

점진기능재료(FGM) 판과 셸의 비선형 해석 Nonlinear Analysis of Functionally Graded Materials Plates and Shells

한 성 천* / 이 창 수** / 김 기 동*** / 박 원 태****
Han, Sung Cheon / Lee, Chang Soo / Kim, Gi Dong / Park, Weon Tae

Abstract

Navier's and Finite element solutions based on the first-order shear deformation theory are presented for the analysis of through-thickness functionally graded plates and shells. The functionally graded materials are considered: a sigmoid function is utilized for the mechanical properties through the thickness of the isotropic structure which varies smoothly through the plate and shell thickness. The formulation of a nonlinear 9-node Element-based Lagrangian shell element is presented for the geometrically nonlinear analysis. Natural-coordinate-based strains are used in present shell element. Numerical results of the linear and nonlinear analysis are presented to show the effect of the different top/bottom elastic modulus, loading conditions, aspect ratios and side-to-thickness ratios on the mechanical behaviors. Besides, the result according to the variation of the power-law index of isotropic functionally graded structures is investigated.

key words : Nonlinear analysis, Functionally graded materials plates and shells, Element-based Lagrangian shell element

요 지

Navier 해 및 유한요소 해를 두께 방향으로 재료의 성질이 변하는 점진기능재료 판 및 셸의 해석을 위해 제시 하였다. 판과 셸의 두께를 따라 완만하게 변하는 등방성 구조물의 두께방향에 따른 역학적 특성을 고려 하기 위하여 S 형상 함수를 적용한 점진기능재료를 고려하였다. 비선형 9 절점 요소기저 Lagrangian 셸 요소의 정식화를 기하학적 비선형 해석을 위해 제시하였다. 자연 좌표계에 의한 변형률이 본 연구의 셸요소에 사용된다. 1차 전단변형이론에 의한 수치 해석 예제로 상면과 하면의 탄성 계수의 변화, 하중조건, 형상 비 그리고 폭-두께 비에 따른 역학적 거동을 연구하였다. 또한 거듭제곱 매개 변수의 변화에 따른 점진기능재료 구조물의 결과들을 조사하였다.

핵심용어 : 비선형 해석 점진기능재료 판 및 셸 요소기저 라그랑지안 셸 요소

1. 서 론

기존의 강재에 비하여 역학적인 여러 가지 장점으

로 인해 적층복합 구조물의 사용이 토목, 항공 및 조선 분야에서 널리 확대되고 있다. 한성천 등 (2006, 2006)은 적층복합 구조물의 기하학적 비선형 해석과 면내력을 받는 경우의 자유진동 해석을 수행하였다.

* 정희원 · 대원과학대학 토목과, 부교수, 공학박사 (E-mail : techy11@mail.daewon.ac.kr)
** 정희원 · 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사
*** 정희원 · 공주대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사
**** 정희원 · 교신저자 · 공주대학교 건설환경공학부교수, 공학박사

전통적인 적층복합 구조물에서는, 동질의 탄성 적층판이 개선된 역학적 성질을 얻기 위해서 결합된다. 그러나 상이한 재료 사이의 접촉면에 수직 방향으로 재료 성질의 갑작스러운 변화는 적층을 분리시키는 응력을 일으킬 수 있다. 게다가, 접촉면에서 큰 소성 변형은 재료의 균열 시작과 균열의 전파를 일으킬 수 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 한 방법으로 재료의 성질이 연속적으로 변하는 점진기능재료를 사용한다.

이것은 통상 두께 방향으로 구성 재료의 체적 요소를 점차적으로 변화시킴으로써 이루어진다. 몇몇 연구에서 점진기능재료 판과 셸의 거동에 대한 해석을 수행하였다. Reddy (2000)는 3차 전단변형 판이론에 의한 점진기능재료 직사각형판의 정적 거동에 대한 해석을 수행하였다. Cheng과 Batra (2000)는 1차 및 3차 전단변형 이론에 의한 단순 지지된 점진기능재료 다각형 판의 처짐과 등가 동질의 Kirchhoff판의 처짐을 관련시켰다. Loy 등 (1999)은 Love의 셸 이론에 의하여 점진기능재료 원통형 셸의 진동에 대한 연구를 수행하였다. 거듭제곱 함수 (Bao 와 Wang (1995) Jin 과 Paulino (2001)), 그리고 지수함수 (Delale 과 Erdogan (1983) Erdogan 과 Chen (1998))가 점진기능재료의 재료 성질의 변화를 나타내기 위해 사용되어 왔다. 그러나 거듭제곱 함수나 지수 함수에서는 재료의 성질이 갑자기 변하는 곳에서 응력집중 현상이 나타난다. 따라서 Chung 과 Chi (2001)는 체적 요소를 정의하는 2개의 거듭제곱 함수로 구성된 새로운 S 형상 점진기능재료를 제안했다.

Kebari 와 Cassell (1992)은 안정 기법을 이용한 순수 변위 방법에 의한 9절점 셸 요소를 연구하였다. 이 셸요소는 전단잠김 현상을 피하기 위해 감차 적분을 사용했다. Kanok-Nukulchai와 Wong (1988)은 요소 기저 변형을 개념에 의한 9절점 자연 변형을 셸 요소를 개발하였고, Han 등 (2004, 2006)은 이 개념을 적층복합 판과 셸로 확장시켰다. 이 새로운 방법에서는 변형과 모든 평형 방정식들이 자연좌표계에서 직접 표현된다. Kim 등 (2007)은 가정변형을 4절점 셸 요소를 이용하여 적층복합셸의 비선형 해석을 수행하였고 Han 등 (2007)은 보강된 적층복합판의 동적특성에 관해 연구하였다. Kanok-Nukulchai (1989)는 비선형 해석에서 하중 증분 단계의 조절에 필요한 호장길이의 크기를 자동적으로 변화시키기 위하여 "기술기 비" 개념을 사용하였다.

점진기능 재료에 관한 연구는 주로 열 하중을 받는 경우로 제한되어 역학적 하중을 받는 경우에 대한 연구는 크게 관심을 끌지 못하였다. 따라서 역학적 하중

을 받는 경우에 비교 해를 구하기가 어려운 실정이고 특히 기하학적 비선형 거동에 관한 연구실적은 전무한 상황이다. 그러나 열 하중 못지않게 역학적 하중은 모든 구조물에서 근본적인 문제이며 구조물의 방재를 위하여 반드시 필요한 선행 연구 과제라고 판단된다. 본 연구에서는 등방성 점진기능재료 셸 요소의 비선형 정식화 및 구조적 거동을 설명하기 위해 유한요소 모델을 제시하였다. 본 연구의 기하학적 비선형 기법은 기하학적 강성도에 있어서 면내, 휨 및 횡 전단 응력을 포함하는 Green 변형을 텐서의 완전한 정의를 사용하여 유도 되었다. 전단 잠김과 막 잠김을 피하기 위해 Han 등 (2004)에 의한 가정변형을 방법이 요소 자연 좌표계에 적용되었다. 점진기능재료 판과 셸의 재료 성질은 S 형상 함수에 의한 구성재료의 체적 요소에 따라 판과 셸의 두께를 따라서 연속적으로 변하는 것으로 가정하였다. 하중 및 변위를 푸리에 급수 전개로 근사화하여 점진기능재료 판의 급수 해를 구하고, 이러한 해석적인 결과를 9절점 셸 요소를 사용한 수치 해석 결과와 비교 분석하였다. 해석적 결과와 비교를 통하여 본 연구에서 제시한 셸 요소의 검증은 물론 향후 점진기능재료 구조물의 수치해석 연구자들을 위한 다양한 경우의 하중-변위 관계 곡선을 제시하였다.

2. 점진기능재료 셸요소의 정식화

2.1 점진기능재료 구조물의 구성방정식

점진기능재료는 미리 정해진 외형에 맞추어 재료의 성질을 연속적으로 변화 시킴으로써 제작될 수 있다. 점진기능재료의 가장 두드러진 특징은 연속적으로 등 급화된 성질을 갖는 비균질 미세 구조라는 것이다. 점진기능재료는 체적요소의 변화에 의해 정의될 수 있다. 대부분의 연구자들은 거듭제곱 함수, 지수함수, 혹은 체적요소를 나타내는 S 형상 함수를 사용한다. 접촉면에서 나타날 수 있는 응력 집중을 피하기 위해, 본 연구에서는 S 형상 함수를 사용하였다.

완만한 응력 분포를 확보하기 위해, 2개의 거듭제곱 함수를 이용한 체적요소를 식(1)과 같이 정의한다.

$$V_f^1(\xi_3) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - \xi_3}{h/2} \right)^p \quad \text{for } 0 \leq \xi_3 \leq h/2 \quad (1-a)$$

$$V_f^2(\xi_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + \xi_3}{h/2} \right)^p \quad \text{for } -h/2 \leq \xi_3 \leq 0 \quad (1-b)$$

여기서 h 는 셸의 두께이며, p 는 두께를 따라서 재료의 변화 형상을 나타내는 거듭제곱 매개 변수이다. 혼

합 법칙을 사용함으로써, S 형상 점진기능재료의 재료 성질은 식(2)와 같이 구할 수 있다.

$$H(\xi_3) = V_f^1(\xi_3)H_1 + (1 - V_f^1(\xi_3))H_2 \quad \text{for } 0 \leq \xi_3 \leq h/2 \quad (2-a)$$

$$H(\xi_3) = V_f^2(\xi_3)H_1 + (1 - V_f^2(\xi_3))H_2 \quad \text{for } -h/2 \leq \xi_3 \leq 0 \quad (2-b)$$

여기서 $H(\xi_3)$ 는 탄성계수, 재료의 밀도, 프아송 비 그리고 화이버의 각도와 같은 고유의 재료성질을 나타내고, H_1 과 H_2 는 각각 구조물의 상면과 하면의 성질을 나타낸다.

그림 1 은 식(2-a)과 (2-b)에서 체적요소의 변화 S 형상 분포를 나타내고 있으며, 이러한 성질을 가진 점진기능재료 구조를 S 형상 점진기능재료 구조라고 한다.

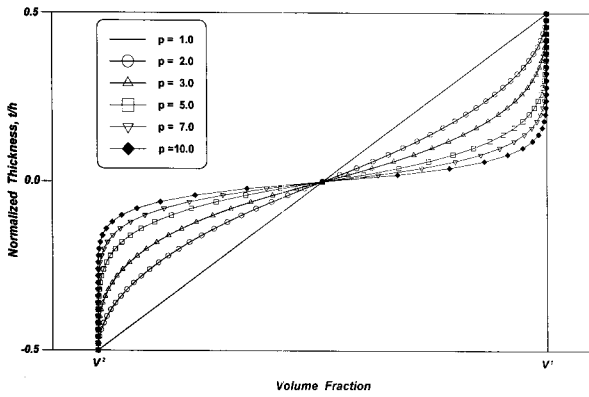


그림 1. S형상 점진기능재료 판과 셸의 체적요소의 변화

하나의 탄성 직사각형 판과 셸을 고려해 보았을 때 국부좌표계 ξ_1 과 ξ_2 는 판과 셸의 중립면을 정의하며, 반면에 판과 셸의 중립면이 원점인 ξ_3 좌표는 두께 방향을 나타낸다. 상면과 하면에서 탄성 계수와 프아송 비와 같은 재료성질들은 상이한 값을 가지지만, 해석을 위해 미리 정해진 값을 대입한다. 그러나 판과 셸의 탄성 계수, 밀도 및 프아송 비는 두께 방향(ξ_3 -축)으로 연속적으로 변한다. 즉, $E = E(\xi_3)$, $\rho = \rho(\xi_3)$, $\nu = \nu(\xi_3)$ 이다. 이러한 구조물을 점진기능재료 판과 셸 이라고 한다.

2.2 Navier 해

단순 지지된 판에 대하여 평형 방정식으로부터 Navier해를 구할 수 있다. 1차 전단변형 판이론의 경계 조건은 SS-1 경계 조건이다. (Reddy (1997)).

SS-1 경계 조건은 식(3)의 급수 전개로 표현된다.

$$\bar{u}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm} \Lambda_1 \quad (3-a)$$

$$\bar{v}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm} \Lambda_2 \quad (3-b)$$

$$\bar{w}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \Lambda_3 \quad (3-c)$$

$$\varphi_r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{nm} \Lambda_1 \quad (3-d)$$

$$\varphi_s(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{nm} \Lambda_2 \quad (3-e)$$

여기서

$$\Lambda_1 = \cos \alpha \xi_1 \sin \beta \xi_2, \quad \Lambda_2 = \sin \alpha \xi_1 \cos \beta \xi_2, \quad \Lambda_3 = \sin \alpha \xi_1 \sin \beta \xi_2. \quad (4)$$

여기서 $\alpha = m\pi/a$ and $\beta = n\pi/b$.

수직하중 $q(r,s)$ 을 푸리에 급수로 전개하면 식(5)와 같다.

$$q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nm} \Lambda_3 \quad (5)$$

여기서

$$Q_{nm} = \iint q(\xi_1, \xi_2) \sin \alpha \xi_1 \sin \beta \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (6)$$

$q(\xi_1, \xi_2)$ 가 등분포 하중이면, 즉, $q(\xi_1, \xi_2) = q_0$, 식(6)에 의해서 계산된 Q_{nm} 은 식(7)과 같다.

$$Q_{nm} = \begin{cases} \frac{16q_0}{\pi^2 mn} & m, n = 1, 3, 5, L \\ 0 & m, n = 2, 4, 6, L \end{cases} \quad (7)$$

만약 $\xi_1 = u_1$, $\xi_2 = v_1$ 에 작용하는 집중 하중 $q(\xi_1, \xi_2) = P$ 라면, 다음과 같다.

$$Q_{nm} = \begin{cases} \frac{4P}{ab} \sin \alpha u_1 \sin \beta v_1 & m, n = 1, 3, 5, L \\ 0 & m, n = 2, 4, 6, L \end{cases} \quad (8)$$

식(3)과 (5)을 평형방정식에 대입하면, 식(9)를 얻을 수 있다:

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{\mathbf{q}\} \quad (9)$$

여기서 $[\mathbf{K}]$ 는 강성도 행렬이며,

$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ 그리고 $\{\mathbf{q}\} = \{0, 0, Q_{mn}, 0, 0\}$ 이다.

3. 쉘 요소의 기하학적 형상과 평형 방정식

절점당 6개의 자유도를 가진 9절점 쉘 요소의 기하학적 형상은 그림 2와 같다.

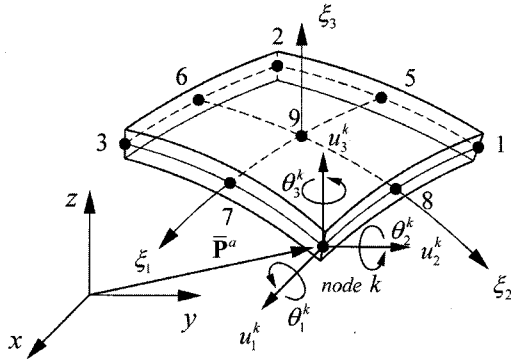


그림 2. 6개의 자유도를 갖는 9절점 쉘 요소의 기하학적 형상

중립면에서 수직 법선이 변형 후에도 직선으로 남는다는 쉘 가정을 이용하여 일정한 두께를 갖는 쉘 요소의 초기 상태는 식(10)으로 나타낼 수 있다

$$\mathbf{P}(\xi_i) = \bar{\mathbf{P}}(\xi_\beta) + \xi_3 \bar{\mathbf{V}}(\xi_\beta); \quad i=1,2,3, \quad \beta=1,2 \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\xi_\beta) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \bar{\mathbf{P}}^a \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{V}}(\xi_\beta) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{V}}^a \quad (12)$$

여기서 \mathbf{P} 는 쉘 요소의 임의의 점의 위치 벡터를 나타내며, $\bar{\mathbf{P}}$ 는 중립면의 한 점의 위치 벡터를 나타낸다. N_a 는 절점 a 와 관련된 2차원 2차 라그랑지안 보간함수이며 $\bar{\mathbf{P}}^a$ 는 3개의 직교 좌표계 성분을 갖는 위치 벡터이다. h^a 는 절점 a 에서 쉘의 두께이며 $\hat{\mathbf{V}}^a$ 는 절점 a 에서 단위 수직 벡터이고 중립면에 수직이다.

쉘 요소의 변위장 \mathbf{u} 는 식(13)과 같이 정의된다.

$$\mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\bar{\mathbf{u}}^a \quad \xi_3 \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{e}}^a \right] = \bar{\mathbf{u}}(\xi_\beta) + \xi_3 \bar{\mathbf{e}}(\xi_\beta) \quad (13)$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}$ 는 중립면의 한 점에서 병진 변위 벡터이고, $\hat{\mathbf{e}}^a$ 는 절점 a 에서 회전 변위 벡터이다. 본 연구에서는 6개의 자유도를 사용하기 때문에 Lagrangian 정식에서 2개의 독립적인 회전을 사용하는 Euler 각 대신 3개의 연속적인 회전을 표현하기 위해 θ_1 , θ_2 와 θ_3 를 도입하였다. 단위 수직 벡터가 고정되어 있고, 물체와 함께 움직인다는 가정 하에 절점에서의 또 다른 직각 좌표계를 도입한다면, 변형이 일어나는 동안 단위 수직 벡터에 의해 이뤄지는 회전은 이 좌표계를 통해서 정밀하게 나타낼 수 있다.

기본적으로, 3개의 회전에 대한 변형 행렬은 식(14)와 같다.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix};$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

여기서 $c_i = \cos \theta_i, s_i = \sin \theta_i$ ($i=1,2,3$)이고 전체 변환 행렬 \mathbf{R} 은 식(15)로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R} = R_1 R_2 R_3 = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3개의 회전은 식(15)에 의해서 하나의 유일한 변환 행렬 \mathbf{R} 로 정의된다. 따라서 각 절점에서 추가된 참조 좌표계에 대해서 일반화된 좌표계로 사용될 수 있다. 중립면에 관한 회전 변위는 3개의 회전각으로 나타낼 수 있다. 충분 회전 변위 벡터는 기준 좌표계 (y_1, y_2, y_3) 에서 식(16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{y_1} \\ \Delta \theta_{y_2} \\ \Delta \theta_{y_3} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_A \begin{Bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서

$$\mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

결과적으로, 식(15)의 변환 행렬을 사용하여, 식(13)의 변위장은 식(18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\bar{\mathbf{u}}^a \xi_3 \frac{h^a}{2} (\mathbf{R}^a - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \hat{\mathbf{V}}^a \right] \quad (18)$$

여기서 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 은 단위 행렬이다.

식(15)의 3개의 회전각이 매우 작으면 식(18)은 식(19)와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\xi_3 h^a}{2} \Psi^a \right] \mathbf{u}^a(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a \mathbf{u}^a \quad (19)$$

여기서

$$\Psi^a = \begin{bmatrix} 0 & \hat{V}_3^a & -\hat{V}_2^a \\ -\hat{V}_3^a & 0 & \hat{V}_1^a \\ \hat{V}_2^a & -\hat{V}_1^a & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^a = \{\bar{u}_1^a, \bar{u}_2^a, \bar{u}_3^a, \theta_1^a, \theta_2^a, \theta_3^a\}^T$$

$$\mathbf{N}_a = N_a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{V}_3^a & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{V}_2^a \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{V}_3^a & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{V}_1^a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{V}_2^a & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{V}_1^a & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

셸 요소에 대한 변위장의 증분 형태는 식(21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\Delta \bar{\mathbf{u}}^a \xi_3 \frac{h^a}{2} \Delta \hat{\mathbf{e}}^a \right] \quad (21)$$

여기서

$$\Delta \hat{\mathbf{e}}^a = \mathbf{R}^a \Psi^a \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{y_1} \\ \Delta \theta_{y_2} \\ \Delta \theta_{y_3} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}^a \Psi^a \mathbf{R}_A^a \begin{Bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

변위장의 증분 형태는 절점 증분 벡터 $\Delta \mathbf{u}^a$ 의 향으로 식(23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} \xi_3 \frac{h^a}{2} \mathbf{H}^a \right] \Delta \mathbf{u}^a \quad (23)$$

여기서

$$\mathbf{H}^a = \mathbf{R}^a \Psi^a \mathbf{R}_A^a, \quad \Delta \mathbf{u}^a = \{\Delta \bar{u}_1^a, \Delta \bar{u}_2^a, \Delta \bar{u}_3^a, \Delta \theta_1^a, \Delta \theta_2^a, \Delta \theta_3^a\} \quad (24)$$

4. 비틀림 효과

요소가 수직 회전 자유도에 직접적인 강성 기여를 가지지 않는다면, 이웃하는 요소가 거의 동일 평면에 있을 때, 강성 행렬은 특이치가 될 수 있다. 이러한 문제는 요소의 각 절점에서 국부수직방향으로 가상의 비틀림스프링을 추가함으로써 극복할 수 있다. 그러나, 이 기법은 강체 운동에 의해 요소의 성능이 저하되는 결점을 갖고 있다. Kanok-Nukulchai (1989)은 비틀림 회전을 중립면의 평균 수직 회전에 연결시키는 추가적인 구속을 사용했다. 연속체 역학 정의를 사용하면, 구속 방정식은 식(25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha_i(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial z_1}(\xi_1, \xi_2, 0) - \frac{\partial w_1}{\partial z_2}(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \approx 0 \quad (25)$$

여기서 α_i 는 면내 비틀림 회전이며 w_1 과 w_2 는 국부 좌표계의 변위 성분이다. z_3 축이 셸 중립면에 수직인 $z_i (i=1,2,3)$ 는 국부 직교 좌표축이다.

본 연구에서는, Kanok-Nukulchai (1989)의 제안에 근거하여 수직 회전 자유도에 식(26)과 같은 추가 변형 에너지를 이용한 벌칙 범함수를 면내 비틀림에 결합하여 사용한다.

$$U_t = k_t G \int_V \left[\alpha_i(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial z_1}(\xi_1, \xi_2, 0) - \frac{\partial w_1}{\partial z_2}(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \right]^2 dV \quad (26)$$

여기서 k_t 는 지정될 매개 변수이며 (0.1을 사용하였음); G 는 전단탄성계수이고 V 는 요소의 체적이며 그리고 dV 는 미소 체적 요소이다. 과다 구속 현상을 피하기 위해 비틀림 강성을 계산할 때 2x2 가우스 적분 기법이 사용된다. 두께에 걸쳐 적분한 후, 식(26)은 식(27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_i = 2k_i G \int_1^2 \int_1^2 \left[\alpha_i(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial z_1}(\xi_1, \xi_2, 0) - \frac{\partial w_1}{\partial z_2}(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \right]^2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (27)$$

식(27)로부터 비틀림 강성을 유도하기 위해 국부 변수들을 형상함수에 의해 전체 절점 좌표 변수들의 항으로 표현하고, 가상일의 원리를 이용하면 식(28)과 같은 형태의 식이 주어진다.

$$\delta U_i = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_u \mathbf{u} \quad (28)$$

가상 변위 $\delta \mathbf{u}$ 가 임의의 값이므로, 비틀림 강성 행렬(\mathbf{K}_u)을 구할 수 있다. 비틀림 강성행이 Kanok-Nukulchai (1989)에 의해 제안된 것처럼 강성 행렬에 추가하였다.

5. 자연 변형률 텐서

자연 좌표계에 의한(Han 등, 2004) Green 변형률 텐서에 대응하는 자연변형률 텐서는 식(29)와 같이 정의된다.

$$\bar{E} = \frac{P_I}{X_a} \frac{P_J}{X_b} E_{IJ} \quad (29)$$

고차항을 무시하고, 식(10)과 (13)을 식(29)에 대입하면 식(30)과 같다.

$$\bar{E}_{ab} = \frac{1}{2} \frac{P_I}{X_a} \frac{u_J}{X_b} + \frac{P_J}{X_a} \frac{u_I}{X_b} + \frac{P_K}{X_a} \frac{u_K}{X_b} \quad (30)$$

식(30)에서 증분 면내, 휨, 전단 변형률을 식(31)과 같이 선형과 비선형 부분으로 분리할 수 있다.

$$\Delta \bar{E} = \Delta^L \bar{E}_i + \Delta L^{NL} \bar{E} \quad (i = m, b, s) \quad (31)$$

여기서 E^m, E^b 과 E^s 은 면내, 휨, 전단 변형률 성분이다. 식(31)에서 선형 변형률 부분은 식(32)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta E_m = \bar{B}_m \Delta u, \quad \Delta E^b = \bar{B}_b \Delta u, \quad \Delta E^s = \bar{B}_s \Delta u \quad (32)$$

잠금 문제를 피하기 위해서, Han 등(2004)에 의해서 9절점 쉘 요소에 자연 변형률 방법을 사용하여 식

(33)과 같은 형태로 나타낼 수 있다:

$$\begin{pmatrix} \Delta^L \bar{e}^m \\ \Delta^L \bar{e}^b \\ \Delta^L \bar{e}^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{B}_m)_{AS} & 0 \\ \xi_3 \bar{B}_{b1} & \xi_3 \bar{B}_{b2} \\ (\bar{B}_{s1})_{AS} & (\bar{B}_{s2})_{AS} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \theta \end{pmatrix} \quad (33)$$

6. 점진기능재료 판과 쉘의 합응력

점진기능재료 판과 쉘의 구성 방정식은 식(34)와 같다.

$$\begin{pmatrix} S_{rr} \\ S_{ss} \\ S_{rs} \\ S_{r3} \\ S_{s3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{rr} \\ E_{ss} \\ E_{rs} \\ E_{r3} \\ E_{s3} \end{pmatrix} \quad (34)$$

여기서

$$Q_{11} = \frac{E_1(\xi_3)}{1 - [\nu_{12}(\xi_3)\nu_{21}(\xi_3)]}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}(\xi_3)E_2(\xi_3)}{1 - [\nu_{12}(\xi_3)\nu_{21}(\xi_3)]},$$

$$Q_{22} = \frac{E_2(\xi_3)}{1 - [\nu_{12}(\xi_3)\nu_{21}(\xi_3)]}$$

$$Q_{44} = G_{23}(\xi_3), \quad Q_{55} = G_{23}(\xi_3), \quad Q_{66} = G_{12}(\xi_3) \quad (35)$$

여기서 탄성 계수 E, G 와 프아송 비 ν 그리고 응력과 변환 탄성 계수 Q_{ij} 는 식(2-a, b)에 의해서 쉘의 두께를 따라 변한다.

점진기능재료 판 및 쉘의 합응력은 식(36)과 같이 정의된다.

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{pmatrix} d\xi_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{pmatrix} d\xi_3 \quad (36-a)$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \xi_3 \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{pmatrix} d\xi_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \xi_3 \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{pmatrix} d\xi_3 \quad (36-b)$$

$$Q = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{23} \end{pmatrix} d\xi_3 = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{E}_{13} \\ 2\bar{E}_{23} \end{pmatrix} d\xi_3 \quad (36-c)$$

여기서 k_s 는 전단보정계수로서, Reissner에 의해 제안된 값인 5/6을 사용하였다.

7. 평형 증분방정식

대변형에서는 응력-변형률 관계가 비선형이기 때문에 일반화된 Hook의 법칙으로 근사적인 재료의 거동을 나타낼 수 없다. 실제적인 관점에서, Hook의 법칙은 구성행렬이 상수인, 단지 작은 변형률에만 적용할 수 있다. 미소 변형률 가정을 이용하여 식(37)과 같은 증분평형방정식이 얻어진다.

$$\int \delta(\Delta^L \bar{E})^T \bar{C} \Delta^L \bar{E} dV + \int S(\Delta^{NL} \bar{E}) dV - {}^{t+\Delta t} \delta W_{ext} - \int \delta(\Delta^L \bar{E})^T]_s \Delta V \quad (37)$$

여기서 현재 상태로 사용되는 위 첨자 t는 식(37)에서는 무시되었고, 위 첨자 $t + \Delta t$ 는 증분 상태이다, ${}^{t+\Delta t} \delta W_{ext}$ 는 $t + \Delta t$ 증분 상태에서 외적 가상 일이다.

전체 접선 강성 행렬은 선형 강성 행렬과 기하 강성 행렬로 구성된다. Green 변형률 텐서의 선형 부분은 선형 강성 행렬을 유도하기 위해 사용되고, Green 변형률 텐서의 비선형 부분은 기하 강성 행렬을 유도하기 위해 사용된다.

7.1 선형 요소 강성 행렬

변형률-변위 관계를 나타내는 식(33)을 식(37)에 대입하면, 선형 요소 강성 행렬 $[K_L]$ 은 식(38)과 같이 얻을 수 있다.

$$\int \delta(\Delta^L \bar{E})^T \bar{C} \Delta^L \bar{E} dV = \delta \Delta u^T \int \bar{B}^T \bar{C} \bar{B} dV du \quad (38) \\ = \delta \Delta u^L [K_L] \Delta u$$

요소 강성 행렬을 등가 구성 방정식을 이용하여 행렬 형태로 나타낼 수 있다. 요소 강성 행렬은 쉘 요소의 기준면에서 6x6 크기를 갖는다. 비틀림 강성 항은 Kanok-Nukulchai (1989)가 기술한 것처럼 형성되며, 요소 강성 행렬에 추가된다.

7.2 비선형 요소 강성 행렬

정확한 기하학적 강성 행렬을 구하기 위해 응력이

정확하게 계산되어야 한다. 기하학적 강성 행렬의 정식화를 위한 응력 계산의 정확도는 선형 강성 행렬 계산에서 동일한 보간 변형률을 구함으로써 유지된다. 응력은 이러한 변형률에 의한 적분점에서 계산된다. 식(31)의 비선형 부분을 식(37)에 대입하면 식(39)의 기하학적 강성 행렬 $[K_G]$ 이 얻어진다.

$$\int \delta(\Delta^{NL} \bar{E})^T \bar{C} \Delta^{NL} \bar{E} dV + \int S(\Delta^{NL} \bar{E}) dV \quad (39) \\ = \delta \Delta u^T [K_G] \Delta u$$

자연 좌표계에서 기하학적 강성 행렬은 두께를 따라서 해석적으로 적분된다. 6x6 부-행렬을 갖는 요소 기하학적 강성 행렬은 전체 좌표계로 변환함으로써 전체 좌표계에 대해서 얻어진다. 증분 비선형 평형 방정식은 식(40)과 같다.

$$([K_L] + [K_G]) \Delta u = {}^{t+\Delta t} \bar{F} - F \quad (40)$$

여기서 \bar{F} 와 F 는 각각 외력과 내력을 나타낸다.

후좌굴 범위인 한계점을 넘어서까지 안정적 해석을 확장시킬 필요가 있다면, 적절한 해석 절차가 적용되어야 한다. 효과적인 방법은 Crisfield (1981)에 의한 Newton-Raphson 방법과 함께 호장길이를 자동으로 조절하는 방법을 응용하는 것이다.

8. 수치해석 예제

본 연구의 수치적 성능을 검증하기 위하여 선형 정적 문제의 해석 결과를 제시하였다. 비선형 9절점 요소 기저 라그랑지안 쉘 요소의 점진기능재료 재료 정식화를 수행하였다. 본 연구의 비선형 요소의 선형 강성 행렬 정식화는 Han 등(2004, 2006)과 동일하기 때문에, 면내, 휨, 전단의 성능 시험을 마쳤고, 등방성 재료에 대해서 동일한 결과를 나타낸다. Delale과 Erdogan (1983)은 변형에 대한 프아송 비의 영향이 탄성 계수보다 훨씬 적음을 보여주고 있다. 따라서, 판과 쉘의 프아송 비를 상수로 가정한다. 그러나 점진기능재료 판과 쉘의 두께 방향으로의 탄성 계수는 S형상 점진기능재료함수로 변한다. 쉘의 하면은 금속으로 가정하고, 상면은 순수 세라믹으로 가정한다. 본 연구에서는 단지 역학적 하중을 받는 점진기능재료 판과 쉘의 기하학적 비선형 탄성거동만을 고려한다.

8.1 점진기능재료 판과 셸의 선형해석

8.1.1 단순지지된 직사각형 점진기능재료 등방성판

첫번째로, 본 연구의 검증에 위해 고전적 판이론 (Chi 와 Chung, 2006a)에 의한 S 형상 점진기능재료 판(그림 3)의 해석 결과를 1차 전단변형이론에 의한 본 연구의 해석 결과와 비교하였다. 재료 및 기하학적 성질은 식(41)과 같다.

$$E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.3, a = 100 \text{ cm}, h = 2 \text{ cm}$$

그리고 $q_0 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ (41)

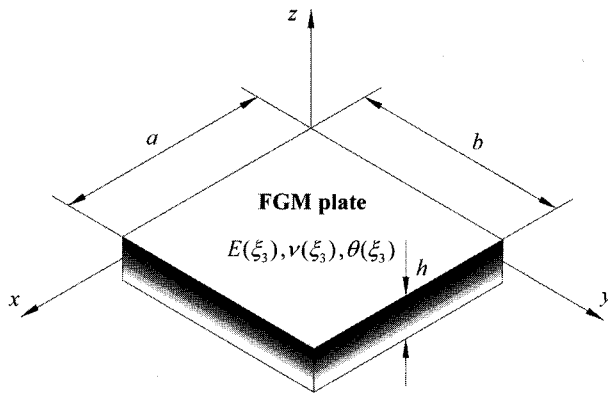


그림 3. 점진기능재료 판의 형상

Chi 와 Chung (2006b)에 의한 고전 이론과 1차이론에 의한 해석 결과를 그림 4에 나타내었다. 그림 4는 상이한 E_1/E_2 에 대해서 x 방향을 따라 S 형상 점진기능재료판의 처짐을 나타낸다. E_1/E_2 가 커질수록 점진기능재료 판의 강성이 줄어들기 때문에 E_1/E_2 가 커질수록 점진기능재료 판의 처짐이 커짐을 보여주고 있다. 본 연구의 해석 결과와 참고 문헌의 결과가 매우 잘 일치하였다.

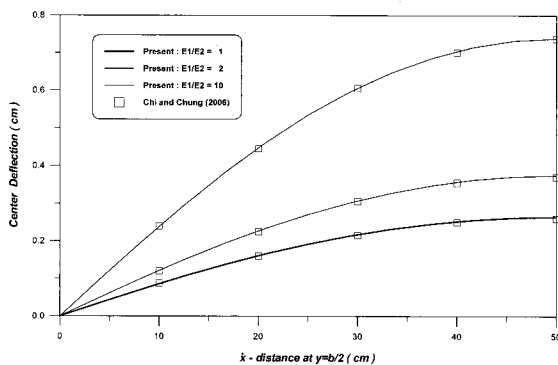


그림 4. 상이한 E_1/E_2 에 대한 x 방향의 S-점진기능재료 판의 처짐

형상비의 변화가 점진기능재료 판의 처짐에 끼치는 영향을 조사하기 위해서, 점진기능재료 판의 중앙점의 처짐을 그림 5에 나타내었다. 형상비가 3 보다 적을 때에는 중앙점의 처짐이 지속적으로 증가하였으나 3 이상인 경우에는 일정한 값에 수렴됨을 알 수 있었다. 그림 4 와 5에서, 폭-두께비가 매우 큰 경우 ($a/h=50$)에 참고문헌의 고전적 전단변형이론에 의한 결과와 본 연구의 1차 전단변형이론에 의한 결과가 매우 잘 일치함을 보여주고 있다. 기존의 여러연구에서 알 수 있듯이 폭-두께비가 작아질수록 두 결과의 차이는 커질 것이다. 본 연구에서는 모든 예제를 1차 전단변형 이론을 이용하여 해석하였다.

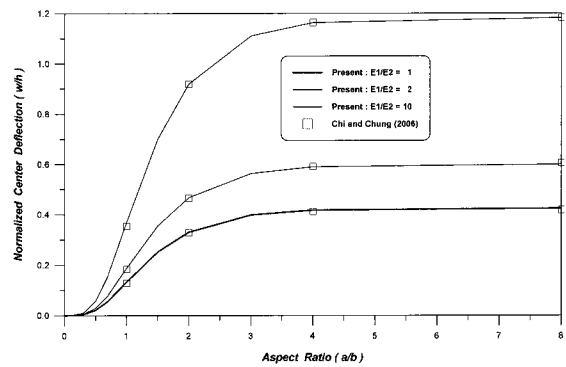


그림 5. 상이한 E_1/E_2 에 대한 형상비에 따른 S-점진기능재료판의 정규화된 중앙점의 처짐

두 번째로, 본 연구에서 제시한 셸 요소의 점진기능재료 정식화에 대한 적용성을 검증하기 위해 S 형상 점진기능재료 판을 유한요소 해석하였다. 여기서 등분포 하중 q_0 를 받고 있는 단순 지지된 사각형 판에 대한 Navier 의 해석 결과들을 나타내었다. 경계 조건은 단순 지지로 구속되어있고, 재료 및 기하학적 성질은 식(42)와 같다.

$$E_1 = 110 \times 10^9 \text{ Pa}, E_2 = 10 \times 10^9 \text{ Pa}, \nu = 0.3, a/h = 100,$$

$$q_0 = 1.0 \text{ N/m}^2 \quad (42)$$

여기서 E_1 과 E_2 는 각각 판의 상면과 하면에서 재료의 탄성 계수를 나타낸다.

해석 결과를 무차원 항으로 나타내기 위해 식(43)을 이용한다.

$$\bar{w} = w \times \frac{E_1 h^3}{q_0 a^4} \quad (43)$$

표 1에서는 중심점의 무차원 처짐을 보여주고 있다. 본 연구에서 제시한 셀 요소의 점진기능재료 정식화에 대한 적용을 통한 해석 결과가 해석적인 해석 결과와 매우 잘 일치함을 보여주고 있다.

표 1. S 형상 점진기능재료판 정규화된 중앙점의 처짐 (거듭제곱 매개 변수 : $p=10$)

전체 메쉬 분할	중앙점의 처짐	본 연구/정확해
2×2	0.16929	1.030
4×4	0.16456	1.001
8×8	0.16434	1.000
해석적 해*	0.16434	-

* 해석결과는 1차전단변형이론 의한 Navier 방법을 사용하여 계산하였다.

8.2 점진기능재료 판과 셀의 비선형 해석

8.2.1 단순지지된 점진기능재료 등방성 셀

본 절에서는, 하나의 집중하중을 받는 두께가 다른 2개의 원통형 셀의 후좌굴 거동을 분석하였다. 원통형 셀의 길이방향 경계는 단순지지되어 있고, 곡선경계는 자유단이다. 그림 6은 셀의 기하학적 형상을 나타내고 있다. 대칭조건을 이용하여 셀의 1/4만 8×8 요소로 모델링 하였다. 점진기능재료 판과 셀의 모든 경우에 수치적인 값을 계산할 때 식(44)의 재료의 성질을 사용하였다.

$$E_1 = 151 \times 10^9 \text{ Pa}, E_2 = 70 \times 10^9 \text{ Pa}, \nu = 0.3, a/h = 100 \quad (44)$$

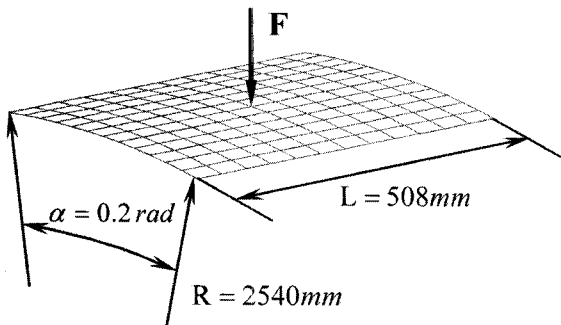


그림 6 단순 지지된 원통형 셀의 기하학적 형상

그림 7-8은 단순 지지된 원통형 셀의 역학적 작용 하중 F 에 의한 중앙점의 처짐이다. 점진기능재료 셀

의 해석은 2가지 행태로 수행된다. 첫 번째 셀은 $h=12.6\text{mm}$ 두께를 가지며, 두 번째 셀은 $h=6.3\text{mm}$ 의 두께를 갖는다. 셀의 강성, 즉 하중-변위 관계 곡선의 기울기는 하중이 증가함에 따라 감소한다. 임계점에서는, 하중-처짐 곡선의 기울기가 0에 접근한다. 임계점에서 셀의 snap-through 현상이 일어난다. 또한, $h=12.6\text{mm}$ 두께의 하중-변위 관계 곡선은 상한계 하중과 하한계 하중을 보여주고 있으며, $h=6.3\text{mm}$ 두께의 하중-변위 관계 곡선은 상한계 하중과 부하중 범위에서 snap-back 거동을 보여주고 있다.

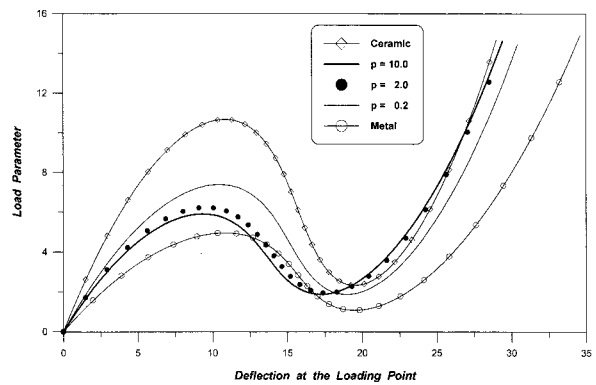


그림 7. 집중 하중을 받는 단순 지지 Aluminum-Zirconia S 형상 점진기능재료 셀의 중앙점의 처짐 ($h=12.6\text{mm}$)

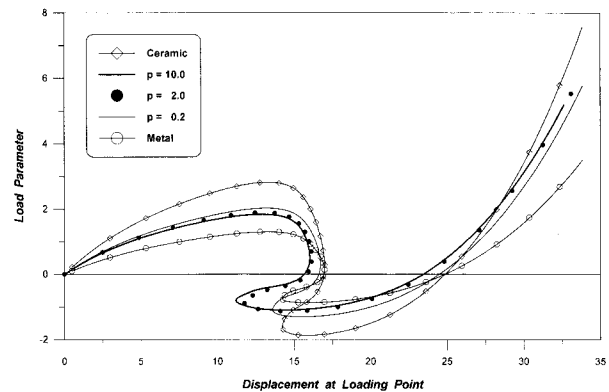


그림 8. 집중하중을 받는 단순지지 Aluminum-Zirconia S 형상 점진기능재료 셀의 중앙점의 처짐 ($h=6.3\text{mm}$)

8.2.2 인장력을 받는 점진기능재료 실린더의 비선형 해석

자유단을 갖는 실린더를 그림 9에 나타내었다. 실린더는 한 쌍의 집중 하중을 받고 있으며, 대칭 조건을 이용하여 구조물의 1/8을 24×8 요소로 해석하였다.

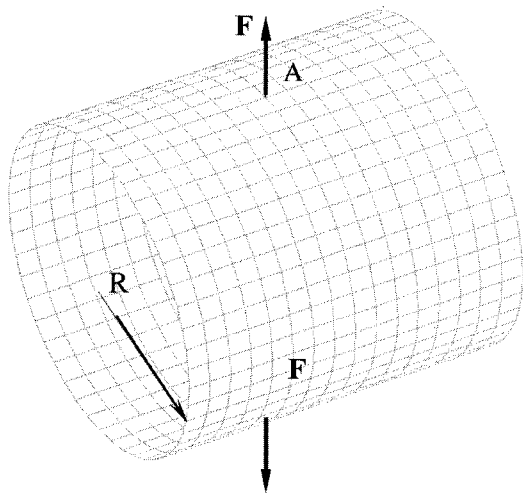


그림 9. 자유단을 갖는 인장력을 받는 실린더

그림 10은 원통형 실린더에 역학적 작용하중 F 에 의한 하중 작용점의 하중-변위 관계 곡선을 보여주고 있다. 점진기능재료 쉘의 처짐이 2.5에 도달할 때, 하중-변위 평형 경로는 snap-through 현상을 보여주고 있다. 이것은 쉘의 기하학적 형상에 의한 원인 때문이다. 금속과 세라믹의 결합은 순수 금속재료에 대해서 52% 이상으로 한계 하중을 증가시킴을 알 수 있었다.

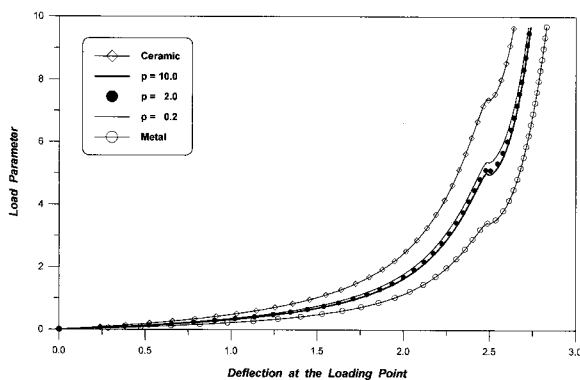


그림 10. 집중 하중을 받는 Aluminum-Zirconia S 형상 점진기능재료 실린더의 중앙점의 처짐

9. 결 론

점진기능재료 판 및 쉘의 해석을 위한 9절점 요소 기저 자연변형을 쉘 요소의 비선형 정식화를 개발하였다. 기하학적 강성 행렬의 정식화는 Green 변형을 텐서의 완전한 정의를 이용하였다. 본 비선형 정식화는 등방성 재료에 대한 많은 비선형 해석 시험 문제를 통

해서 그 성능을 확인하였다. 점진기능재료 판 및 쉘의 탄성 계수의 변화는 구성성분의 체적요소의 향으로 S 형상 분포에 따라 변하는 것으로 가정하였다. 1차 전단변형이론에 의한 단순 지지된 판의 Navier의 해를 처짐에 대한 구성성분의 거듭제곱 매개 변수비와 체적요소의 영향을 확인하기 위해 제시하였다. 점진기능재료 판과 쉘의 선형과 비선형 변위 곡선은 금속과 세라믹 판과 쉘의 변위 곡선의 중간에 위치하였다. 본 연구에서 제시된 점진기능재료 등방성 판과 쉘의 해석 결과가 향후 점진기능재료 쉘 요소의 대변형 해석을 위한 비교 자료가 될 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- 한성천, 최삼열 (2004) 가정 변형을 9절점 쉘 요소에 의한 적층 복합 판 및 쉘의 기하학적 비선형 해석. 대한토목학회논문집, 제24권, 제4-A호, pp. 769-778.
- 한성천, 최삼열 (2006) 면내 압축 및 전단을 받는 적층 복합 보강판의 자유진동해석. 대한토목학회논문집, 제26권, 제1-A호, pp. 191-203.
- Bao, G. and Wang, L. (1995) Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/metal Coatings. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, pp. 2853-2871.
- Cheng, Z. Q. and Batra, R. C. (2000) Deflection Relationships Between the Homogeneous Kirchhoff Plate Theory and Different Functionally Graded Plate Theories. *Archive of Mechanics*, Vol. 52, pp. 143-158.
- Chi, S. H. and Chung, Y. L. (2006a) Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 13, pp. 3657-3674.
- Chi, S. H. and Chung, Y. L. (2006b) Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part II: Numerical results. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 13, pp. 3675-3691.
- Chung, Y. L. and Chi, S. H. (2001) The Residual Stress of Functionally Graded Materials. *J Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, Vol. 13, pp. 1-9.

- Crisfield, M. A. (1981) A Fast Incremental/iterative Solution Procedure that Handles Snap-through, *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 55-62.
- Delale, F. and Erdogan, F. (1983) The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane. *Journal of Applied Mechanics ASME*, Vol. 50, pp. 609-614.
- Erdogan, F. and Chen, Y. F. (1998) *Interfacial Cracking of FGM/metal Bonds*. *Ceramic Coating*. Edited by Kokini K.
- Han, S. C., Choi, S. and Park, W. T. (2007) The Effect of Varying the In-plane Loads and Stacking Sequence on the Vibration Analysis of Composite Stiffened Plates. *Science and Engineering of Composite Materials*, in print.
- Han, S. C., Kim, K. D. and Kanok-Nukulchai, W. (2004) An Element-based 9-node Resultant Shell Element for Large Deformation Analysis of Laminated Composite Plates and Shells. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 18, No. 6, pp. 807-829.
- Han, S. C., Lee, S. Y. and Rus, G. (2006) Postbuckling Analysis of Laminated Composite Plates subjected to the Combination of the In-plane Shear, Compression and Lateral Loading. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 18-19, pp. 5713-5735.
- Jin, Z. H. and Paulino, G. H. (2001) Transient Thermal Stress Analysis of an Edge Crack in a Functionally Graded Material. *International Journal of Fracture*, Vol. 107, pp. 73-98.
- Kanok-Nukulchai, W. (1989) A Powerful General Purposed Nonlinear Finite Element Package adopting Automatic Arc-length Control Algorithm. *Asian-Pacific Structural Analysis Conference*, Melacca, Malaysia, Session IV-1-1.
- Kanok-Nukulchai, W. and Wong, W. K. (1988) Element-based Lagrangian Formulation for Large-Deformation Analysis. *Computers and Structures*, Vol. 30, pp. 967-974.
- Kebari, H. and Cassel, A. C. (1992) A Stabilized 9-node Non-linear Shell Element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 37-61.
- Kim, K. D., Lee, C. S. and Han, S. C. (2007) A 4-node Co-rotational ANS Shell Element for Laminated Composite Structures. *Composite Structures*, Vol. 80, No. 2, pp. 234-252.
- Loy, C. T., Lam, K. Y. and Reddy, J. N. (1999) Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp. 309-324.
- Ma, H. and Kanok-Nukulchai, W. (1989) On the Application of Assumed Strained Methods. *Structural Engineering and Construction, Achievements, Trends and Challenges*, Kanok-Nukulchai et al. (eds.), AIT, Bangkok.
- Reddy, J. N. (1997) *Mechanics of composite plates*. CRC press, New York.
- Reddy, J. N. (2000) Analysis of Functionally Graded Plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, pp. 2177-2200.

© 논문접수일 : 2007년 08월 01일

© 심사의뢰일 : 2007년 08월 03일

© 심사완료일 : 2007년 08월 30일