

< 논문 >

# 미분변환법을 이용한 회전외팔보의 자유진동해석

신영재<sup>†</sup> · 지영철\* · 윤종학\*\* · 유영찬\*\*\*  
(2006년 8월 16일 접수, 2007년 2월 16일 심사완료)

## Free Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam by Using Differential Transformation Method

Young-Jae Sin, Young-Chel Jy, Jong-Hak Yun and Yeong-Chan Yoo

**Key Words :** Rotating Cantilever Beam(회전외팔보), Differential Transformation Method(미분변환법), Chordwise Motion(면내방향운동), Flapwise Motion(면외방향운동)

### Abstract

Rotating cantilever beams can be found in several practical engineering applications such as turbine blades and helicopter rotor blades. For reliable and economic design, it is necessary to estimate the dynamic characteristics of those structures accurately and efficiently since significant variation of dynamic characteristics resulted from rotational motion of the structures. Recently, Differential Transformation Method (DTM) was proposed by Zhou. This method has been applied to fluid dynamics and vibration problems, and has shown accuracy, efficiency and convenience in solving differential equations. The purpose of this study, the free vibration analysis of a rotating cantilever beam, is to seek for the reliable property of DTM and confidence in the results obtained by this method by comparing the results with that of finite element method applied to linear partial differential equations. In particular, this study is worked by supposing optional T-function values because the equations governing chordwise motion are based on two differential equations coupled with each other. This study also shows mode shapes of rotating cantilever beams for various rotating speeds.

### 1. 서론

회전외팔보는 헬리콥터의 회전익, 터빈 블레이드, 비행기 회전날개와 같은 실용적인 분야에 바로 응용될 수 있기 때문에 이들의 작동 성능을 파악하기 위해서는 회전외팔보의 동적 특성을 파

악해야 한다. 회전외팔보의 동적 특성은 회전운동으로 원심력이 발생되어 외팔보의 강성변화에 의한 고유진동 특성이 변화 된다. 따라서 회전외팔보의 진동 특성 변화를 예측해서 제어하기 위한 이론적 정립이 필요하게 된다.

회전외팔보의 진동특성관련 연구를 살펴보면 1920년대 초 영국의 학자 Southwell 과 Gough 에 의해서 제안되었고, Rayleigh 의 에너지정리에 기초하여 보의 회전 진동수에 대해서 고유진동수에 관련한 방정식인 Southwell 방정식이 제안되었으며<sup>(1)</sup> 정확한 고유진동수를 얻기 위해 Schilhans 는 회전외팔보의 굽힘진동을 지배하는 선형 편미분 방정식을 유도하였다.<sup>(2)</sup>

† 책임저자, 회원, 안동대학교 기계공학부  
E-mail : yjshin@andong.ac.kr  
TEL : (054)820-5435 FAX : (054)823-1630

\* 안동대학교 대학원

\*\* 안동대학교

\*\*\* 안동대학교 건축공학부

1950년대에는 헬리콥터의 블레이드 진동에 관한 연구가 활발해지면서 기존의 연구와는 달리 운동을 지배하는 편미분방정식을 직접 유도하고, Ritz 방법을 통해 Southwell 방정식의 상수값을 구하는 연구가 진행되었다.<sup>(3,4)</sup>

1960년대와 70년대를 거치며 전산기의 눈부신 발전과 이에 따른 수치해석법의 발전에 따라 종래의 해석적 방법에서 벗어나 수치적인 방법으로 문제의 해결에 접근하려는 연구결과들이<sup>(5-7)</sup> 나타나게 되었다. 이러한 연구들은 근본적으로 회전에 의한 원심력을 구한 후 이를 보의 비선형 변위률에 근거한 탄성에너지 형태를 정방형행렬화하여 강성항을 구하는 방법을 사용하고 있다.

2000년대에 와서는 Chung 등은 유연한 보의 동역학적 해석에 대한 기존의 고전적 선형 모델링법의 문제를 극복하기 위해서 새로운 모델링법에 기초한 허용함수를 사용할 수 있는 유한요소법(Finite Element Method)을 개발해서 회전의팔보의 진동특성을 연구하였다.<sup>(8)</sup> 이 연구는 기존의 고전적 선형모델링법의 문제점인 회전에 따른 오차와 비선형 요소에 따른 막대한 계산 시간을 효율적으로 개선한 것으로 새로운 모델링법에 기초해서 유도된 선형 편미분한 허용함수인 인장변위를 사용했다.

지금까지 많은 수치해석법이 제안되고 개량 발전되어 왔으며, 그 중에서 미분방정식을 간단한 수식관계로 표현해서 사용할 수 있는 방법 중 하나가 미분변환법(Differential Transformation Method)이다. 이 수치해석법은 1986년 Zhou가 전기회로에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해 처음 사용하였으며,<sup>(9)</sup> Chen과 Ho는 진동문제에 미분변환법을 처음 적용하였다.<sup>(10)</sup> 그리고 Malik와 Dang는 미분변환법을 적용한 연속시스템에서 진동을 해석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였다.<sup>(11)</sup> 이와 같이 미분변환법은 많은 연구자들에 의해 활발히 연구되고 있으며 다양한 공학 분야에 적용되고 있다.<sup>(12,13)</sup>

본 연구의 목적은 회전의팔보의 자유진동 해석에 있어서, 기존의 유한요소법에 이용된 선형 편미분방정식에 미분변환법을 적용하여, 얻은 해를 서로 비교해 미분변환법의 적용 타당성과 해의 신뢰성을 얻는데 있다. 특히 회전의팔보의 면내방향 운동을 지배하는 방정식은 2개의 미분방정식이 서로 연성되어 있어 임의의 T-function 값을 가정하여 수치해석을 수행하였다.

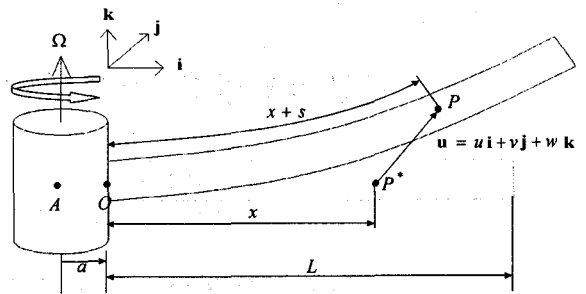


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

## 2. 지배방정식

Fig. 1은 회전의팔보를 나타내며, 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \rho A \Omega^2 (a+x) \\ \rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v - \dot{\Omega} s \right) + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ &- \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right\} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2) \\ &= p_v - \rho A \dot{\Omega} (a+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \left\{ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right\} \frac{\partial w}{\partial x} = p_w \quad (3) \end{aligned}$$

여기서  $p_v$ 와  $p_w$ 는  $y$ 와  $z$  방향의 단위길이 당 작용력이고, 식 (1)과 식 (2)는 서로 연성되어 있지만, 식 (3)은 연성되어 있지 않다. 상기의 회전의팔보의 운동방정식 중 식 (1)과 식 (2)로 묘사되는 운동이 면내방향 운동이고 식 (3)으로 묘사되는 운동이 면외방향 운동이다.

회전의팔보의 면내방향과 면외방향 운동방정식에 상응하는 경계조건들은 다음과 같다.

$$\text{at } x=0 \quad s=v=w=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad (4)$$

$$\text{at } x=L \quad \frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (5)$$

본 연구에서는 앞에서 얻은 3개의 선형 편미분 방정식의 일반해를 각각

$$s(x, t) = s(x)e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$v(x, t) = v(x)e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$w(x, t) = w(x)e^{i\omega t} \quad (8)$$

로 가정하고, 각가속도  $\dot{\Omega} = 0$ , 외력인  $\rho A \Omega^2(a+x) = 0$  과  $p_v = 0$  으로 하여, 회전외팔보의 운동방정식 식 (1)~(3)에 적용하면,

$$EA \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + \rho A (\omega^2 s(x) + 2\Omega i \omega v(x) + \Omega^2 s(x)) = 0 \quad (9)$$

$$EI_z \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \rho A \Omega^2 \left( aL - ax + \frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \rho A \Omega^2 (a+x) \frac{dv(x)}{dx} + \rho A (-1)\omega^2 v(x) + \rho A (+2\Omega i \omega s(x) - \Omega^2 v(x)) = 0 \quad (10)$$

$$EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \rho A \Omega^2 \left( aL - ax + \frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \rho A \Omega^2 (a+x) \frac{dw(x)}{dx} - \rho A \omega^2 w(x) = 0 \quad (11)$$

와 같은 상미분 방정식을 구할 수 있다.

회전외팔보의 운동방정식에 사용할 무차원 변수를 각각  $I_z = I_y$ ,  $\zeta = \frac{x}{L}$ ,  $\varepsilon = \frac{a}{L}$ ,  $\gamma = T\Omega$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I_z}}$ ,  $\lambda = T^2\Omega$ ,  $\beta = \omega T$  로 정의하며,

$$T = \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI_z}} \text{ 이다.}$$

각 무차원 변수를 간략하게 설명하면  $\xi$ 는 변위  $x$ 의 무차원 변수,  $\varepsilon$ 는 강체축 반지름의 무차원 변수,  $\gamma$ 는 회전속도의 무차원 변수,  $\alpha$ 는 세장비로써 보의 가늘고 긴 정도를 나타내는 무차원 변수,  $\lambda$ 는 회전가속도의 무차원 변수,  $T$ 는 회전외팔보의 굽힘강성, 무차원 변수이고  $\beta$ 는 고유진동수의 무차원 변수이다.

면내방향과 면외방향의 운동방정식 식 (9)~(11)에 무차원 변수를 사용하여 정리하면,

$$\alpha^2 \frac{d^2 s(\zeta)}{d\zeta^2} + (\beta^2 s(\zeta) + \gamma^2 s(\zeta) + 2i\beta\gamma v(\zeta)) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d^4 v(\zeta)}{d\zeta^4} - \gamma^2 \left( \varepsilon - \varepsilon\zeta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) \frac{d^2 v(\zeta)}{d\zeta^2} + \gamma^2 (\varepsilon + \zeta) \frac{dv(\zeta)}{d\zeta} - (\gamma^2 + \beta^2) v(\zeta) + 2i\beta\gamma s(\zeta) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^4 w(\zeta)}{d\zeta^4} - \gamma^2 \left( \varepsilon - \varepsilon\zeta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) \frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} + \gamma^2 (\varepsilon + \zeta) \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} - \beta^2 w(\zeta) = 0 \quad (14)$$

와 같은 무차원 운동방정식을 얻을 수 있다.

면내방향과 면외방향 운동방정식의 경계조건식 (4)와 (5)는 무차원 변수를 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$\text{at } \zeta = 0 \quad s = v = w = \frac{dv}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta} = 0 \quad (15)$$

$$\text{at } \zeta = 1 \quad \frac{ds}{d\zeta} = \frac{d^2 v}{d\zeta^2} = \frac{d^3 v}{d\zeta^3} = \frac{d^2 w}{d\zeta^2} = \frac{d^3 w}{d\zeta^3} \quad (16)$$

### 3. 미분변환법

미분변환법은 수치해석법의 하나로써, Zhou 가 1986 에 처음으로 제안한 것으로 테일러 시리즈 (Taylor series expansion)에 기본을 두고 있다.

이 방법은 선형과 비선형의 공학문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환관계에 의해서 해를 구할 수 있으며, 해의 정확도가 대단히 높은 수치해석 기법이다.

임의의 원함수(original function)에 대한 미분변환은 다음과 같이 정의 된다

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (17)$$

여기서  $Y(k)$ 을 T-function 이라 하고,  $Y(k)$ 의 미분역변환은 아래와 같이 정의 된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (18)$$

여기서 미분변환의 정의 식 (17)를 미분역변환식 (18)에 대입하면 원함수  $y(x)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (19)$$

식 (19)에서 미분변환은 테일러 시리즈로부터 유래되었다는 것을 알 수 있으며, 위의 정의로부터 참고문헌<sup>(12,13)</sup>과 같은 미분변환법에 관한 기본적인 연산을 구할 수 있다.

실제의 적용에 있어서는  $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려하여 나타내면,

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (20)$$

와 같으며, 여기서  $n$ 은 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정된다.

#### 4. 미분변환법 적용

앞장에서 유도된 회전외팔보의 무차원 운동방정식 식 (12) ~ (14)에 참고문헌<sup>(12)</sup>에서 정의된 미분변환법의 기본 연산을 적용하면 미분변환된 3개의 식을 얻을 수 있다.

##### 4.1 면내방향 운동방정식

참고문헌<sup>(12)</sup>에 나타나있는 미분변환법의 기본 연산을 이용하여 면내방향 무차원 운동방정식 식 (12)와 식 (13)에 미분변환법을 적용하면,

$$\alpha^2(k+1)(k+2)\bar{S}(k+2) + \beta^2\bar{S}(k) + \gamma^2\bar{S}(k) + 2\beta\gamma\bar{V}(k) = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{V}(k+4) \\ &- \gamma^2\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)(k+1)(k+2)\bar{V}(k+2) \\ &+ \gamma^2\varepsilon\delta(l-1)(k+1-l)(k+2-l)\bar{V}(k+2-l) \\ &+ \gamma^2\frac{1}{2}\delta(l-2)(k+1-l)(k+2-l)\bar{V}(k+2-l) \\ &+ \gamma^2\varepsilon(k+1)\bar{V}(k+1) \\ &+ \gamma^2\delta(l-1)(k+1-l)\bar{V}(k+1-l) \\ &- (\gamma^2 + \beta^2)\bar{V}(k) + 2\beta\gamma\bar{S}(k) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

와 같다.

식 (21)과 식 (22)를 정리 하면,

$$\alpha^2(k+1)(k+2)\bar{S}(k+2) + \beta^2\bar{S}(k) + \gamma^2\bar{S}(k) + 2\beta\gamma\bar{V}(k) = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{V}(k+4) \\ &- \gamma^2\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)(k+1)(k+2)\bar{V}(k+2) \\ &+ \gamma^2\varepsilon(k+1)^2\bar{V}(k+1) \\ &+ \left\{ \gamma^2k + \gamma^2\frac{1}{2}(k-1)k - (\gamma^2 + \beta^2) \right\} \bar{V}(k) \\ &+ 2\beta\gamma\bar{S}(k) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

##### 4.2 면외방향 운동방정식

면외방향 운동방정식은 단일 함수로 이루어져 있으며, 미분변환을 하면,

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{W}(k+4) \\ &- \gamma^2\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)(k+1)(k+2)\bar{W}(k+2) \\ &+ \gamma^2\varepsilon\delta(l-1)(k+1-l)(k+2-l)\bar{W}(k+2-l) \\ &+ \gamma^2\frac{1}{2}\delta(l-2)(k+1-l)(k+2-l)\bar{W}(k+2-l) \\ &+ \gamma^2\varepsilon(k+1)\bar{W}(k+1) \\ &+ \gamma^2\delta(l-1)(k+1-l)\bar{W}(k+1-l) \\ &- \beta^2\bar{W}(k) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

와 같이 나타낼 수 있으며, 식 (25)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{W}(k+4) \\ &- \gamma^2\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)(k+1)(k+2)\bar{W}(k+2) \\ &+ \gamma^2\varepsilon\{k(k+1) + (k+1)\}\bar{W}(k+1) \\ &+ \gamma^2\left\{k + \frac{1}{2}(k-1)\right\}\bar{W}(k) - \beta^2\bar{W}(k) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

##### 4.3 경계조건

회전외팔보의 수치해석에 사용된 경계조건은 고정-자유단으로 일반적인 외팔보의 경계조건과 같으며, 회전외팔보의 고정단( $\zeta=0$ ) 점에서의 미분변환된 경계조건은 다음과 같다.

$$s(0) = \bar{S}(0) = 0, \quad (27)$$

$$v(0) = \bar{V}(0) = 0, \quad v'(0) = \bar{V}(1) = 0, \quad (28)$$

$$w(0) = \bar{W}(0) = 0, \quad w'(0) = \bar{W}(1) = 0 \quad (29)$$

회전외팔보의 끝단( $\zeta=1$ )에서의 미분변환된 경계조건은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$s'(1) = \sum_{k=0}^n k(1)^{(k-1)}\bar{S}(k) = 0, \quad (30)$$

$$v''(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1)(1)^{(k-2)}\bar{V}(k) = 0, \quad (31)$$

$$v'''(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2)(1)^{(k-3)}\bar{V}(k) = 0 \quad (32)$$

$$w''(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1)(1)^{(k-2)}\bar{W}(k) = 0, \quad (33)$$

$$w''(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2)(1)^{(k-3)} \bar{W}(k) = 0 \quad (34)$$

### 5. 수치해석 고찰 및 결과

회전의팔보의 자유진동을 수치해석하기 위해서 미분변환된 회전의팔보의 면내방향 운동방정식 식 (23), 식 (24)와 면외방향 운동방정식 식 (26), 그리고 이에 상응하는 경계조건 식 (27)~(34)를 사용해서, 면내방향과 면외방향의 결과를 고찰하였다.

#### 5.1 면내방향

면내 방향의 운동방정식은 두개의 미분방정식이 서로 연성되어 있어 문제를 해결하기 위해서  $\bar{S}(n)$  와  $\bar{V}(n)$  의 값을 각각 구해서 무차원 고유진동수를 구하여야 한다.

수치해석을 위하여 회전의팔보의 끝단에서의 경계조건식 식 (30)~(34)으로부터 T-function 값을 구하여야 하지만, 2 개의 미분방정식이 서로 연성되어 있는 관계로 T-function 값을 쉽게 구할 수가 없다. 이를 해결하기 위하여 해당 경계조건식의 수에 상응하는 것만큼 T-function 값이 0 이 아닌 세개의 임의의 값을  $\bar{S}(1) = c_1$ ,  $\bar{V}(2) = c_2$ ,  $\bar{V}(3) = c_3$  라고 가정 하였다. 이는 해가 자명해(trivial solution)를 가지지 않을 조건과 같다.

임의의 정수  $k$  까지 T-function 값을 얻기 위해서 유도된 면내방향 운동방정식인 식 (23)과 식 (24)은 다음과 같은 형태로 다시 나타낼 수 있다.

$$\bar{S}(k+2) = -\frac{(\beta^2 + \gamma^2)\bar{S}(k) + 2\beta\gamma\bar{V}(k)}{\alpha^2(k+1)(k+2)} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(k+4) &= \frac{\gamma^2(k+1)(k+2)\bar{V}(k+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma^2\varepsilon(k+1)^2\bar{V}(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \\ &\quad - \frac{\bar{V}(k)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \quad (36) \\ &\quad - \frac{\left( \gamma^2 \frac{1}{2}(k-1)k + \gamma^2k - \beta^2 - \gamma^2 \right)}{2\beta\gamma\bar{S}(k)} \\ &\quad - \frac{2\beta\gamma\bar{S}(k)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \end{aligned}$$

식 (35)와 식 (36)에 의해서  $\bar{S}(0), \bar{S}(1), \dots, \bar{S}(k)$

과  $\bar{V}(0), \bar{V}(1), \dots, \bar{V}(k)$  의 T-function 값을 구해서 경계조건인 식 (30)~(32)를 만족시키는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3 = 0 \quad (37)$$

$$B_1c_1 + B_2c_2 + B_3c_3 = 0 \quad (38)$$

$$D_1c_1 + D_2c_2 + D_3c_3 = 0 \quad (39)$$

식 (37)~(39)를 행렬로 표현하면 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

0 이 아닌  $c_1, c_2, c_3$  를 구하기 위해서

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

와 같은 행렬식 식 (41)이 만족하여야 하며, 이때 식 (41)을 면내방향의 무차원 고유진동수식 (Natural frequency equation) 이라 한다.

회전의팔보의 면내방향의 진동을 해석하기 위하여 외팔보의 경계조건인 고정단-자유단인 경우에 대하여 미분변환법을 이용한 수치해석을 수행하였다.

Table 1 은 회전의팔보의 면내운동에 관한 것으로 무차원 강체축 반지름  $\varepsilon$  과 무차원 회전속도  $\gamma$  가 0 이고, 세장비  $\alpha$  가 70 일 때의 굽힘모드와 인장모드에 대한 고유진동수의 수렴특성을 유한요소법과 비교하여 나타내었다. 유한요소법의 경우 요소수가 증가함에 따라 엄밀해로 수렴하고 미분변환법의 경우 역시 차수  $k$  가 증가함에 따라 엄밀해로 수렴함을 알 수 있으며 유한요소법과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

Table 2 는 무차원 강체축 반지름  $\varepsilon$  와 무차원 회전속도  $\gamma$  의 값의 변화에 따른 수렴된 1, 2 차 고유진동수를 나타냈다. 무차원 강체축 반지름이 증가할수록 1, 2 차 고유진동수가 증가함을 알 수 있으며, 또한 무차원 속도비가 증가하여도 고유진동수가 증가함을 알 수 있다. 표에서 xx.xxxx 로 표현된 것은 수렴된 값을 얻지 못한 경우로써, 앞으로 계속 연구가 수행되어야 한다. 이 표를 만들

**Table 1** Comparison of the dimensionless natural frequencies of the chordwise motion for  $\varepsilon = \gamma = 0$  and  $\alpha = 70$

		FEM (5)	FEM (100)	DTM (14)	DTM (40)
Bending modes	1st	3.5161	3.1560	3.5160	3.1560
	2nd	22.0455	22.0345	25.2253	22.0345
	3rd	61.9188	61.6972	27.4229	61.6972
	4th	122.3197	120.9019	xx.xxxx	120.9019
Stretching modes	1st	110.4085	109.9557	109.9557	109.9557
	2nd	493.2637	329.8672	328.0562	329.8672

**Table 2** The first and second dimensionless natural frequencies of the chordwise motion

$\varepsilon$	$\gamma$	1st	2nd
0	1	3.5427	22.1578
	2	3.6196	22.5238
	3	3.7383	23.1209
	4	3.8881	23.9314
1	1	3.7575	xx.xxxx
	2	4.3978	23.2777
	3	5.2830	24.7406
	4	xx.xxxx	xx.xxxx
2	1	3.9604	xx.xxxx
	2	5.0558	24.0069
	3	xx.xxxx	xx.xxxx
	4	xx.xxxx	xx.xxxx
3	1	4.1533	22.7351
	2	xx.xxxx	xx.xxxx
	3	xx.xxxx	xx.xxxx
	4	xx.xxxx	xx.xxxx

면서 무차원 속도가 증가할 때 계산시간이 많이 소요되는 현상이 나타났으며, 이 또한 추가로 계속 연구되어야 할 부분이라 할 수 있다.

5.2 면외방향

미분변환된 회전외팔보의 면내방향 운동방정식 (26)과 경계조건식 식 (29), 식 (33)과 식 (34)를 이용하여 아래와 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W}(0) \\ \bar{W}(1) \\ \vdots \\ \bar{W}(k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

상기 식 (42)의 해인  $\bar{W}(0), \bar{W}(1), \dots, \bar{W}(k)$  가 0 이 아닌 값을 가지기 위해서는 식 (42)의 행렬식이 0 이 되어야 한다.

**Table 3** The dimensionless natural frequencies of the flapwise motion for  $\varepsilon = 0$  and  $\alpha = 70$

$\gamma$		1st	2nd	3rd
0	DTM	3.5160	22.0345	61.6972
	FEM	3.5160	22.0345	xx.xxxx
1	DTM	3.6816	22.1810	61.8418
	FEM	3.6816	22.1810	xx.xxxx
2	DTM	4.1373	22.6149	62.2732
	FEM	4.1373	22.6149	xx.xxxx
3	DTM	4.7973	23.3203	62.9850
	FEM	4.7973	23.3203	xx.xxxx
4	DTM	5.5850	24.2733	63.9668
	FEM	5.5850	24.2733	xx.xxxx
5	DTM	6.4495	25.4461	65.2050
	FEM	6.4495	25.4461	xx.xxxx
6	DTM	7.3604	26.8091	66.6839
	FEM	7.3604	26.8091	xx.xxxx
7	DTM	8.2996	28.3341	68.3860
	FEM	8.2996	28.3341	xx.xxxx
8	DTM	9.2568	29.9954	70.2930
	FEM	9.2568	29.9954	xx.xxxx
9	DTM	10.2257	31.7705	72.3867
	FEM	10.2257	31.7705	xx.xxxx
10	DTM	11.2023	33.6404	74.6493
	FEM	11.2023	33.6404	xx.xxxx

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (43)$$

고유진동수 방정식인 상기의 식 (43)으로부터 면외방향의 무차원 고유진동수를 구할 수 있다.

회전외팔보의 면외방향의 진동을 해석하기 위하여 외팔보의 경계조건인 고정단-자유단인 경우에 대하여 미분변환법을 이용한 수치해석을 수행하였다.

Table 3 에는 무차원 강체축 반지름  $\varepsilon$  가 0 이고 무차원 회전속도  $\gamma$  가 0 에서 10 까지 변화할 때 구한 1, 2, 3 차 고유진동수를 유한요소법과 비교한 것으로 그 결과가 정확히 일치함을 알 수 있다. 무차원 속도가 증가함에 따라 1, 2, 3 차 고유진동수가 증가함을 알 수 있었고, 유한요소법의 경우 3 차 고유진동수를 xx.xxxx 로 표현한 것은 참고문헌에 그 값이 제시되지 않았다.

## 6. 결 론

본 연구는 회전외팔보에 미분변환법이라는 수치 해석 기법을 적용하여 진동특성을 분석 및 고찰 하였다.

기존의 미분변환법은 단일 함수로 이루어진 지배방정식을 사용해서 그 모델의 진동특성을 다른 수치해석 기법과 비교하여 미분변환법의 신뢰성 및 유용성을 검증하였으나, 본 연구에서는 서로 연성관계에 있는 연립 미분방정식에 미분변환법을 적용하여 기존 연구인 유한요소법과 그 해를 비교하여 미분변환법의 적용 가능성과 해의 신뢰성을 확보하였다.

미분변환법을 적용한 회전외팔보의 자유진동에 대한 수치해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 회전외팔보의 진동특성을 해석하는 것에 있어서 유한요소법으로 얻은 해와 비교하여 미분변환법의 적용의 타당성과 해의 신뢰성을 확인했다.

(2) 연립미분방정식으로 이루어진 면내방향 운동을 미분변환법을 이용한 수치해석을 통하여 확보된 해의 신뢰성을 바탕으로 타 모델에 적용할 수 있다.

## 감사의 글

이 논문은 2006 년도 안동대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C Reports and Memoranda, No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 25, 28-30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1980, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *Journal of Sound and Vibration*, 56, 175-185.
- (4) Bauer, H., 1980, "Vibration of a Rotating Uniform Beam," *Journal of Sound and Vibration*, 72, 177-189.
- (5) Hoa, S., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass," *Journal of Sound and Vibration*, 67, 369-381.
- (6) Wright, A., Smith, C., Thresher, R. and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 49, 197-202.
- (7) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, 105(2), 199-210.
- (8) Chung, J. and Yoo, H. H., 2002, "Dynamic Analysis of a Rotating Cantilever Beam by Using the Finite Element Method," *Journal of Sound and Vibration*, 249(1), 147-164.
- (9) Zhou, J. K., 1986, "Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits," Wuhan China:Huazhong University Press.
- (10) Chen, C. K. and Ho, S. H., 1996, "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problem," *Journal Applied Mathematics and Computation*, 79, 173-188.
- (11) Moinuddin Malik and Dang, H. 1998, "Vibration analysis of continuous systems by differential transformation," *Applied Mathematics and Computation*, 96, 17-26.
- (12) Shin, Y. J. and Yun, J. H., 2006, "Transverse Vibration of a Uniform Euler-Bernoulli Beam Under Varying Axial Force Using Differential Transformation Method," *Journal of Mechanical Science and Technology (KSME Int. J.)*, 20(2), pp. 191-196.
- (13) Shin, Y. J., Jaun, S. J., Yun, J. H., Dioryan, N. M., Hwang, K. S. and Jy, Y. C., 2004, "Vibration Analysis for the Circular Plates by Using the Differential Transformation Method," *Eleventh International Congress on Sound and Vibration*, pp. 3723-3732.