

주파수 영역에서 연속반복학습제어기 설계 안정성 해석[†]

(On Stability for Design of Repetitive
Controllers in Frequency Domain)

이 수 철*

(Soo Cheol Lee)

요 약 연속 반복되는 시스템에서 제어하는 제어기 repetitive controller를 설계하는 방법과 시스템 안정성을 소개하고자 한다. 제어기는 반복함수로서 수렴을 조장하는 비용함수를 주파수영역에서 최소화함으로써 유도할 수 있다. 모의실험은 제안된 단수모형설계 기법을 이용한 RC를 어떻게 유도하는 것을 보여 주고 있다.

핵심주제어 : 연속반복학습제어, 나이키스트 최적화, 주파수 영역 해석

Abstract This paper presents a method to design a repetitive controller that is periodic in the specified trajectory for the repetitive works. With the single-model design approach, the controller is derived by minimizing a frequency-domain based cost function that produces monotonic convergence of the tracking error as a function of repetition number. Numerical illustrations show how the proposed single-model design method produces a repetitive controller in a single nominal model of the system.

Key Words : Repetitive control, Nyquist Optimization, Frequency Domain

I. 서 론

각종 산업현장에서 고속회전체를 갖고 있는 로봇이나 공작기계로 자동화생산라인을 구축하고 있다. 그리고, 항공우주분야에서도 각종 제어장치로부터 생성되는 진동요인들을 갖고 있다. 이러한 회전체에서의 불균형은 시스템에 주기적인 진동을 유발하고, 이는 주기적인 궤적운동을 수행할 필요

가 있는 생산성이나 초정밀한 과학측정의 능력에 손상을 끼치게 된다.

능동제어의 한 형태로서 연속반복학습제어기 (Repetitive Controller)는 이러한 주기적인 외란을 제거하는데 사용 될 수 있다. 본 논문에서 소개하고자 하는 연속반복학습제어기는 주기 궤적운동에 적용되는 특별한 형태의 되먹임제어이다. 왜냐하면, 되먹임제어기 설계단계에서 주기적인 궤적운동을 특별히 고려하기 때문이다.

사실, 이러한 주기적인 입출력 정보를 이용함으로써 연속반복학습제어기는 반복적인 운동과 관련된 임의의 반복오차를 완벽하게 제거할 수 있

[†] 이 논문은 2005학년도 대구대학교 학술연구비지원에 의한 논문임.

* 대구대학교 자동차산업기계공학부 교수

다.[1,2] 임의의 시간대에서 연속반복제어기는 이전 주기나 반복에서의 궤적오차를 활용하여 현재 반복영역에서 사용하여야 할 제어량을 조정하여 주어야 한다. 최근 깊은 관심을 갖고 있는 유사 제어기로 반복학습제어기(Iterative Learning Controller)가 있다. 이 제어기는 다음 반복을 진행하기 전에 매 반복 같은 초기조건을 시스템에 적용하여야 한다.[3-8] 산업현장에서 적용하기 위한 실용적인 이유로서 두 가지 특성이 요구된다. 첫째, 임의의 불확실시스템요인에 민감하지 않아야 하고(건실성), 둘째, 반복이 진행됨에 따라 목표궤적에 대한 수렴정도가 단순하여야 한다.

최근에 확률분포함수로 규정되는 모형의 불확실성이 고려된 새로운 형태의 건실 반복학습제어설계방법이 시간영역에서 설계 개발되었다.[9]

본 논문에서는 시간영역에서 주파수영역 설계기법으로 확장하였다는 것이다. 이는 주파수영역에서의 궤적오차수렴을 보장하기 위한 것이다. 단순수렴의 특징은 궤적오차의 각 주파수영역대에서 잘 나타나고 있다. 이것은 아주 매력적인 사실이다. 왜냐하면, 시간영역에 비해 주파수영역에서 이러한 성향을 나타내는 것은 어려운 현상이다. 본 논문은 주파수영역에서의 단순궤적오차수렴에 필요한 나이키스트 조건을 간단히 언급하는데서 시작된다. 그리고, 단수모형 비용함수를 최소한 단수모형 연속반복학습제어기 설계가 취급된다. 단수모형설계에서의 안정성 검증을 소개하기 위해 NASA로봇 모형에 대한 수학적 모의실험이 사용된다.

II. RC시스템의 안정성 학습

p 를 한 반복영역에서의 시간대역(time steps)의 갯수라고 하자. 직접적 외란이 없는 불연속시간시스템의 연속반복학습제어의 간단한 형태에서, 현재의 제어량 $u(k)$ 는 직전 반복영역에서의 제어량 $u(k-p)$ 와 $u(k-p)$ 에 발생된 궤적오차 $e(k-p+1)$ 으로부터 기인한다.

$$u(k) = u(k-p) + \phi e(k-p+1) \quad (1)$$

상기 연속반복학습제어 법칙에서 ϕ 는 단수입력 단수출력(SISO) 시스템에서의 스칼라 학습이득 량

이다. 그리고, 궤적오차는 목표궤적 $y^*(k)$ 와 실제 출력 $y(k)$ 과의 차이로 정의된다.

$$e(k) = y^*(k) - y(k) \quad (2)$$

상기 연속반복학습제어 법칙의 일반 형태는 다음 식과 같다.

$$u(k) = u(k-p) + a_1 e(k-p+m-1) + \dots + a_m e(k-p) + a_{m+1} e(k-p-1) + \dots + a_n e(k-p+m-n) \quad (3)$$

식(3)에서 n 개의 스칼라 제어이득이 있고, $e(k-p+m-1)$ 는 a_1 와 일치하는 최근 과거의 궤적오차이고, $e(k-p+m-n)$ 는 a_n 와 일치하는 가장 먼 과거의 궤적오차이라고 할 수 있다. 그리고, 식(3)에서의 제어법칙은 z -domain에서 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$U(z) = \left[\frac{F(z)}{z^p - 1} \right] E(z) \quad (4)$$

여기서,

$$F(z) = a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m + a_{m+1} z^{-1} + \dots + a_n z^{-(n-m)} \quad (5)$$

식 (3)은 연속반복학습제어기 (1)의 일반화 형태이고, z -영역에서 $F(z)$ 는 간단히 $F(z) = \phi z$ 로 서술할 수 있다. 본 논문에서 전체 되먹임시스템이 안정화 되도록 제어이득 a_1, a_2, \dots, a_n 을 설계하고 싶어 한다. 즉, 반복 숫자가 무한대로 가면서 궤적오차가 0으로 수렴하게 된다. 그리하여, 산업현장에서 요구되는 목표중 하나로서 반복이 연속되면서 궤적오차의 수렴이 부드럽게 진행되기를 바란다.

산업현장에서 발생하는 외란을 고려한 시스템 궤적오차는 다음과 같이 서술할 수 있다.

$$\{1 - z^{-p} [1 - G(z)F(z)]\} E(z) = (1 - z^{-p}) [Y^*(z) - D(z)] \quad (6)$$

여기서 $G(z)$ 는 제어대상 시스템의 전달함수이다.

p 시간대역을 한 주기로 하는 외란 $d(k)$ 와 목표 궤적 $y^*(k)$ 을 갖고 있다고 하자. 연속반복학습제어 설계를 위해 다음과 같이 우측 항을 무시하여야

한다. $(1-z^p)[Y^*(z)-D(z)]=0$

식(6)을 다시 정리하면,

$$z^p E(z) = [1 - G(z)F(z)]E(z) \quad (7)$$

여기서, 시스템이 정상상태라고 가정하면 $z^p E(z)$ 는 다음반복영역에서의 궤적오차의 z-transform로 해석된다. 그리고, $E(z)$ 는 현재 반복영역에서의 궤적오차의 z-transform이고, $1-G(z)F(z)$ 는 두 궤적오차사이의 전달함수이다.

궤적오차에서 모든 주파수에서 단순수렴(monotonic convergence) 충분조건은 다음과 같다고 할 수 있다.

$$|1 - G(z)F(z)| < 1, \quad z = e^{iw\Delta t} \quad (8)$$

여기서, w 는 나이키스트 주파수로서 그 영역은 $0 < \omega\Delta t < \pi$ 이고, Δt 는 샘플시간 간격이다. 임의의 연속반복학습제어기 $F(z)$ 설계를 위하여, $1 - G(e^{iw\Delta t})F(e^{iw\Delta t})$ 는 $\omega\Delta t$ 가 0에서 π 까지 영역의 복소수 평면에 나이키스트도형으로 그려질 수 있다.

모든 주파수대에서 궤적오차가 0으로 수렴하기 위해서는 복소평면에서 나이키스트 도형이 단위원 안에 존재하여야 한다. 단위원 밖으로 벗어난 경우, 단순 수렴은 불가능하다. 되먹임 안정성을 고려한다면, 조건 (8)은 필요충분조건이 된다. 이 말은 단위원을 벗어난 경우, 되먹임시스템의 안정성이 가능할 수 있겠으나, 더 이상 단순 수렴이 보장되는 것은 아니다.

III. 나이키스트 최적화에 의한 연속반복학습 제어 이득의 단수 모형 설계

Φ 를 설계하고자 하는 RC 이득 벡터라고 하자.

$$\Phi = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{m-1} \ a_m \ a_{m-1} \ \dots \ a_n] \quad (9)$$

그 때, $F(z)$ 는 다음과 같다.

$$F(z) = M(z)\Phi \quad (10)$$

여기서,

$$M(z) = [z^{m-1} \ z^{m-2} \ \dots \ z \ 1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-(n-m)}] \quad (11)$$

궤적오차의 단순수렴을 위해서 나이키스트 도형이 단위원 안에 있어야 한다는 것을 앞 절에서 언급하였다. 이때, 나이키스트 도형의 모양을 최소화함으로써 제어 이득을 구할 수 있다. 이는 다음 비용함수를 최소화함으로써 이뤄진다.

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} W_i [1 - G(z_i)M(z_i)\Phi][1 - G(z_i)M(z_i)\Phi]^* + \Phi^T R \Phi \quad (12)$$

여기서 *는 복소수 전환(complex conjugate)을 나타낸다. 이때, $z_i = e^{jw_i\Delta t}$, $i=0,1,2,\dots,N-1$ 이다. N 은 나이키스트 도형을 구성하는 비연속시간대의 숫자이고 각각은 비연속 주파수 w_i 와 일치한다. $0 < w_i\Delta t < \pi$. W_i 는 각 비연속 주파수 w_i 와 관계있는 가중치 인자이고, R 은 제어이득 Φ 과 관계있는 가중치 매트릭스이다. 이득벡터 Φ 와 관계있는 J 의 미분을 취하고 그 결과를 0로 둠으로써 원하는 이득을 갖게 된다. J 와 Φ 는 실수이고 $G(z_i)M(z_i)$ 은 복소수이기 때문에 실수부분과 허수부분으로 나누어 Φ 를 설계하기 위한 공식(알고리즘)을 개발하는 것이 효율적이다. 관련 주요 항목으로는 $G(z_i)M(z_i)$, $M(z_i)^*G(z_i)^*$ 과 $M(z_i)^*G(z_i)^*G(z_i)M(z_i)$ 이 있다.

$\partial J / \partial \Phi$ 의 실수부를 0으로 놓는다는 것은 허수를 0으로 놓는 결과를 갖게 된다.

$$\Phi = A^{-1}B \quad (13)$$

여기서,

$$A = \sum_{i=0}^{N-1} W_i [Re(Q(z_i)) + Re(Q(z_i))^T] + 2R \quad (14)$$

$$B = \sum_{i=0}^{N-1} W_i [Re(S^*(z_i)) + Re(S(z_i))^T] \quad (15)$$

식(14)와 식(15)에서 $Re(\cdot)$ 는 (\cdot) 의 실수부를 나타낸다.

$$Q(z_i) = S^*(z_i)S(z_i), \quad S(z_i) = G(z_i)M(z_i)$$

$$z_i = e^{jw_i\Delta t}, \quad 0 < w_i\Delta t < \pi$$
(16)

식(13)과 식(14)에서 $(\cdot)^T$ 는 실수행렬 (\cdot) 의 전치행렬이고 $(\cdot)^*$ 는 복소행렬 (\cdot) 의 공액전치행렬을 나타낸다.

IV. 수학적 모의시험

그림 1에서 보여준 미항공우주국 7자유도 로봇 (Robotics Research Corp. K-series 807iHP manipulator)에서 유도된 모형을 예제로 사용된다.[7] 로봇은 최대 작업반경 0.89m와 20 lbs 최대 하중을 기본사양으로 갖고 있다. 각 관절은 다음 변환함수들로 구성되어 있다.

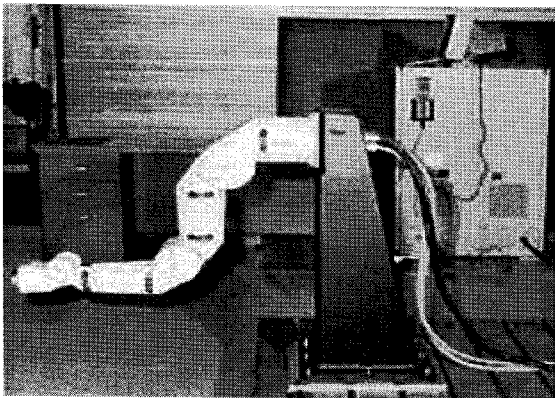
$$G_n(s) = G_a(s)G_b(s)G_c(s) \quad (17)$$

여기서, 변환함수는 1차 동적 시스템과 2차 동적 시스템으로 구성되어 있다.

$$G_a(s) = \left(\frac{\alpha}{s + \alpha} \right) \quad G_b(s) = \left(\frac{w_{1n}^2}{s^2 + 2\zeta_1 w_{1n} s + w_{1n}^2} \right)$$

$$G_c(s) = \left(\frac{w_{2n}^2}{s^2 + 2\zeta_2 w_{2n} s + w_{2n}^2} \right)$$
(18)

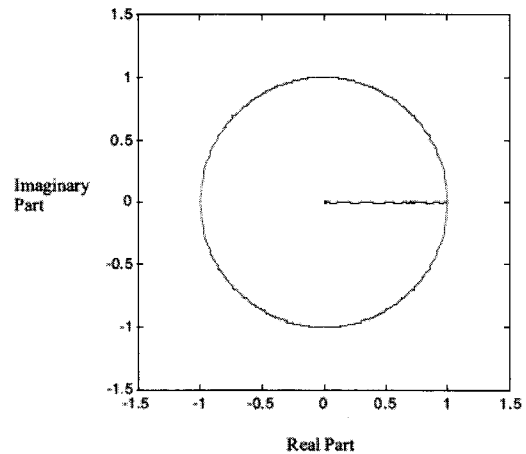
모형인자로는 $a = 8.8$, $\zeta_1 = 0.1$, $\zeta_2 = 0.1$, $w_{1n} = 37$, $w_{2n} = 113$ 이다.



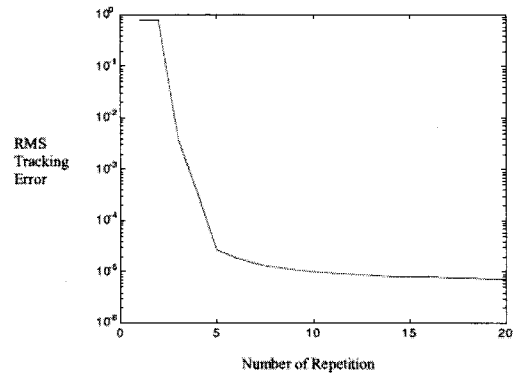
(그림 1) 7 자유도 NASA robot.

주파수 단위는 rad/sec이고, 샘플간격시간은 0.001초이다. 로봇 조인트의 목표궤적은 주기적이고, 각 주기는 각 90도씩 상승, 정지, 복귀로 1.51 초 시간이 소요된다.

먼저 연속반복학습제어는 정규모형에서 설계된다.모의 실험에는 $m=77$, $n=151$ 을 사용하였다. m 과 n 은 어떠한 조합의 경우라도 사용될 수 있으나, 이러한 선택은 반복학습제어의 수학적 조건들과 같은 제어이득을 갖고 있는 연속반복학습제어(RC)와 반복학습제어(ILC)를 위하여 사용할 수 있다. 그림 2와 3은 설계의 목표가 된 정규모형과 똑 같이 적용된 이상적인 상황을 나타내 주고 있다.



(그림 2) 정규모형으로부터 설계된 제어기의 나이키스트 도형.



(그림 3) 궤적오차의 단순 수렴 추이.

그림 2는 식(8)의 값을 나이키스트 도형으로 나타내 주고, 그림 3은 반복영역에서 궤적오차의 수렴정도를 나타내 주고 있다. 수렴정도는 예상했던 것과 같이 단순(monotonic)하다. 이들 모의실험의 결과들은 대상 모형을 완벽히 설계에 반영한 대로 가장 이상적인 경우로서 이론적 검증을 나타내 주고 있다.

V. 결 론

본 논문은 반복 동작을 수행하는 연속반복학습 제어기를 설계하는 방법을 나타내고 있다. 연속반복학습제어기를 실제 현장에 적용함에 있어 중요한 인자는 단순 수렴성을 나타내는 안정성에 대한 검증이다. 궤적오차 단순 수렴(안정성)을 보장하기 위해서는 나이키스트 도형이 복소수 단위 원 안에 위치하도록 오차비용을 최소화 하는 최적화를 설계의 기본으로 하여야 한다.

참 고 문 헌

[1] M. Tomizuka, T.-C. Tsao, and K. K. Chen, "Analysis and Synthesis of Discrete time Repetitive Controllers," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 111, 1989, pp. 353-358.

[2] R. W. Longman, "Iterative Learning and Repetitive Control for Engineering Practice," *International Journal of Control, Special Issue on Iterative Learning Control*, Vol. 73, No. 10, July 2000, pp. 930-954.

[3] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering Operation of Robots by Learning," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 1, No. 2, 1984, pp. 123-140.

[4] K. Moore, "Iterative Learning Control for Deterministic Systems", Springer-Verlag, London, U.K., *Advances in Industrial Control*, 1993.

[5] Z. Bien and J.-X. Xu, "Iterative Learning

Control: Analysis, Design, Integration, and Applications", Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.

[6] M. Q. Phan, R. W. Longman, and K. L. Moore, "A Unified Formulation of Linear Iterative Learning Control," *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 105, 2000.

[7] H. Elci, R. W. Longman, M. Q. Phan, J.-N. Juang, and R. Ugoletti, "Simple Learning Control Made Practical by Zero-Phase Filtering: Applications to Robotics," *IEEE Transactions on Circuits and Systems.I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 49, No. 6, 2002, pp. 753-767.

[8] B. G. Dijkstra and O. H. Bosgra, "Extrapolation of Optimal Lifted System ILC Solution with Application to a Waferstage," *Proceedings of the American Control Conference*, 2002, pp. 2595-2600.

[9] K. Takanishi, M. Q. Phan, and R. W. Longman, "Multiple-Model Probabilistic Design of Robust Iterative Learning Controllers," *NAMRI 2005*, New York, NY, May 2005.



이 수 철 (Soo Cheol Lee)

- 정회원
- 1984년 2월 : 서울대학원 농공학과 졸업 (농학석사)
- 1993년 10월 : 미국 Columbia대학원 기계공학과 졸업(M.Phil./Ph.D.)
- 2006년 4월 ~ 현재 : 대구대학교 자동차산업기계공학부 교수
- 관심분야 : 시스템분석기술, 분산 학습제어, 공장 자동화