 기호(Harel & Kaput, 1994)를 창출하려는 욕구를 수학영재들에게서 발견할 수 있었다.

본 실험을 통해 수학영재들의 정당화 능력에 대한 정보와 비형식적 정당화의 유용성을 재확인하였다. 또한 그들의 표현능력에 대한 정보를 얻을 수 있었다. 이 연구에서는 한 가지 과제를 중심으로 수학 영재아들의 정당화 과정과 표현 과정을 조사하였으므로, 보다 많은 과제를 이용하여 수학 영재아들의 정당화 과정과 표현 과정의 특성을 연구할 필요가 있다.

참고문헌

김선화(1992). **표현의 문제에 대한 수학교육적 고찰.** 서울대학교 석사학위 논문.

김성준(2002). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰. **수학교육학연구** 12(2), 229-245.

김유정(2004). **초등 수학문제해결과정에서 사용되는 표현방법에 대한 연구.** 서울교육대학교 교육대학원 석사학위 논문

김지원 · 송상헌(2004). 한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례 연구. **수학교육학연구** 14(1), 89-110.

나귀수(1996). 기하교육에서 공간적 사고의 중요성에 대한 고찰. **수학교육학연구,** 6(1), 189-201.

_____(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하단원을 중심으로-.** 서울대학교 박사학위논문.

류성림(1999). 아동의 공간 직관력 향상을 위한 지도 방법에 관한 고찰. **수학교육논문집** 8, 91-105.

송상헌(1996). 수학 영재 교육 프로그램을 위한

5) Mesquita는 외적(external) 표현을 종이와 같은 구체물에 그림, 이미지와 같은 시각적으로 구체화된 것들을 외적 표현이라고 보았으며, 본고에서의 시각적 표현과 의미가 상통한다.

수학적 영재성의 정의와 판별의 이론적 고찰. **대한수학교육학회 논문집 6**(2), 271-294.

송상헌, 허지연, 임재훈(2006). 도형의 최대분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정화화의 유형 분석. 대한수학교육학회 논문집 **수학교육학연구 16**(1), 79-94.

우정호(2002). **수학 학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부.

장혜원(1997). **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구.** 서울대학교 박사학위 논문.

조완영(2000). **탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구.** 한국교원대학교 박사학위 논문.

최은희(2005). **메타인지 전략을 활용한 수업이 초등학생의 수학적 추론과 표현에 미치는 효과.** 이화여자대학교 석사학위 논문.

한길준, 정승진(2002). 언어적 접근에 의한 수학적 기호의 교수-학습지도 방법 연구. **수학교육 논문집 14**, 43-60.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situation of validation. *Educational Studies in Mathematics 18*, 147-176.

Graves, B. & Zack, V. (1997). Collaborative mathematical reasoning in an inquiry classroom. In Pehkonnen, E. (Ed.) *Proc. 21th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, 17-24). Lahti, Finland: PME.

Guillen, G. (1996). Identification of Van Hiele Levels of reasoning in three dimensional geometry. *Proceedings of the 20th PME Conference 1*, 43-50.

Gutierrez, A., Pegg, J. & Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th PME Conference 2*, 511-518.

Gutierrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology 18*, 31-48.

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference 1*, 3-19.

Harel, G. & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. *Proceedings of the 20th PME Conference 3*, 59-65.

Harel, G. & Kaput, J. (1994). The Role of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 82-94, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kwon, O. N., Kim, S. H. & Kim, Y. (2001). Enhancing spatial visualization through virtual reality on the web: Software design and impact analysis. *Proceedings of the 25th PME Conference 3*, 265-272.

Lawrie, C., Pegg, J. & Gutierrez, A. (2000). Coding the nature of thinking displayed in responses on nets of solids. *Proceedings of the 24th PME Conference 3*, 215-222.

Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students' Geometrical Reasoning and Informal Proof. *Proceedings of the 26th PME Conference 3*, 241-248.

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in*

Mathematics 44, 87-125.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior 17*(2), 183-195.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. John Wiley, New York.

Rubenstein, R. N. & Thompson, D. R. (2001). Learning mathematical symbolism: challenges and instructional strategies. *Mathematics Teacher 94*(4), 265-271.

Saads, S. & Davis, G. (1997). Spatial abilities, van Hiele Level & Language use in three dimensional geometry. *Proceedings of the 21th PME Conference 4*, 104-111.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom : A study of prospective- elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior 15*, 3-31.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of learning mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving and the ability to formulate generalizations: The problem solving experiences of four gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education 14*(3), 151-165.

Tall, D. (1995). Cognitive developments, representations and proof. *The conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education*, 27-38.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics 48*, 101-119.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2004). Understanding Primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education 35*(3), 164-186.

Mathematically Gifted Students' Justification Patterns and Mathematical Representation on a Task of Spatial Geometry

Lee, Kyong Hwa (Korea National University of Education)
Choi, Nam Kwang (graduate school, Korea National University of Education)
Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

The aims of this study is figure out the characteristics of justification patterns and mathematical representation which are derived from 14 mathematically gifted middle school students in the process of solving the spatial tasks on Archimedean solid.

This study shows that mathematically gifted students apply different types of justification such as empirical, or deductive justification and partial or whole justification. It would be necessary to pay attention to the value of informal justification, by comparing the response of student who understood the entire transformation process and provided a reasonable explanation considering all component factors although presenting informal justification and that of student who showed formalization process based on partial analysis.

Visual representation plays an valuable role in finding out the idea of solving the problem and grasping the entire structure of the problem.

We found that gifted students tried to create elaborated symbols by consolidating mathematical concepts into symbolic re-presentations and modifying them while gradually developing symbolic representations.

This study on justification patterns and mathematical representation of mathematically gifted students dealing with spatial geometry tasks provided an opportunity for understanding their the characteristics of spacial geometrical thinking and expending their thinking.

* key words : mathematically gifted students(수학영재), Archimedean solid(준정다면체), justification(정당화), representation(표현), spatial geometry(공간 기하)

논문접수 : 2007. 10. 31
심사완료 : 2007. 12. 4