대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.4, 523-533. Dec. 2007

수학사적 관점에서 본 피타고라스 정리의 증명[1)]

최 영 기[*] · 이 지 현[**]

이 논문에서는 피타고라스 정리에 대한 피타고라스와 유클리드의 증명의 의미를 역사적, 수학적 관점에서 고찰하였다. 피타고라스의 닮음비에 의한 증명 방법은 통약성이라는 수에 대한 가정에 근거한 것이라고 볼 수 있다. 반면 유클리드는 통약성이 필요 없는 분해 합동이라는 순수한 기하학적 방법으로 다시 증명하였다. 피타고라스 정리의 증명에서 엿볼 수 있는 피타고라스와 유클리드의 기하에 대한 다른 접근 방식을 현 학교 기하의 바탕이 되는 Birkhoff와 Hilbert 공리계와 연관하여 논의하였다. Birkhoff는 엄밀하게 정의된 실수 개념을 상식으로 수용하여 현대수학적인 평면 기하 공리계를 제안하였으며, Hilbert는 실수 개념에 의존하지 않는 순수한 기하학을 추구했던 유클리드적 정신을 계승하였다. 따라서 피타고라스 정리에 대한 닮음비와 분해 합동을 이용한 증명, 또 넓이에 의한 증명과 넓이가 같음에 의한 증명의 차이는 전통적인 유클리드의 종합기하적 전개와 현대수학적 전개사이의 갈등이라는 기하 교육에서 아직도 완전히 해결되지 않은 논점과 관련이 있다.

Ⅰ. 피타고라스와 유클리드 증명의 의미

피타고라스 정리는 300여개가 넘는 증명이 알려져 있는 평면 기하에서 가장 의미 있는 정리이다. 특히 그리스 수학에서 피타고라스 정리를 최초로 소개하고 증명한 사람은 피타고라스라고 한다(Heath, 1956). 피타고라스의 정확한 증명은 문헌으로 남아있지 않지만, 피타고라스의 증명 방법에 대한 가장 유력한 가설은 닮음비를 이용하는 것으로 알려져 있다(Gould, 1957).

한편 피타고라스 정리는 유클리드 원론 1권 명제 47로 등장한다. 그러나 원론의 증명은 직각삼각형에서 빗변이 아닌 다른 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형들을 삼각형들로 분해하여 그 합이 빗변을 한 변으로 하는 정사각형이 됨을 보이는 것이다. 피타고라스의 닮음비를 이용한 증명을 알고 있었을 유클리드는 피타고라스보다 복잡한 증명 방식을 선택하고 있다.

본 논문에서는 피타고라스 정리의 두 가지 증명(닮음비를 이용한 증명, 원론의 기하학적 증명)에 내재된 역사적·수학적 관점에 대해 고찰하고자 한다. 먼저 피타고라스의 닮음비를 이용한 증명에 통약성이라는 숨겨진 가정이 있음을 살펴보고, 이로부터 야기된 통약성의 문제를 유클리드가 어떤 방식으로 해결하였는지 살펴본다. 또한 피타고라스 정리에서 살펴볼

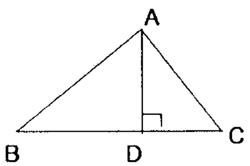
---

* 서울대학교 대학원(yochoi@snu.ac.kr)
** 서울대 대학원(leeji_hyun@hanmail.net)
1) 본 연구는 2007년도 과학영재교육원 창의적 사사연구 지원사업의 지원에 의하여 연구되었음.

수 있는 피타고라스와 유클리드의 기하에 대한 접근 방식과 관련하여 학교 기하의 공리적 기반인 Birkhoff 공리계와 Hilbert 공리계에 대해 논의한다.

II. 통약성을 가정한 피타고라스의 증명

피타고라스의 증명이라고 추측되는 닮음비를 이용한 증명은 다음과 같이 설명할 수 있다.



[그림 II-1]

증명. $\triangle ABC \sim \triangle DBA$이고

닮은 삼각형에서 대응하는 변의 길이는 비례하므로

따라서 $\dfrac{BA}{CB} = \dfrac{BD}{BA}$ 이다.

즉 $BA^2 = BD \cdot BC$

마찬가지로 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$이므로,

$\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{CD}{CA}$ 이다.

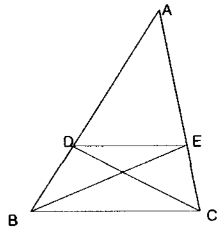
즉 $CA^2 = BC \cdot CD$

그러므로 $BA^2 + CA^2 = BC^2$이다.

그런데 피타고라스는 '닮은 삼각형에서 대응하는 변의 길이는 비례 한다'라는 성질을 어떻게 알 수 있었을까? 이 성질은 유클리드 원론 6권 명제 2에서 다음과 같이 증명된다. Gould(1957)는 이 증명이 사용하는 보조 정리에 주목하여, 피타고라스가 어떤 방식으로 닮음비의 성질을 정당화하였는지 분석하고 있다.

원론 6권 명제 2.

삼각형의 한 변에 평행하도록 그은 직선은 삼각형의 변들을 같은 비율로 자른다.



[그림 II-2]

증명. $DE \parallel BC$이므로

$\triangle DEB = \triangle DEC$ (보조정리 1).

그리고 공통으로 $\triangle ADE$를 포함하므로

$\triangle ABE = \triangle ADC$이다.

또 $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle ABE} = \dfrac{AD}{AB}$, $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle ADC} = \dfrac{AE}{AC}$(보조정리 2).

그러므로 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ 이다.

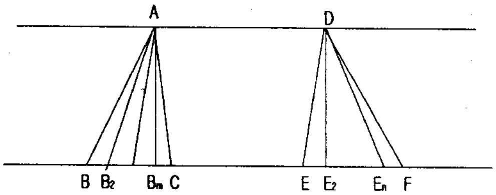
보조정리 1(원론 1권 명제 38).

두 평행선 사이의 밑변이 같은 삼각형은 넓이가 같다.

보조정리 2(원론 6권 명제 1).

두 평행선 사이의 삼각형의 넓이는 밑변의 길이에 비례한다.

여기서 두 평행선 사이에 놓인 삼각형의 넓이에 대하여 보조정리 1은 밑변의 길이가 같은 경우이고, 보조정리 2는 보조정리 1을 포함하는 임의의 밑변을 가지는 삼각형들의 넓이 비에 대한 것이다. 보조정리 1은 평행 공리와 삼각형의 합동 조건을 사용하면 쉽게 증명할 수 있다. 그런데 Gould(1957)은 피타고라스가 '두 평행선 사이의 삼각형의 넓이는 밑변의 길이에 비례 한다'는 보조정리 2를 다음과 같은 방식으로 정당화하였을 것이라고 지적하고 있다.



[그림 II-3]

증명. 피타고라스 학파는 임의의 두 길이에 대해 공통 약수가 되는 단위 길이가 존재한다는 통약성을 믿었다. 따라서 길이를 측정한다는 것은 공통 단위 길이를 세는 것이었다. 즉 임의의 두 밑변 BC와 EF에 $BB_2=EE_2$와 같은 공통 단위가 존재한다고 가정하였다. 이 때 단위 길이 $BB_2=EE_2$가 BC에 m개, EF에 n개 있다고 하자. 따라서

$$\triangle ABC = m\triangle ABB_2 = m\triangle DEE_2 = \frac{m}{n}\triangle DEF,$$

그러므로 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \dfrac{BC}{EF}$이다.[2)]

닮음비에 의한 증명이 위와 같은 보조 정리를 이용했다는 점은 피타고라스의 증명 방식이 사실은 통약성이라는 산술적인 가정에 의존하였음을 보여주고 있다.

Gardiner(1982)는 피타고라스 학파의 수학에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다. 피타고라스 학파는 '수'를 신봉하였으며, 수의 핵심적인 성질로서 공통 단위로 비교할 수 있다는 통약성을 가정하였다. 따라서 피타고라스 학파의 수 개념은 사실상 자연수와 자연수의 비인 유리수에 제한된 것이었다고 할 수 있다. 이러한 한계에도 불구하고 그들은 이러한 수 개념으로 모든 것을 설명할 수 있다고 보고 '모든 것은 수'라고 믿었다.[3)] 따라서 기하에서의 길이 역시 언제나 자연수와 자연수의 비로 측정할 수 있다고 가정하였다. 요컨대 피타고라스 학파의 닮음비에 관한 기하 이론은 통약성을 가정한 수 개념 하에서 체계화된 결과라고 할 수 있었다. 그러나 역설적으로 피타고라스 정리의 결과로 정사각형의 대각선과 한 변의 길이조차도 공통 단위 길이를 가질 수 없음이, 즉 자연수 혹은 자연수의 비에 대응될 수 없는 기하학적인 길이가 존재한다는 것이 드러나게 되었다. 이러한 무리수의 발견으로 피타고라스 학파가 굳게 믿었던 통약성은 허구의 가정으로 드러나고 말았다. Eves(1980)는 무리수의 발견이 초래한 '통약성의 위기'[4)]를 수학이 겪었던 최초의 위기로 지적하고 있다. 따라서 통약성의 가정 하에서 증명한 피타고라스 정리를 비롯한 많은 명제들이 정당화될 수 없었다. 이것은 통약성을 가정한 수 개념에 근거한 기하학에 대한 산술적·계량적 접근의 실패를 의미하는 것이었다.

III. 통약성을 가정하지 않은 유클리드의 증명

통약성의 위기에 직면한 그리스 수학자들은

2) 피타고라스 학파와 달리 유클리드 원론에서는 보조정리 2를 통약성이라는 가정 없이 Eudoxus의 '비가 같음'에 대한 정의로 증명하고 있다(부록 1참조).

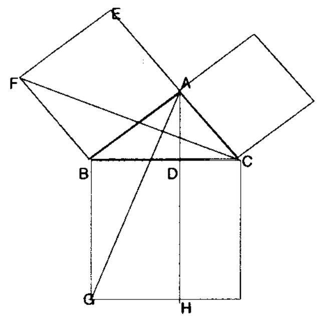
3) 피타고라스 이전 철학자인 밀레토스 학파의 탈레스는 세계의 근원에 대해 질료적인 근원을 탐구하였다. 그러나 '모든 것이 수'라는 피타고라스 학파의 격언은 질료적 근원이 아닌 세계의 구조(structure)가 무엇인가라는 질문으로의 전환을 엿볼 수 있다. 피타고라스 학파는 세계의 조화(harmonia)는 수적인 비율로서 표현할 수 있다, 즉 질적인 차이를 양적인 차이로 설명할 수 있다고 믿었다. 이러한 피타고라스 주의는 훗날 플라톤, 갈릴레오, 뉴턴까지 이어진다. 특히 Whitehead(1954)는 피타고라스를 통해 서양사상사에서 수학의 역할을 논의하였다.

4) Popper(1968)은 통약성의 위기를 플라톤의 대표적인 철학(형상이론, 이데아 이론)을 낳은 문제 상황으로 지적하고 있다. 특히 그는 과학에 대한 플라톤의 공헌을 통약성의 위기에 대한 대응에서 평가하였다.

수에 기초한 피타고라스학파의 산술적인 접근을 결국 포기하고, 수 개념을 확장하는 대신 기하학에서 그 해결의 실마리를 찾게 된다(Boyer, 1959). 기하학적인 두 선분의 관계는 자연수나 자연수의 비가 대응될 수도 있으나, 통약 불가능한 경우도 있다. 때문에 그리스 수학자들은 '기하'가 '수'보다 일반적인 것이고, 기하학적 방법은 피타고라스의 수 개념에 근거한 산술적 방법보다 더 보편적이며 적용 범위가 넓은 것으로 생각하였다(Gardiner, 1982). 따라서 그리스 수학자들은 통약성 혹은 수에 대한 산술적 가정을 배제한 기하학적 방법을 추구하였으며 이러한 노력은 유클리드의 원론으로 집대성되었다.

유클리드는 통약성의 문제를 우회하기 위해 선분, 각, 도형에 수를 대응시키는 측정을 사용하지 않고 기하를 전개하였다. 예를 들어 수에 의존하는 계량적 개념인 길이대신 기하학적 선분을 다루었으며, $\overline{AB}^2$도 길이의 제곱이 아닌 기하학적인 정사각형으로 간주하였다(Gardiner, 1982). 따라서 유클리드에게 피타고라스 정리는 변의 제곱에 대한 명제가 아니라 직각 삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 기하학적인 정사각형들의 관계, 즉 '직각 삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 적당히 분해하여 재배열하면 다른 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형들이 된다'라는 것이었다. 그리고 이것을 통약성의 가정으로 문제가 된 임의의 밑변 길이를 가지는 두 삼각형의 넓이 비에 대한 보조정리 2 없이 합동인 삼각형과 평행선 사이에서 밑변이 같은 두 삼각형의 넓이는 같음이라는 보조정리 1만을 사용하여 증명하였다.

즉 유클리드는 통약성이라는 산술적인 가정과 무관한 분해 합동이라는 순수한 기하학적인 방법으로 피타고라스 정리를 다시 증명하였다. 이에 대해 원론의 해설가인 Proclus는 피타고라스 정리의 최초 발견자보다 이렇게 증명한 유클리드를 더 높이 평가하고 있다(Heath, 1956). 결국 유클리드 원론 이후 그리스 수학은 기하학적인 성격을 가지게 되었다.



[그림 III-1] 유클리드의 증명

IV. 피타고라스- Birkhoff의 산술적 접근과 유클리드-Hilbert의 기하학적 접근

앞에서 피타고라스의 닮음비를 이용한 증명에 통약성이라는 산술적인 가정이 숨어있으며, 피타고라스가 수의 기초위에서 기하에 접근하였음을 살펴보았다. 그러나 통약성을 상정하였던 피타고라스식 수 개념은 사실상 자연수와 유리수에 한정된 것이었으므로 통약성의 위기로 피타고라스의 산술적인 접근은 실패하였다. 그리하여 유클리드의 기하학적 접근이 그 대안으로 부상하였다. 그러나 그 후 원론에서 유클리드가 의식하지 못한 포개어 놓음(superposition), 점 사이의 순서(betweenness), 직선의 연속성(continuity)등과 같은 다른 중대한 숨겨진 가정들이 드러났다(Greenberg, 1974; Hartshorne, 2000).[5] 따라서 기하학은 엄밀성의 토대로서의 공고한 위치가 흔들리게 되었다. 마침내 19세기 Weierstrass등이 주도한 '해석학의 산술화'는 해석학의 기초인 실수 개념을 기하학적 직관을 완전히 배제한 산술적인 방법으로 확립하였다. 그

리하여 자연수로부터 산술적인 방법으로 무리수와 실수를 엄밀하게 정의하고 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$같은 기본적인 실수의 성질을 증명할 수 있는 길이 열렸다(Kline, 1980). 따라서 해석학의 산술화는 만물이 자연수에 의존한다는 고대 피타고라스학파의 믿음을 마침내 정당화하였다(Eves, 1980; Boyer, 1959). 비로소 '모든 것이 수'라는 피타고라스주의는 엄밀한 실수 개념에 기초하여 다시 부활하게 되었다.

학교 수학에서 유클리드 평면 기하의 바탕이 되는 공리계는 Euclid, Legendre, Hilbert, Birkhoff 공리계 등이라고 할 수 있다(Shibata, 1973, 우정호(1998)에서 재인용). 그런데 피타고라스 정리의 증명 방식에서 엿볼 수 있는 피타고라스와 유클리드의 기하에 대한 다른 접근 방식은 특히 Birkhoff와 Hilbert의 공리계와 관련하여 논의할 수 있다.

Birkhoff[6]는 '자'와 '각도기'에 기초한 평면 기하의 공리계를 제안하였다(Birkhoff, 1932, 부록 2참조). 학교 기하에서 유클리드의 전통적인 전개 방식은 순서와 분리 성질에 대해 간과하는 등의 수학적인 문제점들이 지적되었으며, Birkhoff 공리계는 이러한 문제점을 해결하기 위한 주목할 만한 시도였다(MacLane, 1959). Birkhoff는 현대 수학에서 엄밀하게 정의된 실수를 상식으로 수용한 평면 기하의 공리계를 제안하였다. 실수에 기반한 Birkhoff의 접근은 기하학적 순서관계를 실수의 순서관계로 다루어 다른 공리계들(Euclid, Hilbert, Veblen)보다 쉬우면서도 엄밀하게 평면기하를 전개할 수 있었다(MacLane, 1959). 이렇게 실수를 상식으로 수용하여 평면 기하를 전개한 Birkhoff의 접근은 수의 기초위에서 기하에 접근하였던 피타고라스의 현대적 입장이라 할 수 있다.

유클리드 원론에서는 측정에 대해 언급하지 않으며, 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 기하학적 도구로 인정한다. 반면 Birkhoff 공리계는 길이와 각을 측정할 수 있는 실수 자와 실수 각도기를 도입하며, 두 점 A, B 사이의 **거리**와 **각의 크기** $\angle AOB$가 공리계의 기본이 되는 무정의 용어이다. 이렇게 길이와 각의 측정을 기본으로 전개해나갔다는 점에서 Birkhoff의 접근은 계량적 접근(metrical approach)라고 불린다.

반면 Hilbert는 순수한 기하를 추구했던 유클리드적 전통을 Foundations of Geometry (Grundlagen der Geometrie)[7]에서의 종합기하적[8] 접근으로

5) 유클리드는 몇몇 명제들(1권 명제 1, 명제 12등)에서 연속성에 대한 별도의 가정 없이 두 원 혹은 원과 직선이 교점을 갖는다는 사실을 전제하고 있다. 또 '어떤 도형을 모양과 크기를 바꾸지 않고 옮겨 놓을 수 있음(superposition)'을 암암리에 가정하고 SAS 합동 조건을 정리로서 증명하고 있다(1권 명제 4). 그리고 어떤 점이 한 직선상에서 다른 두 점 사이에 있다, 혹은 어떤 한 점에서 이루는 각의 내부의 점을 지나는 직선 등을 엄밀하게 다루기 위해서 필수적인 '순서(betweenness)'의 개념을 인식하지 못하였다(Greenberg, 1974; Hartshorne, 2000)

6) Birkhoff는 학교 수학과 관련하여 자와 각도기에 기초한 평면 기하 공리계를 제안하였으며, 이를 토대로 계량적 접근의 고등학교 기하 교과서 Basic Geometry를 집필하였다. 이후 Birkhoff의 실수체계에 토대한 기하에의 접근과 자와 각도기 공리는 SMSG(School Mathematics Study Group)기하 프로그램의 기반이 되었다 (Crosswhite, 1973).

7) Foundations of Geometry는 유클리드 기하의 공리적 전개에 대한 Hilbert의 유명한 강의를 출판한 것이다. 이 책은 전문 수학자들을 위한 것으로 학교 수학에 직접적인 영향을 주지는 못하였다. 하지만 평면 기하의 내용에 있어 Foundations of Geometry는 유클리드 원론 다음으로 영향력 있는 저서로 평가되고 있다 (Burton, 1991). Hilbert공리계의 내용에 대해서는 Greenberg(1974)를 참조할 수 있다.

8) 종합은 이미 알려진 진술에서 새로운 명제를 증명하는 것이며, 분석은 반대로 어떤 문제가 이미 풀렸다고 가정하고 거꾸로 추론하여 이미 알고 있는 명제에 도달하는 것이다. 분석은 좌표계를 사용하는 해석 기하와 대수에서 답, 즉 미지수 x를 가정하여 문제를 해결하는 특징적인 방법이다. 이 때문에 종합기하는 해석기하와 달리 좌표계를 사용하지 않는 기하를 의미한다(Sibley, 1998).

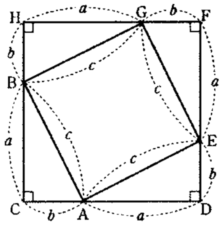
계승하였다. Hilbert는 수 개념에 의존하지 않고 기하를 전개하였던 유클리드의 연장선에서 유클리드의 결함을 보완한 새로운 평면 기하의 엄밀한 공리계를 제시하였다.

Hilbert의 공리계에서는 점, 선, 위에 있음, 사이에 있음, 합동의 무정의 용어와 연속, 평행의 기하학적 관계를 기술한다. 이는 Birkhoff 공리계에서는 거리와 각의 크기에 대해 기술하는 것과 비교되는 점이다.

특히 실수와 관련하여 두 공리계를 살펴보면, Birkhoff와 Beatley(1959)의 Basic Geometry에는 실수의 성질에 대한 공리들이 포함되어 있으나 Hilbert 공리계에는 실수에 대한 공리가 없다. 특히 Birkhoff 공리계에는 실수의 연속성에 대한 공리가 등장하는데, Hilbert 공리계에는 그 대신 직선의 연속성에 대한 Dedekind공리가 등장한다. 따라서 Birkhoff의 계량기하와 Hilbert의 종합기하적 전개는 실수 개념에의 의존도에 있어 큰 차이가 있다고 볼 수 있다. 즉 측정을 공리계에서 도입하는 계량기하적 전개 방식은 실수의 성질에 직접적으로 의존하지만 반면 종합기하에서 직접적으로 나타나는 수는 단지 1, 2, 3...의 자연수뿐이다(Moise, 1990).

길이, 넓이, 닮음에 대한 계량기하학과 종합기하학의 접근 방식을 Moise(1990)는 다음과 같이 비교하여 설명하고 있다. 계량기하에서는 길이를 직접 다룬다. 하지만 종합기하에서는 (선분의) 합동에 대한 공리로 '길이'가 아닌 '길이가 같음(합동인 선분)'을 정의하여 전개한다. 넓이에서도 계량기하에서는 넓이를 직접 다루지만 종합기하에서 다루는 것은 '넓이'가 아닌 '넓이가 같음(equal area)'이다.[9] 즉 종합기하에서는 실수 개념에 직접 의존하지 않으므로 길이나 넓이라는 대상이 아닌 (길이나 넓이라는) 대상이 같음으로 기하학을 전개하는 방식을 택한다.

넓이에 대한 계량기하와 종합기하적 접근방식과 관련하여, 현재 중학교 기하에서 지도하고 있는 피타고라스 정리에 대한 대표적인 증명을 살펴보자.



[그림 Ⅳ-1]

직각삼각형 ABC에서 두 변 CA와 CB를 연장하여 $a+b$를 한 변으로 하는 정사각형 $CDFH$를 만들면 [그림 Ⅳ-1]과 같다. 이 때, 정사각형 $CDFH$는 합동인 4개의 직각삼각형 ABC, EAD, GEF, BGH와 정사각형 $AEGB$로 나눌 수 있다. 따라서,

$\square CDFH = 4\times\triangle ABC + \square AEGB$ 이므로

$(a+b)^2 = 4\times(\frac{1}{2}\times a\times b)+c^2$

이다. 이것을 계산하여 정리하면

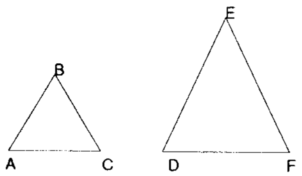
$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$

$a^2+b^2=c^2$이다(강옥기 · 정순영 · 이환철, 2006, p. 29).

9) 따라서 유클리드의 넓이에 대한 접근은 넓이가 아닌 같은 넓이의 이론(equal-area theory)으로 이해해야 한다(Moise, 1990). 또 Hilbert의 세 번째 문제인 '밑넓이가 같고 높이도 같은 두 사면체는 분해 합동인가?'도 이와 같은 맥락에서 이해할 수 있다. 만약 이러한 두 사면체가 분해 합동이라면 2차원의 평면 넓이와 같이 3차원의 입체 부피도 각각의 부피를 다루지 않고서도 같은 부피의 이론(equal-volume theory)으로 전개할 수 있다. 그러나 이 문제는 Dehn이 같은 부피의 직육면체와 정사면체가 분해 합동이 아님을 증명함으로서 불가능한 것으로 밝혀졌다(김명환 · 김홍종, 2001).

위와 같은 중학교 수학의 증명은 넓이에 의한 증명이라는 점에서 유클리드의 증명과 비슷해 보인다. 그런데 '넓이에 의한 증명'은 삼각형의 넓이가 '$\frac{1}{2}$×밑변×높이'라는 것에 의존한다. 그러나 유클리드의 피타고라스 정리는 '직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형은 다른 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형과 분해합동임'을 보인 것으로, 삼각형의 '넓이'가 아닌 '넓이가 같음'에 의한 것이라는 점에서 차이가 있다.

마지막으로 닮음에 대해 살펴보자. 계량기하에서 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음은 '대응하는 각이 같고 대응하는 변의 길이비가 같다'로 정의한다([그림 Ⅳ-2] 참조).



$\angle A = \angle D$
$\angle B = \angle E$
$\angle C = \angle F$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

[그림 Ⅳ-2] '닮음'의 정의

그런데 종합기하에서는 (대응하는)각이 같음은 쉽게 다룰 수 있지만 대응하는 선분의 비례관계는 정의하기 어렵다. 종합기하는 선분의 비례관계에서 선분의 '길이 비($\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$의 값)'가 아닌 '비가 같음($\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$)'을 정의해야 한다. 특히 유클리드 원론에서 선분의 비례 관계를 정의하는 종합적인 방법은 Eudoxus의 업적으로 알려져 있으며, 여기서 Eudoxus의 $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{DF}$에 대한 종합적인 정의를 살펴보고자 한다.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = x$(무리수)라고 하자.

두 실수 x, y가 임의의 유리수에 대해 대소관계가 일치하면 두 실수는 같으므로,

따라서 무리수 값을 갖는 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$에 대해서도 임의의 유리수 $\frac{p}{q}$에 대하여,

$\frac{p}{q} < \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ 가 성립한다.

따라서 이것을 비가 나타나지 않도록 표현하면,

$\forall p, q \in N$,

$p\overline{DE} < q\overline{AB} \leftrightarrow p\overline{DF} < q\overline{AC}$이다(Moise, 1990).

따라서 Eudoxus의 비례 정의는 실수의 같음을 자연수만을 사용하여 정의한 것이며, 실수를 데데킨트 절단(Dedekind Cut)으로 정의한 아이디어와 본질적으로 같은 것이다.

현재 중학교 기하는 앞에서 살펴본 실수 개념에 기초한 Birkhoff의 현대수학적 접근과 전통적인 유클리드와 Hilbert의 종합기하적 전개 방식이 혼재되어 있다. 기하에 대한 현대 수학적 접근의 대표적인 옹호자인 Dieudonnè는 유클리드식의 종합기하를 학교 수학에서 추방하고 그 대신 내적이 정의된 2·3차원 벡터 공간으로 유클리드 공간을 대수적으로 다루자고 주장하였다. 그러나 유클리드 기하의 교육적 중요성과 현대수학적인 대수적 접근사이의 선택은 학교 기하의 내용과 공간 인식의 변화를 수반하는 단순치 않은 중요한 문제이며, 아직도 기하 교육에서 해결되지 못한 논제로 남아있다(우정호, 1998).

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 피타고라스 정리에 대한 피타고라스와 유클리드의 증명 방식의 의미를 통약성의 위기와 관련하여 수와 기하의 대립적인 맥락에 주목하여 고찰하였다. 피타고라스의 닮음비에 의한 증명 방법은 통약성이라는 산술적

인 가정에서 나온 것이었다. 그러나 피타고라스의 통약가능한 수에 기초한 기하에 대한 산술적인 접근 방식은 무리수의 발견으로 실패하였다. 이로 인해 야기된 통약성의 위기를 유클리드는 순수한 기하학적 방법으로 해결하였다. 즉 피타고라스정리의 증명을 통약성이라는 가정이 필요 없는 분해 합동이라는 순수한 기하학적 방법으로 다시 증명하였다.

피타고라스 정리의 두 증명에서 엿볼 수 있는 피타고라스와 유클리드의 기하에 대한 다른 접근 방식은 학교 기하의 바탕인 Birkhoff와 Hilbert 공리계와 연관하여 논의될 수 있다. Birkhoff는 엄밀하게 정의된 실수 개념을 상식으로 수용하여 새로운 평면 기하의 공리계를 제안하였다. 이렇게 실수 체계위에서 기하에 접근하는 Birkhoff의 계량적 접근은 '수'의 토대 위에 기하를 접근했던 피타고라스를 현대적으로 계승한 것이라고 할 수 있다. 반면 실수 개념에 의존하지 않는 순수한 기하학을 추구했던 유클리드적 정신은 Hilbert의 종합기하로 계승되었다.

이와 같이 본 논문에서는 피타고라스 정리에 대한 두 가지 증명 방식의 수학적·역사적인 맥락을 살펴보고, 학교 기하의 기반이 되는 Birkhoff의 계량 기하 공리계와 Hilbert의 종합 기하 공리계와의 관련성을 논의하였다. 따라서 피타고라스 정리에 대한 닮음비와 분해합동을 이용한 증명, 혹은 넓이에 의한 증명과 넓이가 같음에 의한 증명의 차이는 유클리드의 전통적인 종합기하적 전개와 현대수학적 전개사이의 갈등이라는 기하 교육에서 아직도 완전히 해결되지 않은 논점과 관련이 있다. 이와 같은 피타고라스 정리 이면에 내재되어 있는 수학적 지식의 구조와 관점을 이해한다면, 단순한 명제적인 지식으로서의 피타고라스 정리의 증명 이상의 의미와 감동을 학생들에게도 전달할 수 있을 것이라고 생각된다.

참고문헌

강옥기·정순영·이환철(2006). **중학교 수학 9-나**. 서울: (주)두산.

김명환·김홍종(2001). **힐베르트 문제를 중심으로 현대수학입문**. 서울: 경문사.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

Birkhoff, G. D. (1932). A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor. *The Annals of Mathematics 33*(2), pp. 329-345.

Birkhoff, G. D. & Beatley, R. D.(1959). *Basic Geometry,* New York: Chelsea Publishing Company.

Boyer, C. B. (2004). **미분적분학사-그 개념의 발달**. (김경화, 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1959년 출판).

Burton, D. M. (1991). *The History of Mathematics an Introduction.* Wm. C. Brown Publishers.

Crosswhite, F. J. (1973) The Education of Secondary School Teachers in Geometry, In Henderson, K. B. (Ed.), *Geometry in the Mathematics Curriculum* 36th-year book pp.446-462, Restom, VA:.National Council of Teachers of Mathematics.

Eves, H. (1994). **수학의 위대한 순간들**. (허민·오혜영, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1980년 출판).

Hartshorne. R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond,* New York: Springer-Verlag.

Heath, T. L. (1956) *The Thirteen Books of*

Euclid's Elements with Introduction and Commentary. New York: Dover Publications.

Kline, M. (2007). **수학의 확실성.** (심재관, 역). 사이언스 북스. (영어 원작은 1980년 출판).

Gardiner, A. (1982). *Infinite Process background to analysis.* New York: Springer-Verlag.

Gould, S. H. (1957). Origins and Development of Concepts of Geometry. In F. L. Wren; C. B. Allendoerfer;S. MacLane; B. E. Meserve & C. V. Newsom(Eds.), *Insight into Modern Mathematics* pp. 273-305, NY: National Council of Teachers of Mathematics.

Greenberg, M. J. (1990). **Euclid 기하학과 비 Euclid 기하학,** (이우영, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1974년 출판).

MacLane, S. (1959). Metric Postulates for Plane Geometry, *The American Mathematical Monthly 66*(7), pp. 543-555.

Moise, E. E (1990). *Elememtary Geometry from an Advanced Standpoint.* Addison Wesley.

Popper, K. R. (2001). **추측과 논박.** (이한구, 역). 서울: 민음사. (영어 원작은 1968년 출판).

Sibley, T. (1998) *The Geometric Viewpoint,* Addison Wesley

Whitehead, A. N. (1993). **과학과 근대세계.** (김준섭, 역). 서울: 을유문화사 (영어 원작은 1954년 출판).

Proof of the Pythagorean Theorem from the Viewpoint of the Mathematical History

Choi, Young Gi (Seoul National University)
Lee, Ji Hyun (Seoul National University Graduate School)

This article focused the meaning of Pythagoras' and Euclid's proof about the Pythagorean theorem in a historical and mathematical perspective. Pythagoras' proof using similarity is based on the arithmetic assumption about commensurability. However, Euclid proved the Pythagorean theorem again only using the concept of dissection-rearrangement that is purely geometric so that it does not need commensurability. Pythagoras' and Euclid's different approaches to geometry have to do with Birkhoff's axiom system and Hilbert's axiom system in the school geometry. Birkhoff proposed the new axioms for plane geometry accepting real number that is strictly defined.

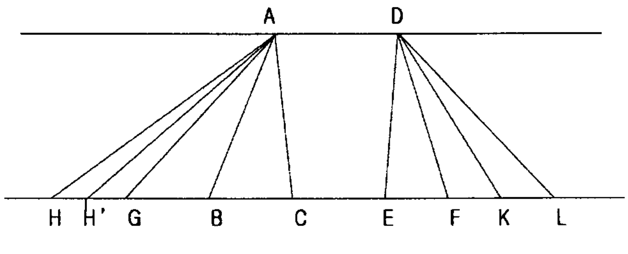
Thus Birkhoff's metrical approach can be defined as a Pythagorean approach that developed geometry based on number. On the other hand, Hilbert succeeded Euclid who had pursued pure geometry that did not depend on number. The difference between the proof using similarity and dissection-rearrangement is related to the unsolved problem in the geometry curriculum that is conflict of Euclid's conventional synthetical approach and modern mathematical approach to geometry.

* key words : Pythagorean theorem(피타고라스 정리), Birkhoff's axiom system(Birkhoff 공리계), Hilbert's axiom system(Hilbert 공리계)

논문접수 : 2007. 10. 31
논문심사 : 2007. 12. 10

<부록 1> 유클리드 원론에서의 보조정리 2 증명

보조정리 2(원론 6권 명제 1). 두 평행선 사이에 놓인 삼각형의 넓이는 밑변의 길이에 비례한다.



[그림 1]

증명. 임의의 자연수 m, n에 대하여 밑변 BC를 m배하고 밑변 EF를 n배하여, [그림 1]과 같이 $mBC = CH,\ nEF = EL$이라 하자.

① $mBC = nEF$ 이면,
평행선 사이에 놓인 밑변이 같은 삼각형은 넓이가 같으므로(원론 1권 명제 38),
$m\triangle ABC = n\triangle DEF$ 이다.

② $mBC > nEF$의 경우, $CH' = nEF = EL$라 하자.
$m\triangle ABC = \triangle AHH' + \triangle AH'C > \triangle AH'C = n\triangle DEF$ 이다.
따라서 $m\triangle ABC > n\triangle DEF$ 이다.

③ $mBC < nEF$의 경우는 ②의 경우와 같다.

그러므로 $\frac{BC}{EF} > \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} > \frac{n}{m}$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{n}{m}$$

$\frac{BC}{EF} < \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} < \frac{n}{m}$ 이다.

따라서

$BC : EF = \triangle ABC : \triangle DEF$이다