

# 일정체적 양단고정 기둥의 정·동적 최적형상

## Static and Dynamic Optimal Shapes of Both Clamped Columns with Constant Volume

이 병 구<sup>1),†</sup> · 김 석 기<sup>2)</sup>  
*Lee, Byoung Koo Kim, Suk Ki*

요 약 : 이 논문은 일정체적 양단고정 기둥의 정·동적 최적형상에 관한 연구이다. 기둥의 단면은 정다각형이며, 단면깊이는 포물선으로 변화하는 변단면이다. 축방향 압축하중이 작용하는 기둥의 고유진동수 및 좌굴하중을 산정하는 수치해석 기법을 개발하였다. 그러한 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 Runge-Kutta법과 Regula-Falsi법을 이용하여 고유진동수를 산정하였다. 수치해석의 결과로부터 얻어진 하중-고유진동수 사이의 관계를 이용하여 기둥의 좌굴하중을 산정하였다. 기둥의 변수연구를 통하여 동적 안정영역, 동적 최적형상 및 최강기둥의 형상을 산출하였다.

ABSTRACT : This paper deals with the static and dynamic optimal shapes of both clamped columns with constant volume. The parabolic taper with the regular polygon cross-section is considered, whose material volume and column length are held constant. Numerical methods are developed for solving natural frequencies and buckling loads of columns subjected to an axial compressive load. Differential equations governing the free vibrations of such column are derived. The Runge-Kutta method is used to integrate the differential equations, and the Regula-Falsi method is used to determine natural frequencies and buckling loads, respectively. From the numerical results, dynamic stability regions, dynamic optimal shapes and configurations of strongest columns are presented in figures and tables.

핵심용어 : 고유진동수, 좌굴하중, 양단고정 기둥, 일정체적, 안정영역, 최적형상

KEYWORDS : natural frequency, buckling load, both clamped column, constant volume, stability region, optimal shape

### 1. 서론

기둥은 보, 평판, 곡선 부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 토목, 건축, 기계 등 각종 구조공학 분야에서 뼈대구조로 이용되고 있다(이 등, 2005).

기둥 문제에서 자유진동의 해석은 기둥의 동적 안정문제에서 매우 중요한 연구과제이다. 기둥에 동하중이 작용하는 경우에 기둥의 정확한 고유진동수 및 진동형의 산정은 기둥 설계 및 보수·보강에 매우 유용한 자료로 이용될 수 있다.

이러한 관점에서 기둥의 자유진동해석은 구조공학에서 전통적으로 매우 중요한 연구 분야 중에 하나이다. 구조물의 고유진동수 및 진동형은 단면 및 변단면 형상 등이 매우 큰 영향을 미친다. 기둥의 적절한 단면 및 적절한 변단면의 채택은 최적설계의 개념에서 고유진동수를 증진시킬 수 있는 합리적인 방

법이다(Haftka 등, 1990).

구조물의 정·동적 해석 특히 구조물의 좌굴하중 및 고유진동수의 산정은 전통적으로 구조공학분야에서 매우 중요한 연구 분야 중에 하나이다(문 등, 2006; 강과 윤, 1997).

이러한 문제와 관련된 문헌 중에서 기둥의 자유진동 및 좌굴하중과 관련된 문헌들을 고찰하면 다음과 같다. Niordson(1965)은 자유진동하는 동적 최적보에 관하여 연구하였다. Kamat and Simites(1973; 1975)는 유한요소 변위법에 의하여 동적 최적보의 고유진동수를 산출하였으며, 전단변형과 회전관성이 동적 최적보의 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다. Pedersen(1977)은 자유단에 스프링 및 집중질량을 갖는 캔틸레버 기둥의 동적 안정성에 관하여 연구하였다. Gupta(1985)는 선형 변단면 보의 고유진동수를 산출하였다. Bokaian(1988)은 압축하중이 작용하는 기둥의 고유진동수를

1) 교신저자. 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 교수  
(Tel. 063-850-6718, Fax. 063-857-7204, E-mail: bklee@wku.ac.kr)  
2) 단국대학교 토목환경공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2007년 8월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

산정하였다. Sato(1996)는 자유단에 집중질량을 갖고 종동력이 작용하는 Timoshenko 보의 동적 불안정성을 연구하였다. 정 등(2005)은 자유단에 종동력을 받는 캔틸레버 기둥의 임계하중에 대하여 연구하였다. 이와 김(2006)은 일정체적 단순지지 변단면 기둥의 정·동적 안정해석을 연구하였다.

구조물의 지점조건은 구조물의 거동에 매우 큰 영향을 미친다. 따라서 지점조건에 따른 구조물의 거동특성을 제공하는 것은 구조물의 설계 및 보수보강에 매우 중요한 연구과제이다.

이러한 연구배경으로 본 논문은 압축하중이 작용하는 양단고정 기둥의 동적 안정영역을 해석하는데 연구목적이 있다. 대상 기둥은 단면이 정다각형이고 길이와 체적이 일정하며, 단면깊이가 포물선 함수로 변화하는 변단면을 채택하였다. 일정체적을 갖는 기둥의 정·동적 해석에 관한 연구에서 이 연구에서 채택한 양단고정의 지점조건을 갖는 연구는 매우 드물었다.

이 연구에서 기둥의 재료는 선형탄성체로 가정하고, 기둥의 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여 기둥의 자유진동 및 좌굴기둥의 탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식에는 압축하중의 영향을 고려하였다.

미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하고, 미분방정식의 고유치인 고유진동수는 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다. 단면비, 정다각형의 변수 및 압축하중의 변화에 따른 고유진동수를 산출하고 하중단계별 동적 안정영역을 산출하였다. 하중-고유진동수의 관계를 이용하여 기둥의 좌굴하중을 산정하고 이 결과로부터 최강기둥의 단면비를 산출하였다.

## 2. 대상기둥의 정의

그림 1은 직교좌표계  $(x, h)$ 에 그린 체적  $V$ 와 길이  $l$ 이 항상 일정한 기둥의 정면도를 나타낸다. 기둥의 양단부는 고정지점으로 지지되어 있다. 기둥의 단면은 변수가  $k$ 인 정다각형이며, 이 그림에서는  $k=5$ 인 정오각형 단면의 예를 보여주고 있다.

이 그림에서  $x$ 는 기둥의 축방향 좌표이고  $h$ 는 단면깊이다. 단면깊이  $h$ 는 정다각형의 도심에서 꼭짓점까지 거리이다. 기둥의 아래쪽 고정단인  $x=0$ 에서  $h=h_a$ 이고 위쪽 고정단인  $x=l$ 에서  $h=h_b$ 이다.

단면깊이  $h$ 는 축방향 좌표  $x$ 에 따라서 변화하기 때문에 정다각형 단면의 단면적  $A$  및 단면2차모멘트  $I$ 도  $x$ 에 따라서 변화한다.

기둥의 기하적 형상을 정의하기 위하여 단면비  $\alpha$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha = h_b/h_a \tag{1}$$

단면깊이가  $h$ 이고 변수가  $k$ 인 정다각형 단면의  $A$  및  $I$ 는 다음과 같다.

$$A = c_1 h^2 \tag{2}$$

$$I = c_2 h^4 \tag{3}$$

$$c_1 = k \sin(\pi/k) \cos(\pi/k) \tag{4a}$$

$$c_2 = (k/12) \sin(\pi/k) \cos^3(\pi/k) [3 + \tan^2(\pi/k)] \tag{4b}$$

위 식에서  $k$ 가  $\infty$ 로 수렴하면  $c_1$ 과  $c_2$ 는 각각 원형 단면의  $\pi$ 와  $\pi/4$ 로 수렴한다. 정다각형 단면에서 도심을 통과하는 축은 모두 주축이므로 모든 축이 좌굴해석에서 휨 축이 될 수 있다.

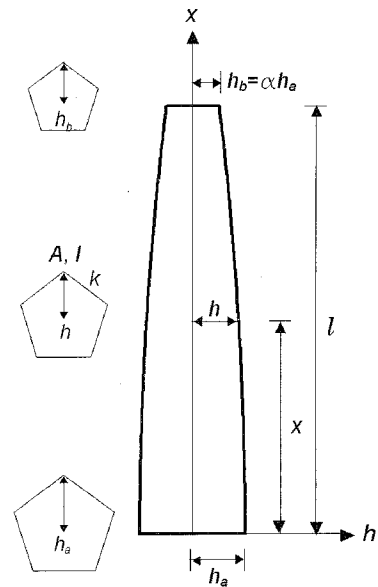


그림 1. 대상기둥의 형상 및 제변수

이제 단면깊이  $h$ 의 변화를 함수식으로 정의한다.  $h$ 의 함수식으로는 모든 함수식이 가능하지만 본 연구에서는 포물선 식으로 채택하였다. 여러 문헌에서 포물선 변단면은 직선 및 정현 변단면에 비하여 내하력 면에서 유리한 변단면임이 입증되었다(Lee 등, 2000; Lee 등, 2005; Lee 등, 2006).

그림 1에서 함수식  $h$ 는 직교좌표계  $(x, h)$ 에서  $(0, h_a)$ ,  $(l, \alpha h_a)$ 를 통과하므로 포물선 식은 다음과 같이 결정된다.

$$h = h_a [c_3(x/l)^2 + 1] \quad (5a)$$

$$c_3 = \alpha - 1 \quad (5b)$$

식 (5a)에서 변단면은  $0 \leq \alpha < 1$ 이면 convex형,  $\alpha = 1$ 이면 등단면,  $\alpha > 1$ 이면 concave형이다.

위에서 정의된 기둥의 체적  $V$ 를 식 (2), (5a) 을 이용하여 산정하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_4 h_a^2 l \quad (6a)$$

$$c_4 = (3\alpha^2 + 4\alpha + 8)/15 \quad (6b)$$

### 3. 지배미분방정식

#### 3.1 변수정의

그림 2는 압축하중  $P$ 를 받고 있는 자유진동하는 양단고정 기둥의 진동형  $y(x)$ 를 나타낸다. 점선은 정적 상태의 기둥축이며  $y(x) = 0$ 이고 실선은 자유진동하는 진동형  $y(x)$ 를 나타낸다. 진동형은 아래쪽의 고정단을 원점으로 하는 직교좌표계  $(x, y)$ 로 정의된다.

기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 변위의 조화진동 식  $\bar{y}(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$\bar{y}(x, t) = y(x) \sin(\omega_i t) \quad (7)$$

여기서  $y(x)$ 는 진동형 즉 자유진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이고,  $\omega_i$ 는 고유진동수,  $i(= 1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드 번호이고  $t$ 는 시간이다.

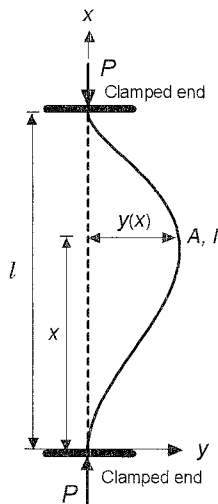


그림 2. 양단고정 기둥의 진동형

#### 3.2 지배미분방정식

식 (7)의 조화진동으로 표현되고, 압축하중을 받는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다(Lee 등, 2006).

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + 2EI \frac{dI}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + (E \frac{d^2 I}{dx^2} + P) \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho A \omega_i^2 y = 0 \quad (8)$$

위 식에서  $y = y(x)$ 이고,  $E$ 는 탄성계수,  $\rho$ 는 질량밀도이다.

식 (3)으로부터 식 (8)에 포함되어 있는  $dI/dx$ ,  $d^2 I/dx^2$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dI}{dx} = 4c_2 h^3 \frac{dh}{dx} \quad (9a)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = 12c_2 h^2 \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + 4c_2 h^3 \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (9b)$$

식 (5)로부터 식 (9a), (9b)에 포함되어 있는  $dh/dx$ ,  $d^2 h/dx^2$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2c_3 h_a}{l} \left(\frac{x}{l}\right) \quad (10a)$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{2c_3 h_a}{l^2} \quad (10b)$$

식 (6a)로부터 식 (10a), (10b)에 포함되어 있는 고정단의 단면적이  $h_a$ 를 일정체적  $V$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$h_a = \left(\frac{V}{c_1 c_4 l}\right)^{1/2} \quad (11)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (12)$$

$$\eta = y/l \quad (13)$$

$$p = Pl^4 / (EV^2) \quad (14)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho l / (EV)} \quad (15)$$

위에서  $(\xi, \eta)$ 는 직교좌표계  $(x, y)$ 를 기둥길이  $l$ 로 정규

화한 무차원량이고,  $p$ 는 무차원 하중,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 식 (8)에 포함되어 있는 미분항  $d^2y/dx^2$ ,  $d^3y/dx^3$ ,  $d^4y/dx^4$ 을 식 (12), (13)을 이용하여 다음과 같이 무차원 미분항으로 변수변환한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(l\eta)}{d(l\xi)} = \frac{d\eta}{d\xi} \tag{16a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \tag{16b}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{l^2} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} \tag{16c}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{l^3} \frac{d^4\eta}{d\xi^4} \tag{16d}$$

이제 식 (8)에  $A$ 는 식 (2)를,  $I$ ,  $dI/dx$ ,  $d^2I/dx^2$ 는 식 (3), (9a), (9b)를 대입한다. 이때  $h$ ,  $dh/dx$ ,  $d^2h/dx^2$ ,  $h_a$ 는 식 (5), (10a), (10b), (11)에 정의되어 있다.

정리된 식에  $d^2y/dx^2$ ,  $d^3y/dx^3$ ,  $d^4y/dx^4$ 으로 식 (16b) ~ (16d)를 대입하고 무차원 변수식 (12) ~ (15)를 이용하면 일정체적 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3p) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_4 C_i^2 \eta \tag{17}$$

위 식에서 계수  $a_1 \sim a_4$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -16 c_3 \xi / j \tag{18a}$$

$$a_2 = -48 c_3^2 \xi^2 / j^2 - 8 c_3 / j \tag{18b}$$

$$a_3 = -c_1^2 c_4^2 / (c_2 j^4) \tag{18c}$$

$$a_4 = c_1^2 c_4 / (c_2 j^2) \tag{18d}$$

$$j = c_3 \xi^2 + 1 \tag{18e}$$

### 3.3 경계조건

기둥의 고정단  $x=0$  및  $x=l$ 에서 변위  $y=0$ , 회전각  $dy/dx=0$ 이다. 식 (12), (13)을 이용하면 고정단  $\xi=0$ 에서 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{ 에서} \tag{19}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{ 에서} \tag{20}$$

### 4. 수치해석 예 및 토의

이상에서 유도한 지배미분방정식에 적당한 수치해석 방법을 도입하면 무차원 고유진동수  $C_i$ , 진동형  $(\xi, \eta)$ 을 산출할 수 있다. 진동형  $(\xi, \eta)$ 을 산출하기 위한 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법(Carnahan, 1969)을 이용하였고 미분방정식에 포함되어있는 고유치인  $C_i$ 를 산출하기 위해서는 Regula-Falsi법(Carnahan, 1969)을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 여러 문헌에서 그 타당성이 입증된 바 있다 (Lee 등, 2006).

수치해석 예를 실행하기 전에 수렴해석을 실시하여 Runge-Kutta법에서 필요한 적당한 단계길이  $\Delta\xi$ 를 산정하여야 한다. 그림 3에  $C_1$  ( $i=1$ )에 대한 수렴해석 결과를 나타내었다. 이 그림의 상단에 수치해석에 이용한 기둥체원을 표시하였다. 이후의 모든 그림에서도 그림의 상단에 수치해석에 이용한 기둥체원을 표시하였다.  $1/\Delta\xi$ 이 50이상이면 즉  $\Delta\xi=1/50$ 이하이면  $C_1$ 은 충분한 정도로 수렴하였다. 이 논문에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 이후의 모든 수치해는  $1/\Delta\xi=100$ 을 이용하였으며 이 경우에 수치해는 유효숫자 3자리의 정도를 갖는다.

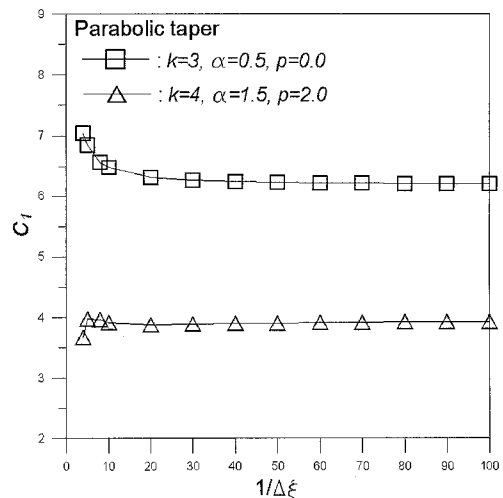


그림 3. 수렴해석

그림 4는 압축하중이 작용하지 않는 경우( $p=0$ )에 정다각형 변수( $k$ )별로 단면비  $\alpha$ 와 제1무차원 고유진동수  $C_1$  ( $i=1$ ) 사이의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림으로부터  $k$  값이 작을 수록 즉 정다각형 변수가 작을수록  $C_1$  값은 더 큰 것을 알 수

있다.  $\alpha$  값이 증가하면  $C_1$  값은 증가하며  $\circ$ 으로 표시한 곳에서 최대치를 보인 후에 감소한다. 따라서  $\circ$ 으로 표시한 좌표의  $(\alpha, C_1)$  값이 동적 최적단면의 최적단면비  $\alpha_{opt}$  및 최적고유진동수  $C_{opt}$  이다. 여기서 동적 최적단면은 일정체적을 갖는 기둥에서 가장 큰 제1고유진동수를 갖는 단면으로 정의된다 (Taylor, 1987). 이 그림 상에  $(\alpha_{opt}, C_{opt})$  값들이  $k$ 별로 표기되어 있다.  $\alpha_{opt}$  는  $k$  값에 상관없이 모두  $\alpha_{opt} = 2.516$  로 일정하다. 그러나  $C_{opt}$  값은  $k$ 별로 크게 차이가 난다. 예로서 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의  $C_{opt} = 7.362$ 이고 원형( $k=\infty$ ) 단면 기둥의  $C_{opt} = 6.695$ 이어서 그 비율은  $7.362 / 6.695 = 1.10$ 으로 정삼각형 단면 기둥이 원형 단면 기둥 보다 10% 더 크다.  $\alpha \geq 1.5$ 의 범위에서는  $C_1$  값의 변화가 완만하다.

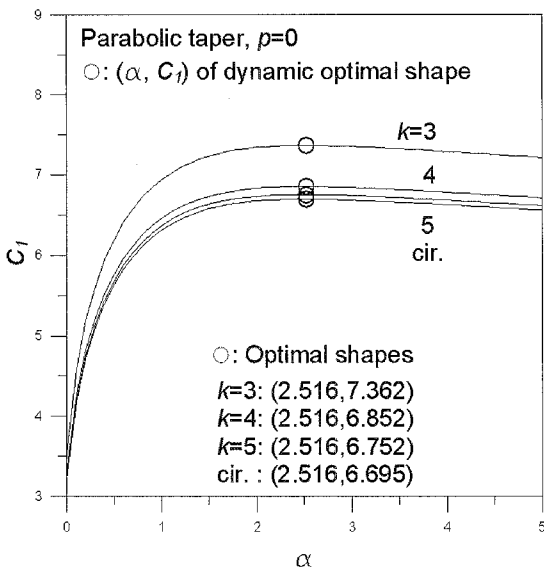


그림 4. 정삼각형 변수( $k$ )별  $\alpha - C_1$  곡선

그림 5는 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의 하중단계별( $p = 0.0, 0.5, 1.0, \dots, 3.802$ )  $\alpha - C_1$  곡선을 나타낸다. 이 그림으로부터 하중  $p$ 의 크기가 클수록 하중단계별  $\alpha - C_1$  곡선은 더 아래쪽에 위치하는 것을 알 수 있다. 즉,  $p$  값이 증가하면  $C_1$  값은 감소한다. 그림 4와 마찬가지로 하중이 작용하는 경우에도  $\alpha$  값이 증가하면  $C_1$  값은 증가하며  $\circ$ 에서 최대치를 보인 후에 감소한다. 따라서  $\circ$ 으로 표시한 좌표의  $(\alpha, C_1)$  값이 동적 최적단면 기둥의  $\alpha_{opt}$  및  $C_{opt}$  이다. 예로서 점선으로 표시되어 있는  $p=1.5$ 일 때에  $\alpha_{opt} = 1.292$ ,  $C_{opt} = 5.540$ 이다. 따라서  $p=1.5$ 의 하중이 작용할 때  $C_1$  값은 5.540이상

존재할 수 없다. 각각의 하중단계별  $\alpha - C_1$  곡선은  $\alpha$  값의 일정 범위에서 존재하는 것을 알 수 있다.  $p=1.5$ 일 때에  $\alpha - C_1$  곡선은  $\triangle$ 으로 표시한  $\alpha_{min} = 0.280$ 과  $\square$ 으로 표시한  $\alpha_{max} = 3.157$ 사이의  $\alpha$  값 범위에서 존재한다. 이 범위 밖의  $\alpha$  값을 갖는 기둥은 동적으로 불안정하고 이 범위 안의  $\alpha$  값을 갖는 기둥은 동적으로 안정하다. 따라서  $p=1.5$ 의 하중을 받는 기둥의 동적 안정영역은  $0.280 \leq \alpha \leq 3.157$ 이다.  $p$ 가 증가할수록  $\triangle$ 으로 표시한  $\alpha_{min}$  값은 커지고  $\square$ 으로 표시한  $\alpha_{max}$  값은 작아지며  $\circ$ 으로 표시한  $C_{opt}$  값은 작아진다. 즉,  $p$ 가 증가할수록 동적 안정영역의 범위는 더욱 축소되며,  $C_{opt}$  값은 더 작아진다.  $p$ 가 계속 증가하여  $p=3.802$ 가 되면  $\triangle, \square, \circ$ 은  $\blacksquare$ 으로 표시한  $(\alpha_{opt} = 1.028, C_{opt} = 0)$ 의 한 점에서 모두 만난다. 즉, 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥에서 지지할 수 있는 최대하중은 단면비  $\alpha = 1.028$ 의  $p=3.802$ 이고 이 때의 제1무차원 고유진동수  $C_1 = 0$ 이다.

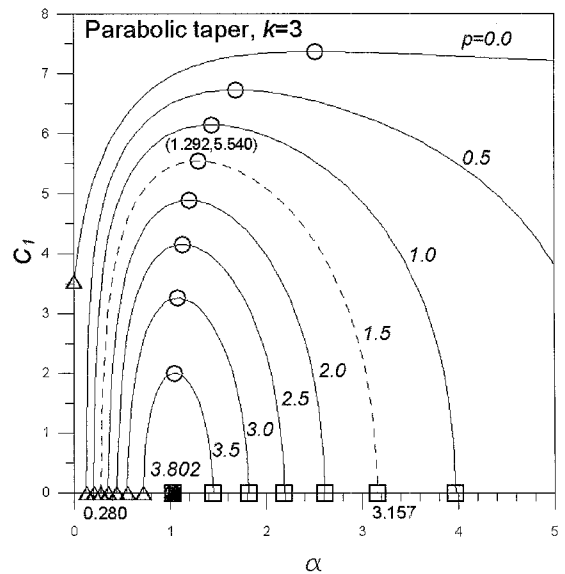


그림 5. 하중단계( $p$ )별  $\alpha - C_1$  곡선

표 1에  $k=3, 4, 5$ , 원형( $k=\infty$ ) 단면 기둥의 하중단계( $p$ )별 동적 안정영역의 최소치  $\triangle$ 값, 최대치  $\square$ 값 및  $(\alpha_{opt}, C_{opt})$  값을 수록하였다. 그림 4( $p=0$ )에서는  $k$ 값에 상관없이  $\alpha_{opt} = 2.516$ 으로 모두 같았지만 표 1에서는  $k$ 값이 변화함에 따라서 하중단계( $p$ )별  $\alpha_{opt}$ 가 변하는 것을 알 수 있다. 이 표는 동하중이 작용하는 기둥설계에서 동적 안정영역 및 동적 최적형상 결정에 매우 유용하게 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

표 1. 하중단계( $p$ )별 동적 안정영역 및 최적형상  $(\alpha_{opt}, C_{opt})$

• 정삼각형( $k=3$ ) 단면

$p$	동적 안정영역		최적형상	
	$\alpha_{\min}(\Delta)$	$\alpha_{\max}(\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	2.516	7.362
0.5	0.129	-	1.690	6.726
1.0	0.206	3.970	1.435	6.142
1.5	0.280	3.157	1.292	5.540
2.0	0.358	2.608	1.198	4.889
2.5	0.441	2.183	1.131	4.150
3.0	0.556	1.814	1.082	3.257
3.5	0.721	1.442	1.046	2.000
3.802	1.028	1.028	1.028	0.000

• 정사각형( $k=4$ ) 단면

$p$	동적 안정영역		최적형상	
	$\alpha_{\min}(\Delta)$	$\alpha_{\max}(\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	2.516	6.852
0.5	0.142	-	1.637	6.175
1.0	0.230	3.674	1.383	5.546
1.5	0.316	2.881	1.244	4.882
2.0	0.411	2.335	1.154	4.137
2.5	0.529	1.895	1.092	3.237
3.0	0.705	1.471	1.048	1.968
3.1	0.759	1.373	1.041	1.598
3.293	1.028	1.028	1.028	0.000

• 정오각형( $k=5$ ) 단면

$p$	동적 안정영역		최적형상	
	$\alpha_{\min}(\Delta)$	$\alpha_{\max}(\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	2.516	6.752
0.5	0.145	-	1.626	6.066
1.0	0.235	3.615	1.373	5.428
1.5	0.324	2.825	1.234	4.750
2.0	0.424	2.279	1.146	3.981
2.5	0.550	1.834	1.085	3.037
2.8	0.653	1.576	1.057	2.294
3.0	0.754	1.384	1.041	1.618
3.198	1.028	1.028	1.028	0.000

• 원형( $k=\infty$ ) 단면

$p$	동적 안정영역		최적형상	
	$\alpha_{\min}(\Delta)$	$\alpha_{\max}(\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	2.516	6.695
0.5	0.147	-	1.620	6.005
1.0	0.238	3.581	1.367	5.360
1.5	0.329	2.793	1.229	4.674
2.0	0.431	2.247	1.141	3.891
2.5	0.562	1.798	1.081	2.919
2.8	0.674	1.533	1.053	2.135
3.0	0.788	1.327	1.038	1.383
3.144	1.028	1.028	1.028	0.000

그림 6은  $\alpha = 0.5$ 의  $p - C_1$  곡선을 나타낸다.  $k$  값이 작을수록  $C_1$  값은 더 크고,  $p$  값이 증가하면  $C_1$  값은 감소한다. 이 그림의  $p$ 축에  $C_1 = 0$ 이 되는  $\square$ 로 표시된  $p$  값이  $b = Bl^4 / (EV^2)$ 로 정의되는 무차원 좌굴하중이다. 여기서  $B$ 는 좌굴하중이다. 예로서 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의  $b = 2.762$ 이며 따라서 정적으로  $p = 2.762$  이상의 하중을 지지할 수 없다.  $k$  값이 작을수록  $b$  값은 더 크다.

그림 7(a), (b)는 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의 진동형을 나타내며, 단면비  $\alpha$  및 무차원하중  $p$ 의 크기에 따라서 최대 진폭의 위치가 달라지는 것을 알 수 있다. 진동형의 변화는  $p$ 보다는  $\alpha$ 의 변화에 더 민감하다.

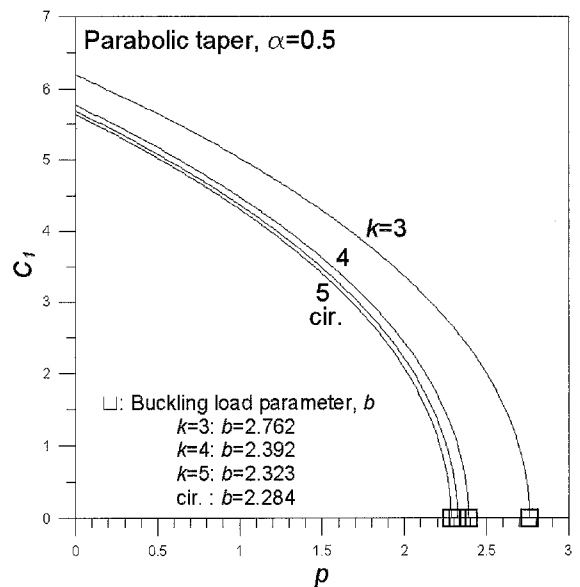


그림 6. 정다각형 변수( $k$ )별  $p - C_1$  곡선

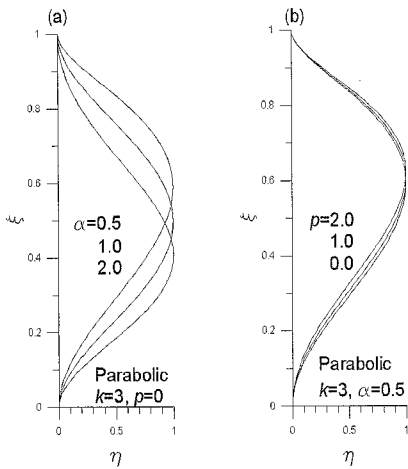


그림 7. 진동형: (a)  $\alpha$  및 (b)  $p$  별

그림 8은  $\alpha - b$  곡선을 나타낸다.  $k$  값이 작을수록  $b$  값은 더 크다. 따라서 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥이 압축하중에 대하여 가장 강인한 단면이다.  $\alpha$  값이 증가하면  $b$  값은 증가하다가 0에서 최대치를 보인 후에 감소하며, 0의 좌표 값들이 최강 기둥의  $(\alpha, b)$ 가 된다. 여기서 최강기둥은 일정체적 기둥에서 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥으로 정의된다(Taylor, 1967). 예로서 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥은  $b=3.802$ 이므로  $p=3.802$  이상의 정적 하중을 지지할 수 없고 정삼각형 단면 기둥이 가장 강인한 단면이므로 결국 일정체적 기둥은  $p=3.802$  이상의 하중을 지지할 수 없다. 이 결과는 표 1( $k=3$ )의 하단의 결과와도 일치한다.

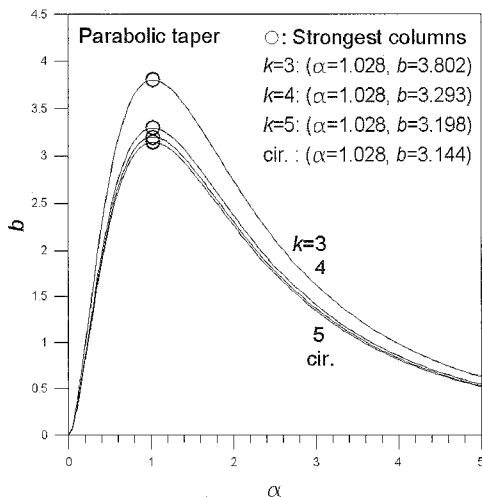


그림 8. 정다각형 변수( $k$ )별  $\alpha - b$  곡선

## 5. 결론

이 논문은 압축하중을 받는 일정체적 양단고정 기둥의 정·동적 최적형상에 관한 연구이다. 대상기둥은 체적과 길이가 일

정하고 단면이 정다각형이며, 단면깊이가 포물선 함수로 변화하는 변단면으로 채택하였다. 이러한 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 수치해를 얻기 위하여 Runge-Kutta법을 사용하여 미분방정식을 수치적분하였고, 고유치인 고유진동수는 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다. 수치해석 예를 통하여 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 수치해석에서 단계길이  $\Delta\xi$ 가 1/50이하이면 고유진동수의 수치해는 유효숫자 3자리의 정도를 갖는다.
- (2) 압축하중이 작용하지 않을 때( $p=0$ ) 동적 최적단면비  $\alpha_{opt}$ 는 정다각형의 변수  $k$ 에 상관없이 모두 같고  $\alpha_{opt}=2.516$ 이다.
- (3) 압축하중이 작용하는 경우( $p \neq 0$ )에 동적 최적단면비는 표 1에서와 같이 하중  $p$ 의 크기 및 정다각형의 변수  $k$ 에 따라서 변화한다.
- (4) 표 1과 같이 주어진 하중  $p$  및 정다각형의 변수  $k$ 에 따른 동적 안정영역과 최적형상 ( $\alpha_{opt}, C_{opt}$ )를 산정할 수 있다.
- (5) 무차원 고유진동수  $C_1 (i=1)$ 은 정다각형 변수  $k$ 가 작을수록 더 크다.
- (6) 무차원 좌굴하중  $b$ 는 정다각형 변수  $k$ 가 작을수록 더 크다.
- (7) 정적 최강기둥의 형상은 정삼각형( $k=3$ ) 단면의  $\alpha=1.028, b=3.802$ 이다.

이 연구의 결과는 동하중이 작용하는 기둥설계에서 동적 안정영역 및 동적 최적형상의 결정과 정하중이 작용하는 기둥설계에서 최강기둥의 형상 결정에 매우 유용하게 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 감사의 글

심사과정에서 원고의 오기를 지적하여주신 심사위원께 감사드립니다.

## 참고 문헌

- 문지호, 윤기용, 조영래, 이학은 (2006) 고정지점 포물선 아치의 면내 좌굴강도, 한국강구조학회 논문집, 제18권, 제3호, pp.301 ~ 310.
- 이병구, 김석기 (2006) 일정체적 단순지지 변단면 기둥의 정·동적 안정해석, 대한토목학회 논문집, 제26권, 제3A호, pp. 533 ~ 538.

- 이병구, 오상진, 이태은, 강희중 (2005) 자유단 집중질량 및 스프링을 갖는 변단면 Beck 기둥의 안정해석, *대한토목학회논문집*, 제25권, 제6A호, pp. 1157 ~ 1162.
- 윤기용, 강영중 (1998) 유한요소법을 이용한 수평곡선 I형교의 자유진동해석, *한국강구조학회 논문집*, 제10권, 제1호, pp. 47 ~ 61.
- 정진섭, 이병구, 김권식, 김종용 (2005) 자유단 집중질량을 갖는 변단면 캔틸레버 기둥의 임계하중, *한국강구조학회 논문집*, 제17권, 제6호, pp. 699 ~ 706.
- Bokaian, A. (1988) Natural frequencies of beams under compressive axial load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49 ~ 65.
- Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O. (1969) Applied numerical method, *John Wiley & Sons*, USA.
- Haftka, R.T., Grudal, Z. and Kamat, M.P. (1990) Element of structural optimization, *Klüver Academic Publisher*.
- Kamat, M.P. and Simites, G.J. (1973) Optimal beam frequencies by the finite element displacement method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 9, pp. 415 ~ 419.
- Kamat, M.P. and Simites, G.J. (1975) Effect of shear deformation and rotatory inertia on optimal beam frequencies, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 51 ~ 62.
- Kupta, A.K. (1985) Vibration of tapered beam, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, pp. 1244 ~ 1247.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E. and Ahn, D.S. (2005) Elasticas and buckling loads of shear deformable tapered columns, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 317 ~ 335.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E. and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, pp. 381 ~ 387.
- Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elasticas and buckling loads of simple tapered columns with constant volume, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2507 ~ 2518.
- Niordson, F.I. (1965) On the optimal design of a vibrating beam, *Quarterly Applied Mechanics*, Vol. 23, pp. 47 ~ 53.
- Pedersen, P. (1977) Inference of boundary conditions on the stability of a column under the non-conservative load, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 445 ~ 455.
- Sato, K. (1996) Instability of a clamped-elastically restrained Timoshenko columns carrying a tip load subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, pp. 623 ~ 630.
- Taylor, J.E. (1987) The strongest column - An energy approach, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 29, pp. 159 ~ 164.
- (접수일자 : 2006. 9. 8 / 심사일 2006. 10. 13 / 심사완료일 2007. 1. 22)