

〈 논문 〉

직교이방성 평판의 Green 함수에 대한 새로운 해

양 경 진* · 강 기 주†

(2006년 10월 17일 접수, 2007년 1월 25일 심사완료)

A Solution for Green's Function of Orthotropic Plate

Kyeong-Jin Yang and Ki-Ju Kang

Key Words : Green's Function(그린함수), Stroh Formalism(스트로 해석법), Orthotropic Kirchhoff Plate(직교이방성 키르호프 평판)

Abstract

Revisited in this paper are Green's functions for unit concentrated forces in an infinite orthotropic Kirchhoff plate. Instead of obtaining Green's functions expressed in explicit forms in terms of Barnett-Lothe tensors and their associated tensors in cylindrical or dual coordinates systems, presented here are Green's functions expressed in two quasi-harmonic functions in a Cartesian coordinates system. These functions could be applied to thin plate problems regardless of whether the plate is homogeneous or inhomogeneous in the thickness direction. With a composite variable defined as $z = x_1 + ipx_2$ which is adopted under the necessity of expressing the Green's functions in terms of two quasi-harmonic functions in a Cartesian coordinates system, Stroh-like formalism for orthotropic Kirchhoff plates is evolved. Using some identities of logarithmic and arctangent functions given in this paper, the Green's functions are presented in terms of two quasi-harmonic functions. These forms of Green's functions are favorable to obtain the Newtonian potentials associated with defect problems. Thus, the defects in the orthotropic plate may be easily analyzed by way of the Green's function method.

1. 서 론

Eshelby⁽¹⁾가 2차원의 이방성 재료에 대한 탄성해를 얻는 방법을 제안한 이래로 Stroh^(2,3)가 그 결과를 확장하여 수학적인 형식주의에 입각한 복소해석법(complex formalism)을 완성하였다. Stroh의 해석법이 제안되어 많은 이방성 재료의 탄성 문제들이 해석적으로 연구되었는데 대표적인 예로는 균열 및 타원형 정공을 갖는 이방성 재료의 탄성장, 집중하중이 가해지는 이방성 재료의 표면 파동전파에 관한 탄성해석 등을 들 수 있다.⁽⁴⁾

최근에 Cheng and Reddy⁽⁵⁾에 의해 이방성 키르호프 평판을 해석 할 수 있는 해석법이 개발되어 이방성 평판에 대한 탄성장 연구가 활발하게 진행되고 있다. 기존의 이방성 평판에 대한 이론적인 해석 문제들은 주로 시리즈 전개를 통하여 해석되었는데 이 방법이 제안된 이후로 다양한 이방성 평판 문제들에 대한 해가 양함수 형태(explicit form)로 얻어지게 되었다. 또한 Cheng and Reddy⁽⁵⁾는 Stroh가 제안한 해석법에서 도출된 여러 가지 중요한 항등식(identities)이 이방성 평판의 해석법에도 여전히 타당함을 보인 바 있다.

Kelvin⁽⁶⁾이 등방성 재료에 대한 그린함수의 해를 제안한 이래로 2차원의 등방성 매질(medium)부터 이방성 매질에 이르기까지 그린 함수를 얻고자 하는 많은 노력들이 있었다.^(4,7) 그러나 아직까지 3차원의 이방성 매질에 대한 그린 함수의 양함수 형

† 책임저자, 회원, 전남대학교

E-mail : kjkang@chonnam.ac.kr

TEL : (062)530-1668 FAX : (062)530-1689

* 회원, 한국원자력연구소

태의 해는 얻어지지 못하고 있다. 평판 이론을 사용한 그린 함수에 대한 연구로는 Cheng and Reddy⁽⁸⁻¹⁰⁾와 Hwu et al.^(11,12)에 의해 주로 연구되었다. Cheng and Reddy⁽⁸⁻¹¹⁾은 자신들이 개발한 이방성 평판에 대한 해석법⁽⁵⁾을 여러 가지 기하학적 조건 및 하중 조건에서의 그린 함수를 얻는데 사용하였다. 그들이 얻은 그린 함수는 이중 좌표계(dual coordinates)에서 양함수 형태로 주어진다. 그러나 그 결과를 개재물이나 균열 등의 결함을 해석하기 위해 적용하고자 할 때에는 포텐셜 함수를 이론적으로 계산하는 것에 한계를 갖는다. 본 논문에서는 이러한 한계를 극복하고자 단순한 양함수 형태로 주어지는 새로운 그린함수를 제안하고자 한다. 위와 같이 얻어진 그린 함수는 다양한 선형 탄성 문제를 해석하기 위한 기초 해로써 사용되고 있다. 전형적인 적용 예로는 전위, 석출물, 고유변형률을 갖는 개재물, 균열과 같은 결함으로 인해 발생하는 응력 해석을 들 수 있다.⁽¹³⁻¹⁵⁾ 이러한 폭넓은 응용 때문에 그린 함수에 대한 연구는 현재에도 꾸준히 진행되고 있다.

2. 기본 방정식

키르호프 평판 이론에 따르면 얇은 평판의 변위 성분은 다음과 같이 표현될 수 있다.⁽¹⁶⁾

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + x_3 \theta_i(x_1, x_2), \quad (i=1, 2) \quad (1a)$$

$$u_3 = w(x_1, x_2) \quad (1b)$$

여기서 $u_i^0(x_1, x_2)$ 와 u_3 는 각각 주면의 면내 및 면외 변위 성분이다. θ_i 는 주면에서 x_i 방향의 기울기로 변위와는 $\theta_i = -w_{,i}$ 관계가 있다. 하첨자 씬표는 면내 방향의 직교좌표 x_1 과 x_2 에 대한 편미분을 나타낸다. 변형률-변위 관계, $\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ 로부터 변위는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + x_3 \kappa_{ij} \quad (i, j=1, 2) \quad (2)$$

여기서 ϵ_{ij}^0 와 κ_{ij} 는 각각 주면의 변형률 및 곡률로 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0) \quad (3a)$$

$$\kappa_{ij} = -w_{,ij} \quad (3b)$$

직교이방성 평판의 구성방정식은 다음과 같다.⁽¹⁶⁾

$$N_{ij} = A_{ijkl} \epsilon_{kl}^0, \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (4a)$$

$$M_{ij} = D_{ijkl} \kappa_{kl}. \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (4b)$$

본 논문에서 한 항에서 하첨자의 반복은 범위 1에서 2까지의 합을 나타내고 굵은 심볼은 벡터나 행렬을 나타낸다. 식 (4a, b)의 N_{ij} 와 M_{ij} 은 각각 결과응력과 결과모멘트로 다음과 같이 정의된다.

$$N_{ij} = \int_{x_3} \sigma_{ij} dx_3 \quad (5a)$$

$$M_{ij} = \int_{x_3} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (5b)$$

A_{ijkl} 와 D_{ijkl} 은 각각 인장 및 굽힘 강성 텐서이고 강성계수와 다음 관계를 갖는다.

$$A_{ijkl} = \int_{x_3} \tilde{C}_{ijkl} dx_3 \quad (6a)$$

$$D_{ijkl} = \int_{x_3} \tilde{C}_{ijkl} x_3^2 dx_3 \quad (6b)$$

여기서 \tilde{C}_{ijkl} 은 다음 식과 같이 C_{ijkl} 가 변환된 텐서이다.

$$\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{C_{ij33} C_{33kl}}{C_{3333}}, \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (6c)$$

면의방향 전단력은 다음과 같이 정의된다.

$$R_i = \int_{x_3} \sigma_{i3} dx_3 \quad (7)$$

전단력은 모멘트와 $R_i = M_{i,j}$ 관계가 있다. 면의방향으로 가해지는 외부하중이 없을 때 힘과 모멘트 평형 방정식은 다음과 같다.

$$N_{ij,j} = 0 \quad (8a)$$

$$M_{ij,ij} = 0 \quad (8b)$$

Fig. 1은 외부 하중이 가해지는 평판의 기하학적 형상과 미시요소에서의 힘과 모멘트를 도시한 그림이다. 면내 방향과 면외 방향의 지배 방정식을 얻기 위해 식 (3a, b)를 각각 식 (4a, b)에 대입한 후 그 결과를 식 (8a, b)에 대입하면 다음과 같은 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$A_{ijkl} u_{k,lj}^0 = 0 \quad (9a)$$

$$D_{ijkl} w_{,ijkl} = 0 \quad (9b)$$

3. 직교이방성 평판에 대한 해석법

본 연구에서는 결함문제에 용이하게 적용될 수 있는 양함수로 주어지는 그린함수를 얻기 위해 Stroh 해석법에서 제안된 복소 변수와 약간 다르게 복소변수 $z = x_1 + ipx_2$ 을 이용한다.

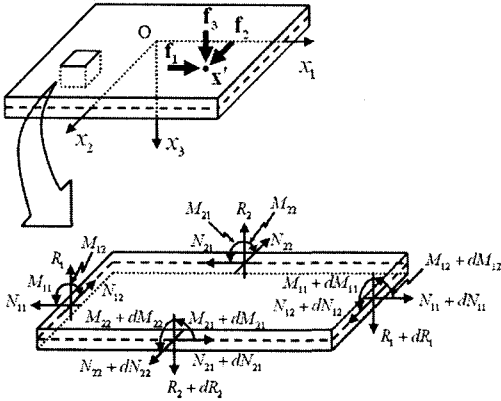


Fig. 1 In the upper diagram, shown is the plate model applied to the unit concentrated forces in the directions of x_1 , x_2 and x_3 axes, respectively. In the lower diagram, shown is the infinitesimal element of the plate model balanced on the stress resultants and bending moments

위와 같은 x_1 와 x_2 의 선형 조합된 변수를 이용하여 전개하면 그린 함수는 직교좌표계에서 두 개의 준 조화함수로 표현될 수 있다. 주면의 면내방향 변위 u_i^0 , 기울기 θ_i , 면외방향 변위 w 는 복소변수 z 의 함수로 다음과 같이 표현될 수 있다고 가정한다.

$$u_i^0 = a_i^A f^A(z^A), \quad z^A = x_1 + ip^A x_2 \quad (10a)$$

$$\theta_i = a_i^D f^D(z^D), \quad z^D = x_1 + ip^D x_2 \quad (10b)$$

$$w = a_0 \int f^D(z^D) dz^D \quad (10c)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이고 $a_i^A, a_i^D, a_0, p^A, p^D$ 는 임의 상수들이다. 그리고 $f^A(z^A)$ 와 $f^D(z^D)$ 는 각각 평판의 인장 및 굽힘 문제에 대해 경계조건을 만족하게 결정되는 함수이다. 기울기-면외 변위 관계, $\theta_1 = -w_1$ 와 $\theta_2 = -w_2$ 을 이용하면 $a_2^D = ip^D a_1^D = -ip^D a_0$ 관계가 성립함을 알 수 있다. 본 논문에서 상점자 A 와 D 는 각각 평판의 인장 및 굽힘 문제에 해당하는 상수, 변수, 함수 등을 나타내기 위해 사용하였다. 면내 및 면외 방향 기울기 성분인 식 (10a, c)을 식 (9a, b)에 대입하면 인장 및 굽힘 문제에 대한 고유값 p^A 와 p^D 을 얻을 수 있다.

$$p_1^A = m^A + n^A, \quad p_2^A = m^A - n^A, \quad (11a)$$

$$p_3^A = -m^A + n^A, \quad p_4^A = -m^A - n^A$$

$$p_1^D = m^D + n^D, \quad p_2^D = m^D - n^D, \quad (11b)$$

$$p_3^D = -m^D + n^D, \quad p_4^D = -m^D - n^D$$

여기서 상수 m^A, n^A, m^D, n^D 는 다음과 같다.

$$m^A = \left[\frac{(\bar{A}_{12} - A_{12})(\bar{A}_{12} + A_{12} + 2A_{66})}{4A_{22}A_{66}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12a)$$

$$n^A = \left[\frac{(\bar{A}_{12} + A_{12})(\bar{A}_{12} - A_{12} - 2A_{66})}{4A_{22}A_{66}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12b)$$

$$m^D = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12c)$$

$$n^D = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} - \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12d)$$

여기서 $\bar{A}_{12} = \sqrt{A_{11}A_{22}}$ 이다. 식 (12a~d)에서 A_{ij} 와 D_{ij} 은 텐서 A_{ijkl} 와 D_{ijkl} 의 변환된 텐서 성분으로 변환 규칙은 11, 22, 33, 23 (or 32), 31 (or 13), 12 (or 21)이 1, 2, 3, 4, 5, 6 로 대체되게 표시된다. 예를 들면 A_{1122} 와 A_{1212} 은 각각 A_{12} 와 A_{66} 로 변환된다. 이방성 평판에서 재료상수의 조합, $\sqrt{A_{11}A_{12}} - A_{12} - 2A_{66}$ 와 $D_{12} + 2D_{66} - \sqrt{D_{11}D_{22}}$ 이 영이 되는 경우는 수학적 관점에서 축중(degenerate)한 경우에 해당되는데 본 연구에서는 이러한 경우에 대해서는 고려하지 않는다. 인장 문제에 대한 고유벡터 \mathbf{a}_i^A 은 고유값을 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{a}_i^A = \left[k_i ip_i^A (A_{12} + A_{66}), -k_i (A_{11} - (p_i^A)^2 A_{66}) \right]^T \quad (13)$$

식 (13)에서 첨자 $i(i=1,2,3,4)$ 는 텐서 룰에 따른 합을 수행하지 않는다. 상수 k_i 은 고유값 p_i^A 에 의존하는 정상화 계수(normalization factor)로 직교성(orthogonality)이 만족되게 결정된다. 기울기-변위 관계, $\theta_1 = -w_1$ 와 $\theta_2 = -w_2$ 을 이용하면 굽힘 문제에 대한 고유벡터는 $\mathbf{a}_i^D = [a_{oi}, ip_i^D a_{oi}]^T$ 로 표현될 수 있다. 여기서 a_{oi} 은 굽힘 문제에 대한 정상화 계수이다. Stroh 해석법과 유사하게 변위, 기울기, 결과응력, 결과모멘트는 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$\mathbf{u}^0 = 2 \text{Im} \left\{ \mathbf{A}^A \langle f^A(z^A) \rangle \mathbf{q}^A \right\} \quad (14a)$$

$$\boldsymbol{\theta} = 2 \text{Im} \left\{ \mathbf{A}^D \langle f^D(z^D) \rangle \mathbf{q}^D \right\} \quad (14b)$$

$$\boldsymbol{\phi}^A = 2 \text{Im} \left\{ \mathbf{B}^A \langle f^A(z^A) \rangle \mathbf{q}^A \right\} \quad (14c)$$

$$\boldsymbol{\phi}^D = 2 \text{Im} \left\{ \mathbf{B}^D \langle f^D(z^D) \rangle \mathbf{q}^D \right\} \quad (14d)$$

여기서 Im 은 복소 상수의 복소 항을 나타내고

$A^A \equiv [a_1^A \ a_2^A]$, $A^D \equiv [a_1^D \ a_2^D]$, $B^A \equiv [b_1^A \ b_2^A]$, $B^D \equiv [b_1^D \ b_2^D]$, $\langle f(z_i) \rangle \equiv \text{diag}[f(z_1) \ f(z_2)]$ 이고 q^A 와 q^D 는 경계조건이 만족되게 결정될 상수이다. 식 (14c, d)에 응력함수 ϕ^A 와 ϕ^D 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_i^A = b_i^A f^A(z^A) \quad (15a)$$

$$\phi_i^D = b_i^D f^D(z^D) \quad (15b)$$

여기서 b_i^A 와 b_i^D 은 다음 식과 같이 각각 고유벡터 a^A , a^D 와 관계를 갖는 벡터의 성분이다.

$$b^A = (R_A^T + ip^A T_A) a^A = \frac{i}{p^A} (Q_A + ip^A R_A) a^A \quad (16a)$$

$$\begin{bmatrix} -ip^D b^D + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \\ b^D - \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_D + ip^D R_D & \begin{bmatrix} a_0^D \\ ip^D a_0^D \end{bmatrix} \\ R_D^T + ip^D T_D & \begin{bmatrix} a_0^D \\ ip^D a_0^D \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (16b)$$

여기서 $c \equiv \frac{1}{2}(b_1^D + ip^D b_2^D) = \frac{1}{2} \tilde{p}^T b^D$ 이고 2×2 행렬 Q_A , R_A , T_A , Q_D , R_D , T_D 은 각각 다음과 같이 텐서 A_{ijk} 와 D_{ijk} 의 성분으로부터 얻어진다.

$$Q_A = [A_{1k1}], \quad R_A = [A_{1kk}], \quad T_A = [A_{2kk}] \quad (17a)$$

$$Q_D = [D_{1k1}], \quad R_D = [D_{1kk}], \quad T_D = [D_{2kk}] \quad (17b)$$

식 (15a, b)에서 정의된 응력함수를 사용하여 식 (4a, b)에서 정의된 결과응력 및 결과모멘트와 식 (7)에서 정의된 전단력을 표현하면 다음과 같다.

$$N_{11} = -\phi_{1,2}^A, \quad N_{12} = \phi_{1,1}^A \quad (18a)$$

$$M_{11} = -\phi_{1,2}^D - \frac{1}{2} \epsilon_{11} \phi_{k,k}^D, \quad M_{12} = \phi_{1,1}^D - \frac{1}{2} \epsilon_{12} \phi_{k,k}^D \quad (18b)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2} \phi_{k,k2}^D, \quad R_2 = \frac{1}{2} \phi_{k,k1}^D \quad (18c)$$

식 (14a, c)와 식 (14b, d)는 각각 인장 및 굽힘 문제에 대한 4 개 1 조 수식화의 결과를 나타낸다. 인장 및 굽힘 문제에 대한 정상화 계수는 각각 $b_i^A a_j^A + a_i^A b_j^A = \delta_{ij}$ 와 $b_i^D a_j^D + a_i^D b_j^D = \delta_{ij}$ 관계가 만족되게 결정된다.

$$k_i^2 = \frac{-ip_i^A}{2A_{66}(A_{11} + p_i^{A2} A_{12})(A_{11} - 2p_i^{A2} A_{66} - p_i^{A2} A_{12})} \quad (19a)$$

$$a_{66}^2 = \frac{-ip_i^D}{2(D_{11} - (p_i^D)^4 D_{22})} \quad (19b)$$

4. 단위집중하중에 대한 그린함수

원점에 면내 방향과 면외 방향으로 각각 $f^A = [f_1 \ f_2]^T$ 와 f_3 이 가해질 때 원점을 포함하는 닫힌 윤곽선 안의 평형 방정식은 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$f_i + \oint N_j n_j ds = 0, \quad i, j=1,2 \quad (20a)$$

$$f_3 + \oint R_k n_k ds = 0, \quad k=1,2 \quad (20b)$$

여기서 ds 은 적분 경로 Γ 을 따라 정의되는 비소 길이를 나타낸다. 경로 Γ 로 정의된 내부가 s 의 증가방향 왼쪽에 놓이도록 정의하면 경로 Γ 에 수직한 outward unit vector 는 다음과 같다.

$$n_1 = \frac{dx_2}{ds}, \quad n_2 = -\frac{dx_1}{ds} \quad (21)$$

식 (18a, c)을 각각 식 (20a, b)에 대입하면 다음과 같다.

$$\phi^A|_{\sigma} = f_i \quad (22a)$$

$$\frac{1}{2} \phi_{k,k}^D|_{\sigma} = f_3 \quad (22b)$$

여기서 $|_{\sigma}$ 은 경로 Γ 을 따라서 1 회전할 때 값의 증가를 나타낸다. 식 (22b)는 ϕ^D 에 대한 경계조건으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\phi^D|_{\sigma} = [x_1 f_3 \ 0]^T \quad (23)$$

경로 Γ 의 내부에 전위와 같은 변위의 불연속점이 없기 때문에 닫힌 경로를 따라서 u_i^0 와 θ_i 의 점프는 없다.

$$u_i^0|_{\sigma} = 0 \quad (24a)$$

$$\theta_i|_{\sigma} = 0 \quad (24b)$$

먼저 면내 방향으로 단위 집중하중이 가해지는 인장문제를 고려한다. 만약 음의 x_1 축을 따라서 브랜치 컷을 가정하면 경로 Γ 을 따라서 로그함수 $\ln(z)$ 의 점프 $\ln(z)|_{\sigma=\pi} - \ln(z)|_{\sigma=-\pi}$ 는 다음과 같다.

$$(\ln(z))|_{\sigma} = 2\pi i \quad (25)$$

식 (14a, c)에 함수 $f^A(z^A)$ 가 $(1/2\pi)\ln(z^A)$ 로 가정하면 식 (22a)와 식 (24a)에 주어진 경계조건을 만족하는 해가 쉽게 얻어짐을 알 수 있다. 식 (22a)와 식 (24a)을 각각 식 (14a)와 식 (14c)에 대입하고 식 (25)의 로그함수의 점프조건을 사용하면 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$2\text{Re}(A^A q^A) = 0, \quad 2\text{Re}(B^A q^A) = f^A \quad (26)$$

위 식은 행렬 형으로 다음과 같이 표현될 수 있

다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^A & \bar{\mathbf{A}}^A \\ \mathbf{B}^A & \bar{\mathbf{B}}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^A \\ \bar{\mathbf{q}}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^A \end{bmatrix} \quad (27)$$

직교성 관계를 사용하면 식 (27)로부터 다음과 같은 관계가 만족된다.

$$\mathbf{q}^A = \mathbf{A}^{AT} \mathbf{f}^A \quad (28)$$

식 (28)을 식 (14a)와 식 (14c)에 대입하면 변위 및 응력함수는 각각 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$\mathbf{u}^0 = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}^A \langle \ln(z) \rangle \mathbf{A}^{AT} \right\} \mathbf{f}^A \quad (29a)$$

$$\phi^A = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}^A \langle \ln(z) \rangle \mathbf{A}^{AT} \right\} \mathbf{f}^A \quad (29b)$$

식 (13)에 주어진 고유벡터를 식 (29a)에 대입하고 부록 A 에 주어진 몇 가지의 등식을 사용하게 되면 변위장에 대한 다음 결과를 얻을 수 있다. 자세한 유도과정은 부록 A 에 주어져 있다.

$$u_1^{0(1)} = G_{11} = \sum_{n=1}^2 (A_{12} + A_{66})^2 p_n^{A2} \alpha_n \phi_n^A \quad (30a)$$

$$u_2^{0(1)} = G_{12} = - \sum_{n=1}^2 (A_{12} + A_{66}) p_n^A \alpha_n \beta_n \psi_n^A \quad (30b)$$

여기서 상수 α_n 와 β_n 은 각각 다음과 같다.

$$\alpha_n = \frac{p_n^A}{2\pi A_{66} (A_{11} + p_n^{A2} A_{12}) (A_{11} - p_n^{A2} (A_{12} + 2A_{66}))} \quad (31a)$$

$$\beta_n = (A_{11} - p_n^{A2} A_{66}) \quad (31b)$$

식 (30a, b)에 함수 ϕ_n^A 와 ψ_n^A 은 각각 다음과 같다.

$$\phi_n^A = \ln r_n^A \quad (32a)$$

$$\psi_n^A = \tan^{-1} \left(\frac{p_n^A (x_2 - x_2')}{x_1 - x_1'} \right) \quad (32b)$$

여기서 r_n^A 은 다음과 같다.

$$r_n^A = \left[(x_1 - x_1')^2 + p_n^{A2} (x_2 - x_2')^2 \right]^{1/2} \quad (33)$$

부록 A 에 주어진 그런 함수는 원점에 단위 집중하중이 가해지는 경우에 대한 해이지만 단순히 \mathbf{x} 을 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 로 대체 함으로써 임의 점 \mathbf{x}' 에 작용하는 단위 집중하중에 대한 해가 됨을 주목한다. 함수 ϕ_n^A 와 ψ_n^A 은 준 조화함수이다. 즉 좌표축 (x_1, x_2) 에 대해서는 조화함수가 아니지만 변환된 좌표축 $(x_1, p_n^A x_2)$ 에 대해서는 조화함수이다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial (p_n^A x_2)^2} \right) \phi_n^A = 0 \quad (34)$$

비록 고유값 p_n^A 은 재료에 따라서 실수 또는 복소수 값을 가질 수 있지만 식 (30a, b)에 그런 함수는 마치 실수형 해인 것처럼 얻어짐을 알 수 있다. 유사하게 x_2 방향의 단위 집중하중에 대한 변위 성분은 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$u_1^{0(2)} = G_{21} = - \sum_{n=1}^2 (A_{12} + A_{66}) p_n^A \alpha_n \beta_n \psi_n^A \quad (35a)$$

$$u_2^{0(2)} = G_{22} = - \sum_{n=1}^2 \alpha_n \beta_n^2 \phi_n^A \quad (35b)$$

여기서 그림함수 G_{ij} 은 하첨자 ij 에 대해 대칭이다. 즉 $G_{ij} = G_{ji}$ 관계가 있다.

다음으로 면의 방향의 단위 집중 하중에 대한 굽힘 문제를 고려한다. $f^D(z^D) = (1/2\pi) z^D \ln(z^D)$ 을 가정하면 식 (23)와 식 (24b)에 주어진 경계조건을 만족하는 해가 쉽게 얻어질 수 있다. 식 (23)와 식 (24b)을 식 (14b)와 식 (14d)에 각각 대입하면 다음 관계가 얻어진다.

$$2 \text{Re}(\mathbf{A}^D \mathbf{q}^D) = \mathbf{0}, \quad 2 \text{Re}(\mathbf{B}^D \mathbf{q}^D) = \mathbf{f}^D \quad (36a)$$

행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^D & \bar{\mathbf{A}}^D \\ \mathbf{B}^D & \bar{\mathbf{B}}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^D \\ \bar{\mathbf{q}}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^D \end{bmatrix} \quad (36b)$$

여기서 $\mathbf{f}^D = [f_3, 0]^T$ 이다. 식 (18c) 아래에서 언급한 직교성 관계를 사용하면 상수 \mathbf{q}^D 은 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$\mathbf{q}^D = \mathbf{A}^{DT} \mathbf{f}^D \quad (37)$$

식 (37)을 식 (14b, d)에 대입하면 함수 θ 와 ϕ^D 가 각각 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$\theta = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}^D \langle z, \ln(z) \rangle \mathbf{A}^{DT} \right\} \mathbf{f}^D \quad (38a)$$

$$\phi^D = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}^D \langle z, \ln(z) \rangle \mathbf{A}^{DT} \right\} \mathbf{f}^D \quad (38b)$$

고유벡터 \mathbf{a}^D 을 식 (38a)에 대입하고 부록 B 에 주어진 몇 가지 등식을 사용하면 다음과 같은 기울기 장이 얻어 질 수 있다.

$$\theta_1 = -G_{33,1} = - \sum_{n=1}^2 \gamma_n (x_1 \phi_n^D - p_n^D x_2 \psi_n^D) \quad (39a)$$

$$\theta_2 = -G_{33,2} = \sum_{n=1}^2 p_n^D \gamma_n (p_n^D x_2 \phi_n^D + x_1 \psi_n^D) \quad (39b)$$

상세한 유도 과정은 부록 B 에 주어져 있다. 여기서 상수 γ_n 은 다음과 같다.

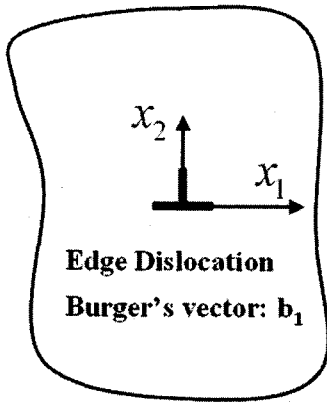


Fig. 2 Schematic diagram for edge dislocation on the $x_2 = 0$ plane ($x_1 > 0$) with Burgers vector b_1

$$\gamma_n = \frac{P_n^D}{2\pi \left(D_{11} - (P_n^D)^4 D_{22} \right)} \quad (40)$$

함수 ϕ_n^D 와 ψ_n^D 은 ϕ_n^A 와 ψ_n^A 에서 p^A 을 p^D 로 대체한 함수이다.

5. 칼날전위

키르호프 평판의 면내 방향 문제는 수학적으로 2차원 평면 응력 상태에 대한 문제와 같다. 마찬가지로 탄성계수 조합을 적절하게 조정함으로써 평면 변형률 문제에도 적용될 수 있다. 평면 변형률 문제 중 하나로 본 연구의 결과를 칼날전위 해석에 적용해 보았다. Fig. 2와 같이 원점에 x_1 축에 평행하게 버거스(Burgers) 벡터 b_1 을 갖는 칼날 전위를 고려한다. Eshelby⁽¹⁷⁾가 제안한 방법을 칼날전위 문제에 적용하면 변위는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_i^0 = -b_1 \int_0^\infty f_{i21} dx'_1 \quad (41)$$

여기서 함수 f_{ij} 은 그림함수와 다음과 같은 관계가 있다.

$$f_{ijk} = -C_{mnjk} G_{im,n} \quad (42)$$

식 (30a, b)을 식 (42)에 대입한 후에 식 (41)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$u_1^0 = b_1 \sum_{n=1}^2 (C_{12} + C_{66}) \alpha_n \eta_n H_{n,2} \quad (43a)$$

$$u_2^0 = -b_1 \sum_{n=1}^2 \alpha_n \beta_n \eta_n H_{n,1} \quad (43b)$$

여기서 H_n 은 다음과 같다.

$$H_n = x_1 \ln r_n^A - p_n^A x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_n^A x_2}{x_1} \right) \quad (44)$$

식 (43a, b)는 칼날 전위에 대한 새로운 해이다. 이 결과로부터 전위 이론에서 가장 중요한 물리량인 슬립면에서의 전단응력을 계산해 보면 Eshelby 등⁽¹⁸⁾의 결과와 같다.

6. 결과요약

본 연구에서는 직교이방성 평판의 면내 및 면외 방향의 단위 집중하중에 대한 새로운 형태의 그린 함수를 제안하였다. 그린함수는 직교좌표계에 대해 두 개의 준 조화 함수로 표현되었다. 복소변수 $z = x_1 + ipx_2$ 을 이용하여 직교이방성 키르호프 평판에 대한 수식을 전개 하였다. 고체 내의 결합 문제에 쉽게 적용될 수 있는 형태의 그린 함수를 얻고자 고유값 및 고유벡터를 해에 직접 적용하여 그린함수를 얻었다. 본 연구의 결과는 전위, 석출물, 균열 등의 결합문제에 잘 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 2004 년 전남대학교 학술연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

- (1) Eshelby, J. D., Read, W. T. and Shockley, W., 1953, "Anisotropic Elasticity with Applications to Dislocation Theory," *Acta Metall.*, Vol. 1, pp. 251~259.
- (2) Stroh, A. N., 1958, "Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity," *Phil. Mag.*, Vol. 3, pp. 625~646.
- (3) Stroh, A. N., 1962, "Steady State Problem in Anisotropic Elasticity," *J. Math. Phys.*, Vol. 41, pp. 77~103.
- (4) Ting, T. C. T., 1996, *Anisotropic elasticity: theory and applications*, Oxford University Press, New York.
- (5) Cheng, Z. Q. and Reddy, J. N., 2002, "Octet Formalism for Kirchhoff Anisotropic Plates," *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A458, pp. 1499~1517.
- (6) Kelvin, Lord, 1882, "Note on the Integration of the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid," *Mathematical and Physical Papers 1*, Cambridge Univ.

- Press, pp. 97~98.
- (7) Indenbom, V. L. and Orlov, S. S., 1968, "Construction of Green's Function in Terms of Green's Function of Lower Dimension," *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 31, pp. 414~420.
- (8) Cheng, Z. Q. and Reddy, J. N., 2003, "Green's Functions for Infinite and Semi-infinite Anisotropic Thin Plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 70, pp. 260~267.
- (9) Cheng, Z. Q. and Reddy, J. N., 2004a, "Green's Functions for an Anisotropic Thin Plate with a Crack or an Anticrack," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 42, pp. 271~289.
- (10) Cheng, Z. Q. and Reddy, J. N., 2004b, "Laminated Anisotropic Thin Plate with an Elliptic Inhomogeneity," *Mech. Mater.*, Vol. 36, pp. 647~657.
- (11) Hwu, C., 2004, "Green's Function for the Composite Laminates with Bending Extension Coupling," *Compos. Struct.*, Vol. 63, pp. 283~292.
- (12) Hsieh, M. C. and Hwu, C., 2002, "Anisotropic Elastic Plates with Holes/Cracks/Inclusions Subjected to Out-of-Plane Bending Moments," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, pp. 4905~4925.
- (13) Mura, T., 1982, *Micromechanics of defects in solids*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague, Netherlands.
- (14) Yang, K. J., 2005, "Elastic Analysis of Defects in Orthotropic Kirchhoff Plate," *J. Appl. Mech.*, Accepted for Publication.
- (15) Yang, K. J., Beom, H. G. and Kang, K. J., 2005, "Thermal Stress Analysis for an Inclusion with Nonuniform Temperature Distribution in an Infinite Kirchhoff Plate," *J. Thermal Stresses*, Vol. 28, pp. 1123~1144.
- (16) Jones, R. M., 1975, *Mechanics of composite materials*, McGraw-Hill, New York.
- (17) Eshelby, J. D., 1961, "Elastic Inclusions and Inhomogeneities," *Progress in Solid Mechanics* 2, I. N. Sneddon and R. Hill, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 89~140.
- (18) Eshelby, J. D., Read, W. T. and Shockley, W., 1953, "Anisotropic Elasticity with Application to Dislocation Theory," *Acta Metallurgica*, Vol. 1, pp. 251~259.

부 록

부록 A 면내 방향의 단위 집중하중에 대한 그린함수

x_1 방향의 단위 집중하중 $\mathbf{f}^A = [1 \ 0]^T$ 을 식 (28)

에 대입하면 상수 $q_i^A (i=1,2)$ 은 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$q_i^A = a_{ii}^A \quad i=1,2 \quad (A1)$$

$\ln(z_i^A) = \ln(r_i^A) + i \tan^{-1}(p_i^A x_2 / x_1)$ 관계를 식 (29a)에 적용하면 변위 성분 $u_i^{(0)}$ 에 대한 다음 결과를 얻

을 수 있다.

$$u_1^{(0)} = -\frac{i}{\pi} \left(a_{11}^A \ln r_1 a_{11}^A + a_{12}^A \ln r_2 a_{12}^A \right) \quad (A2)$$

여기서 $r_i^A = \left[x_1^2 + (p_i^A)^2 x_2^2 \right]^{1/2}$ 이고 $u_i^{(0)}$ 은 j 방향의 단위 집중하중에 대한 i 방향의 변위 성분을 나타낸다. 식 (A2)을 얻을 때 다음 관계가 사용되었다.

$$\sum_i a_{ii}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_i^A x_2}{x_1} \right) a_{ii}^A = 0, \quad i=1,2,3,4 \quad (A3a)$$

$$a_{11}^A \ln r_1 a_{11}^A + a_{12}^A \ln r_2 a_{12}^A = a_{13}^A \ln r_3 a_{13}^A + a_{14}^A \ln r_4 a_{14}^A. \quad (A3b)$$

유사한 방법으로 $u_2^{(0)}$ 을 계산하면 다음과 같다.

$$u_2^{(0)} = \frac{1}{\pi} \left(a_{21}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_1^A x_2}{x_1} \right) a_{11}^A + a_{22}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_2^A x_2}{x_1} \right) a_{12}^A \right) \quad (A4)$$

식 (A4)을 계산할 때 다음 관계가 사용되었다.

$$\sum_i a_{2i}^A \ln r_i a_{ii}^A = 0, \quad i=1,2,3,4 \quad (A5a)$$

$$a_{21}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_1^A x_2}{x_1} \right) a_{11}^A + a_{22}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_2^A x_2}{x_1} \right) a_{12}^A \quad (A5b)$$

$$= a_{23}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_3^A x_2}{x_1} \right) a_{13}^A + a_{24}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_4^A x_2}{x_1} \right) a_{14}^A$$

유사한 방법으로 단위 집중하중 $\mathbf{f}^A = [0 \ 1]^T$ 에 대한 변위 성분 $u_i^{(0)}$ 와 $u_i^{(2)}$ 을 유도하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$u_1^{(2)} = \frac{1}{\pi} \left(a_{11}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_1^A x_2}{x_1} \right) a_{21}^A + a_{12}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_2^A x_2}{x_1} \right) a_{22}^A \right) \quad (A6)$$

$$u_2^{(2)} = -\frac{i}{\pi} \left(a_{21}^A \ln r_1 a_{21}^A + a_{22}^A \ln r_2 a_{22}^A \right) \quad (A7)$$

위 관계를 유도할 때 다음 관계가 이용되었다.

$$\sum_i a_{ii}^A \ln r_i a_{2i}^A = 0, \quad i=1,2,3,4 \quad (A8a)$$

$$a_{11}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_1^A x_2}{x_1} \right) a_{21}^A + a_{12}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_2^A x_2}{x_1} \right) a_{22}^A \quad (A8b)$$

$$= a_{13}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_3^A x_2}{x_1} \right) a_{23}^A + a_{14}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_4^A x_2}{x_1} \right) a_{24}^A$$

$$\sum_i a_{2i}^A \tan^{-1} \left(\frac{p_i^A x_2}{x_1} \right) a_{2i}^A = 0, \quad i=1,2,3,4 \quad (A8c)$$

$$a_{21}^A \ln r_1 a_{21}^A + a_{22}^A \ln r_2 a_{22}^A = a_{23}^A \ln r_3 a_{23}^A + a_{24}^A \ln r_4 a_{24}^A. \quad (A8d)$$

식 (A2), (A4), (A6), (A7)에 고유벡터 \mathbf{a}_i^A 을 대입하면 식 (30a, b)와 식 (35a, b)가 얻어질 수 있다.

부록 B 면의 방향의 단위 집중하중에 대한 그런 함수

식 (37)에 $\mathbf{f}^D = [1, 0]^T$ 을 대입하면 q_i^D ($i=1,2$) 는 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$q_i^D = a_{ii}^D \quad (\text{B1})$$

식 (B2)에 주어진 관계를 사용하면 식 (38a)에 주어진 기울기 θ 은 식 (B3)와 같이 얻어 질 수 있다.

$$z_i \ln(z_i) = x_1 \ln(r_i) - p_i^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_i^D x_2}{x_1} \right) + i \left[p_i^D x_2 \ln(r_i) + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_i^D x_2}{x_1} \right) \right] \quad (\text{B2})$$

$$\theta_1 = -\frac{i}{\pi} \left[a_{11}^D \left(x_1 \ln r_1 - p_1^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_1^D x_2}{x_1} \right) \right) a_{11}^D + a_{12}^D \left(x_1 \ln r_2 - p_2^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_2^D x_2}{x_1} \right) \right) a_{12}^D \right] \quad (\text{B3a})$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\pi} \left[a_{21}^D \left(p_1^D x_2 \ln r_1 + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_1^D x_2}{x_1} \right) \right) a_{11}^D + a_{22}^D \left(p_2^D x_2 \ln r_2 + x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_2^D x_2}{x_1} \right) \right) a_{12}^D \right] \quad (\text{B3b})$$

이 식을 유도 할 때 다음 관계가 사용되었다.

$$\sum_i \left(a_{ii}^D \left\{ p_i^D x_2 \ln(r_i) + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_i^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{ii}^D \right) = 0, \quad (\text{B4a})$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$a_{11}^D \left\{ x_1 \ln(r_1) - p_1^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_1^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{11}^D + a_{12}^D \left\{ x_1 \ln(r_2) - p_2^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_2^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{12}^D \quad (\text{B4b})$$

$$= a_{13}^D \left\{ x_1 \ln(r_3) - p_3^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_3^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{13}^D$$

$$+ a_{14}^D \left\{ x_1 \ln(r_4) - p_4^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_4^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{14}^D$$

$$\sum_i \left(a_{2i}^D \left\{ x_1 \ln(r_i) - p_i^D x_2 \tan^{-1} \left(\frac{p_i^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{ii}^D \right) = 0, \quad (\text{B4c})$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$a_{21}^D \left\{ p_1^D x_2 \ln(r_1) + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_1^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{11}^D$$

$$+ a_{22}^D \left\{ p_2^D x_2 \ln(r_2) + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_2^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{12}^D \quad (\text{B4d})$$

$$= a_{23}^D \left\{ p_3^D x_2 \ln(r_3) + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_3^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{13}^D$$

$$+ a_{24}^D \left\{ p_4^D x_2 \ln(r_4) + x_1 \tan^{-1} \left(\frac{p_4^D x_2}{x_1} \right) \right\} a_{14}^D$$

식 (B3a, b)에 고유벡터 \mathbf{a}_i^D 을 대입하면 식 (39a, b) 가 얻어 질 수 있다.