韓國經營科學會誌
第32권 第1號
2007年 3月

휴리스틱 방법을 이용한 N정책과 준비기간을 갖는 휴가형 $\text{Geo}^X/G/1$ 모형의 평균대기시간 분석

이성희*† · 김성진* · 채경철*

Heuristic Approach to the Mean Waiting Time of $\text{Geo}^X/G/1$ Vacation Queues with N-policy and Setup Time

Sung-Hee Lee* · Sung-Jin Kim* · Kyung-Chul Chae*

■ Abstract ■

We consider the discrete-time $\text{Geo}^X/G/1$ queues under N-policy with multiple vacations (a single vacation) and setup time. In this queueing system, the server takes multiple vacations (a single vacation) whenever the system becomes empty, and he begins to serve the customers after setup time only if the queue length is at least a predetermined threshold value N. Using the heuristic approach, we derive the mean waiting time for both vacation models. We demonstrate that the heuristic approach is also useful for the discrete-time queues.

Keyword : Heuristic Approach, Waiting Time, Discrete-time Queue, Vacation, N-policy, Setup Time

1. 서 론

대부분의 대기행렬시스템의 경우 성능척도는 PGF (probability generating function)나 LT(Laplace transform)의 변환형태로 주어지고 이를 미분하여 성능척도의 평균값을 구하게 된다. 하지만 변환형태가 복잡하여 미분하기가 쉽지 않은 경우도 있으며 변환자체를 구하기가 어려운 경우도 많다. 이에

논문접수일 : 2006년 08월 10일 논문게재확정일 : 2007년 01월 10일
* KAIST 산업공학과
† 교신저자

임의의 도착고객이 바라보는 관점을 이용하여 무변환(transform-free)형태의 평균대기시간을 제공하는 방법이 Chae and Lee[3]에 의해 처음 제안되었고 이를 휴리스틱 방법(heuristic approach)이라 한다. Chae and Lee[3]의 연구에서는 N정책을 갖는 연속시간 휴가형 대기행렬시스템에 대하여 휴리스틱 방법을 제안을 하였다. 휴리스틱 방법은 변환형태를 이용하여 평균값을 구한 경우 이 값을 확인하는 과정에서도 유용하게 쓰일 수 있다는 장점이 있으며, Medhi[4, 416-423]에도 다양한 연속시간 대기행렬시스템의 예를 들어서 그 유용성이 소개된 바 있다. 본 논문에서는 휴리스틱 방법론을 N정책과 준비기간을 갖는 이산시간 휴가형 대기행렬시스템의 분석에 활용하고자 한다. 또한 휴리스틱 방법론이 이산시간 대기행렬시스템에도 유용하게 활용될 수 있음을 보이고자 한다.

최근, 디지털 통신시스템으로의 다양한 응용가능성으로 인하여 이산시간 대기행렬시스템에 대한 연구가 증대되고 있다. 이는 비트, 셀, 패킷 단위로 운용되는 디지털 시스템을 이산시간 대기행렬시스템으로 보다 잘 묘사할 수 있기 때문이다. 이산시간 휴가형 대기행렬시스템에 대한 다양한 연구는 Takagi [6]에서 찾을 수 있다. 휴가형 대기행렬시스템이란 시스템에 고객이 존재함에도 불구하고 서버가 어떤 이유로 서비스를 제공하지 않는 모든 대기행렬시스템을 통칭한다. 휴가형 대기행렬시스템은 1960년대에 소개가 되었으나, 1970년대와 1980년대를 거치면서 통신시스템, 생산시스템들이 발전하기 시작하면서 그 유용성이 증가되었고, 많은 분야에서 이를 사용하기 시작했다.

본 연구에서는 시스템에 도착한 모든 고객이 서비스를 받고 나가 시스템에 고객이 없을 때, 서버가 휴가를 떠나고, 휴가를 마치고 돌아와서 대기공간에 N명 이상의 고객이 기다리고 있다면 서버가 임의의 길이의 준비기간을 거쳐 서비스를 시작하게 되는 시스템을 고려한다. 본 연구와 관련이 있는 휴가형 대기행렬시스템에 대한 최근 연구를 살펴보면 다음과 같다. Hur and Ahn[5]은 부가변수법을 이용하여 준비기간을 갖는 연속시간 휴가형 대기행렬시스템의 고객수와 대기시간 분포에 관하여 연구를 하였다. 이성희 외 2인[1]은 휴리스틱 방법을 이용하여 준비기간을 갖는 휴가형 $Geo^X/G/1$ 모형의 평균대기시간을 제시하였으며 이는 Hur and Ahn [5]의 이산시간 버전 연구라 할 수 있다. 본 연구는 이성희 외 2인[1]의 연구를 N정책을 포함한 모형으로 확장을 하여 평균대기시간을 제시하는데 의의가 있으며, 이산시간 대기행렬시스템에도 휴리스틱 방법이 유용하게 쓰일 수 있다는 점을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 제 2장에서는 본 연구에 필요한 기본 가정과 변수를 정의한다. 제 3장에서는 N정책과 준비기간을 갖는 $Geo^X/G/1$ 모형의 평균대기시간을 휴리스틱 방법을 이용하여 제시하며, 제 4장에서는 N정책과 준비기간을 갖는 휴가형 $Geo^X/G/1$ 모형의 평균대기시간을 제시한다. 제 5장에서는 본 논문을 요약, 정리한다.

2. 기본 가정 및 변수 정의

이산시간 대기행렬시스템을 분석하기 위해서는 연속시간 대기행렬시스템과 다른 많은 새로운 가정의 도입이 필요하다[6]. 이산시간 대기행렬시스템에서 시간축은 슬롯(slot)이라는 기본단위의 등간격으로 나누어진다. 서비스 시간은 기본 슬롯의 정수배이며 서비스의 시작과 종료는 슬롯의 경계와 동기화된다. 고객의 도착은 슬롯의 중앙에서 발생하지만, 실제로는 슬롯의 경계에서만 시스템의 상태가 관찰되므로, 슬롯의 경계에서 도착이 이루어지는 것으로 가정한다. 이 때 한 슬롯동안 일어난 도착이 해당 슬롯의 맨 끝(슬롯 경계 직전)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 후도착모형(late arrival system)이라 하고, 해당 슬롯의 맨 처음(슬롯 경계 직후)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 선도착모형(early arrival system)이라 한다. 본 논문에서는 통신시스템에 보다 적합한 후도착모형을 가정하고 논의를 전개한다[2, 2].

이산 시간 대기행렬시스템을 분석하기 위해 필

요한 확률 변수와 생성함수를 다음과 같이 정의한다.

Λ = 한 슬롯동안 도착하는 고객 수,
$\lambda_k \triangleq \Pr[\Lambda = k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$
$\Lambda(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k.$
S = 각 고객의 서비스시간,
$s_k \triangleq \Pr[S = k], \quad k = 1, 2, \cdots,$
$S(z) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k.$
V = 각 휴가기간의 길이,
$v_k \triangleq \Pr[V = k], \quad k = 1, 2, \cdots,$
$V(z) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k.$
Y = 각 준비기간의 길이,
$y_k \triangleq \Pr[Y = k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$
$Y(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k.$
Λ^+ = 슬롯에 최소 1명 이상이 도착했다는 가정하에서의 도착 그룹 고객 수,
$\Lambda^+(z) = [\Lambda(z) - \lambda_0]/(1 - \lambda_0).$
제공로드(Offered load) $\rho = E(\Lambda)E(S).$

여기서 유의해야 할 점은 본 모형은 이산시간 대기행렬시스템이기 때문에 변환형태가 LT가 아니라 PGF로 정의가 된다는 것이다.

3. N정책과 준비기간을 갖는 모형

본 모형에서는 시스템에 있는 모든 고객이 서비스를 받아 바쁜기간이 끝나게 되면 서버는 N명 이상의 고객이 도착할 때까지 기다리고 N명 이상의 고객이 도착하게 되면 즉시 Y시간 동안의 준비기간을 거쳐 바쁜기간이 시작된다. 유휴기간은 휴지기간, 준비기간의 합으로 이루어진다. 이 모형에서 휴지기간은 서버가 바쁜기간을 마치고 N명 이상의 고객이 도착할 때까지 기다리는 기간이라 정의한다. N정책과 준비기간을 가진 모형의 평균대기시간을 구하기 위한 휴리스틱 방법에 따른 방정식은 다음과 같다.

$$W_q = [L_q + E(\Lambda_R^+)]E(S) + P(B)E(S_R) + P(Y)E(Y_R) + P(D)\left[\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)} + E(Y)\right]. \qquad (1)$$

이 때, W_q = 평균대기시간,
L_q = 평균대기고객수,
Λ_R^+ = 슬롯에 최소 1명 이상이 도착했다는 가정하에서의 그룹내 잔여고객수,
S_R = 잔여서비스시간,
Y_R = 잔여준비기간,
N_{D_R} = 잔여휴지기간동안 도착한 고객수,
$P(B)$ = 서버가 바쁠 확률,
$P(D)$ = 서버가 휴지기간중일 확률,
$P(Y)$ = 서버가 준비기간중일 확률.

식 (1)이 의미하는 바는 도착하는 고객은 '기본적으로' 휴가가 없는 기본 Geo^X/G/1의 평균대기시간만큼을 기다려야 하며, 준비기간 동안 도착한 경우 진행중인 준비기간의 남은 기간만큼을, 휴지기간 동안 도착하는 경우 진행중인 휴지기간의 남은 기간과 준비기간만큼을 '추가적으로' 기다려야 한다는 뜻이다. 여기서 휴가가 없는 기본 Geo^X/G/1의 평균대기시간이라 함은 도착하는 고객은 도착 시 서비스 대기중인 고객과 그룹 내 앞선 고객의 총 서비스시간만큼을 '기본적으로' 기다려야 하며, 바쁜 기간에 도착하는 경우에는 진행중인 서비스의 잔여시간만큼을 '추가적으로' 기다려야 한다는 것을 의미한다[1]. 그룹 내 잔여고객수의 기대값은 $E(\Lambda_R^+) = E(\Lambda^2 - \Lambda)/2E(\Lambda)$으로, 잔여서비스시간의 기대값은 $E(S_R) = E(S^2 - S)/2E(S)$으로, 잔여준비기간의 기대값은 $E(Y_R) = E(Y^2 - Y)/2E(Y)$로 표현이 가능하다[6]. 그리고 Little's law에 의해 $L_q = E(\Lambda)W_q$임이 잘 알려져 있으며, $P(B) = \rho = E(\Lambda)E(S)$임을 쉽게 알 수 있다. 이 때, 안정된 시스템을 위해 $P(B) < 1$가 유지되어야 한다. 식 (1)을 W_q에 관하여 나타내기 위해서는 미지수 $P(Y)$, $P(D)$, 그리고 $E(N_{D_R})$값이 필요하다. 미지수를 구하기 위해서는 준비기간을 시작할 때의 고객 수(혹은 휴지기간 동안 도착한

고객 수) N_D를 구해야 하며 이의 PGF는 다음의 Lemma 1을 따른다(표기의 편의를 위하여 N_D를 Q_N으로 치환했음).

Lemma 1.

$$Q_N(z)=1+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{i=0}^{N-1}\pi_i z^i.$$

이 때, π_i는 시스템이 휴지기간동안 상태 i를 지날 확률($i=0,1,2,\cdots$)을 나타내며 다음 식이 성립한다. $\pi_0=1$, $\pi_i=\Sigma_{k=0}^{i}\lambda_k\pi_{i-k}$.

증명) 부록 A 참조.

<비고 1> 귀납법으로 증명된 Lemma 1의 결과를 도출한 방법은 다음과 같다. 편의상 $\lambda_k^+=\Pr[\Lambda^+=k]$, $k\geq 1$이라 하면, $P[Q_N=n]$에 대한 재생방정식은 "$P[Q_N=n]=\lambda_n^+ +\Sigma_{k=1}^{n-1}\lambda_k^+ P[Q_{N-k}=n-k]$", $n\geq N$이다. 그리고 해는 "$P[Q_N=n]=\Sigma_{i=0}^{N-1}\pi_i\lambda_{n-i}^+$", $n\geq N$인데, 이를 "$Q_N(z)=\Sigma_{n=N}^{\infty}z^n P[Q_N=n]$"에 대입한 다음 관계식 "$\pi_i=\Sigma_{k=1}^{i}\lambda_k^+\pi_{i-k}$"를 이용하여 간단히 표현한 것이 Lemma 1의 결과이다. Lemma 2의 결과도 유사한 방법으로 도출하였으나 과정이 복잡해서 역시 귀납법으로 증명한다.

N_{D_R}은 N_D의 1, 2차 모멘트를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다(부록 A 참조).

$$E(N_{D_R})=\frac{1}{2}\left[\frac{E(N_D^2)}{E(N_D)}-1\right]-E(\Lambda_R^+). \tag{2}$$

$E(N_{D_R})/E(\Lambda)$는 평균잔여휴지기간을 의미하며, 식 (2)와, 부록 A의 식 (6), 식 (7)을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)}=\frac{\Sigma_{n=0}^{N-1}n\pi_n}{E(\Lambda)\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n}.$$

본 모형의 평균유휴기간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}E(I)&=E(D)+E(Y)=\frac{E(N_D)}{E(\Lambda)}+E(Y)\\&=\frac{1}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n+E(Y).\end{aligned}$$

이 때, $E(D)$는 평균 휴지기간을 의미한다. 미지수 $P(Y)$, $P(D)$는 조건부 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(Y)=P(I)P(Y/I)=\frac{(1-\rho)(1-\lambda_0)E(Y)}{(1-\lambda_0)E(Y)+\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n},$$

$$P(D)=P(I)P(D/I)=\frac{(1-\rho)\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n}{(1-\lambda_0)E(Y)+\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n}.$$

지금까지 얻어낸 미지수를 모두 이용하여 식 (1)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}W_q&=\frac{E(S)}{1-\rho}E(\Lambda_R^+)+\frac{\rho}{1-\rho}E(S_R)+\frac{P(Y)}{1-\rho}E(Y_R)\\&\quad+\frac{P(D)}{1-\rho}\left[\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)}+E(Y)\right]\\&=\frac{E(S)}{1-\rho}\frac{E(\Lambda^2-\Lambda)}{2E(\Lambda)}+\frac{\rho}{1-\rho}\frac{E(S^2-S)}{2E(S)}\\&\quad+\frac{(1-\lambda_0)E(Y^2-Y)+2E(Y)\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n+[2/E(\Lambda)]\Sigma_{n=0}^{N-1}n\pi_n}{2[(1-\lambda_0)E(Y)+\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n]}.\end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)에서 $N=1$이라 하면 W_q는 N정책은 없고 준비기간만을 가진 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간[6, 155]과 일치함을 알 수 있다. 또한, $P(Y=0)=1$이라 하면 W_q는 준비기간은 없고 N정책만을 가진 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간[6, 178]과 일치함을 알 수 있다.

4. N정책과 준비기간을 갖는 휴가형 모형

본 장에서는 복수휴가와 단수휴가를 갖는 시스템을 다루도록 한다. 휴리스틱 방정식은 식 (1)과 동일하며 모형의 차이에 따라 미지수인 N_D, $P(Y)$, $P(D)$, 그리고 $E(N_{D_R})$만 달라진다. 따라서 본 장에서는 차이가 나는 부분만을 언급하도록 하겠다.

<모형 1> 복수 휴가 모형

본 모형에서는 시스템에 있는 모든 고객이 서비스를 받아 바쁜기간이 끝나게 되면 서버는 V시간 동안 휴가를 떠난다. 휴가 후 돌아와서 시스템에 기다리고 있는 고객이 N명 미만이면 다시 V시간의 휴가를 떠나고, 고객이 N명 이상이면 즉시 Y시간 동안의 준비기간을 거쳐 바쁜기간이 시작된다. N_D의 PGF는 다음의 Lemma2를 따른다(표기의 편의를 위하여 N_D를 Q_N으로 치환했음).

Lemma 2.

$$Q_N(z)=1+\frac{\alpha(z)-1}{1-\alpha_0}\Sigma_{i=0}^{N-1}\beta_i z^i.$$

이 때, α_i는 휴가기간동안 i명의 고객이 도착할 확률($i=0,1,2,\cdots$)을 나타내며, $\alpha(z)=V[\Lambda(z)]$는 휴가기간동안 도착하는 고객수의 PGF이다. 또한, β_i는 grand vacation[3]이 상태 i를 지날 확률을 나타내며, 다음 식이 성립한다. $\beta_0=1$, $\beta_i=\Sigma_{k=1}^{i}[\alpha_k/(1-\alpha_0)]\beta_{i-k}$.

증명) 부록 B 참조.

$E(N_{D_R})/E(\Lambda)$는 식 (2)와 부록 B의 식 (8), 식 (9)를 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)}=E(V_R)+\frac{\Sigma_{n=0}^{N-1}n\beta_n}{E(\Lambda)\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n}.$$

또한, 평균유휴기간은 다음과 같다.

$$E(I)=E(D)+E(Y)=\frac{E(N_D)}{E(\Lambda)}+E(Y)$$
$$=\frac{E(V)}{1-\alpha_0}\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n+E(Y).$$

마지막으로 $P(Y)$, $P(D)$는 조건부 확률을 이용한다.

$$P(Y)=P(I)P(Y/I)=\frac{(1-\rho)(1-\alpha_0)E(Y)}{(1-\alpha_0)E(Y)+E(V)\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n},$$

$$P(D)=P(I)P(D/I)=\frac{(1-\rho)E(V)\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n}{(1-\alpha_0)E(Y)+E(V)\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n}.$$

지금까지 얻어낸 미지수를 모두 이용하여 식 (1)을 정리하면 다음과 같다.

$$W_q=\frac{E(S)}{1-\rho}E(\Lambda_R^+)+\frac{\rho}{1-\rho}E(S_R)+\frac{P(Y)}{1-\rho}E(Y_R)$$
$$+\frac{P(D)}{1-\rho}\left[\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)}+E(Y)\right]$$
$$=\frac{E(S)}{1-\rho}\frac{E(\Lambda^2-\Lambda)}{2E(\Lambda)}+\frac{\rho}{1-\rho}\frac{E(S^2-S)}{2E(S)}$$
$$+\frac{(1-\alpha_0)E(Y^2-Y)+[E(V^2-V)+2E(Y)E(V)]\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n+[2E(V)/E(\Lambda)]\Sigma_{n=0}^{N-1}n\beta_n}{2[(1-\alpha_0)E(Y)+E(V)\Sigma_{n=0}^{N-1}\beta_n]}. \quad (4)$$

식 (4)에서 $N=1$이라 하면 W_q는 N정책은 없고 복수휴가와 준비기간만을 가진 Geo^X/G/1 대기행렬 모형의 평균대기시간[1]과 일치함을 알 수 있다. 또한 $\Pr(V=1)=1$이라 하면, W_q는 앞에서 구한 식 (3)과 일치함을 알 수 있다. 이는 식 (3)의 λ_0와 식 (4)의 α_0가 같으며, 식 (3)의 π_n과 식 (4)의 β_n이 같음으로 인해 쉽게 확인할 수 있다.

<모형 2> 단수 휴가 모형

본 모형에서는 시스템에 있는 모든 고객이 서비스를 받아 바쁜기간이 끝나게 되면 서버는 V시간 동안 휴가를 떠난다. 휴가 후 돌아와서 시스템에 기다리고 있는 고객이 N명 미만이면 N명 이상의 고객이 될 때까지 기다리게 되며, 고객이 N명 이상이면 즉시 Y시간 동안의 준비기간을 거쳐 바쁜기간이 시작된다. N_D의 PGF는 다음의 Lemma 3을 따른다(표기의 편의를 위하여 N_D를 Q_N^0으로 치환했음).

Lemma 3.

$$Q_N^0(z)=\alpha(z)+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{i=0}^{N-1}\gamma_i z^i.$$

이 때, γ_i는 시스템이 잠복기간동안 상태 i를 지날 확률 ($i=0,1,2,\cdots$)을 나타내며, 다음 식이 성립

한다. $\gamma_0 = \alpha_0$, $\gamma_i = \Sigma_{k=0}^{i} \alpha_k \cdot \pi_{i-k}$.

증명) 부록 C 참조.

$E(N_{D_R})/E(\Lambda)$는 식 (2)와, 부록 C의 식 (10), 식 (11)을 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)} = \frac{(1-\lambda_0)E(V^2-V)+[2/E(\Lambda)]\Sigma_{n=0}^{N-1} n\gamma_n}{2(1-\lambda_0)E(V)+\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n}.$$

또한, 평균유휴기간은 다음과 같다.

$$E(I) = E(D)+E(Y) = \frac{E(N_D)}{E(\Lambda)}+E(Y)$$
$$= E(V)+\frac{1}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n + E(Y).$$

$P(Y)$, $P(D)$는 조건부 확률을 이용한다.

$$P(Y) = P(I)P(Y/I)$$
$$= \frac{(1-\rho)(1-\lambda_0)E(Y)}{(1-\lambda_0)[E(V)+E(Y)]+\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n},$$
$$P(D) = P(I)P(D/I)$$
$$= (1-\rho)\frac{(1-\lambda_0)E(V)+\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n}{(1-\lambda_0)[E(V)+E(Y)]+\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n}.$$

지금까지 얻어낸 미지수를 모두 이용하여 식 (1)을 정리하면 다음과 같다.

$$W_q = \frac{E(S)}{1-\rho}E(\Lambda_R^+)+\frac{\rho}{1-\rho}E(S_R)+\frac{P(Y)}{1-\rho}E(Y_R)$$
$$+\frac{P(D)}{1-\rho}\left[\frac{E(N_{D_R})}{E(\Lambda)}+E(Y)\right]$$
$$= \frac{E(S)}{1-\rho}\frac{E(\Lambda^2-\Lambda)}{2E(\Lambda)}+\frac{\rho}{1-\rho}\frac{E(S^2-S)}{2E(S)}$$
$$+\frac{\begin{array}{l}(1-\lambda_0)[E(Y^2-Y)+E(V^2-V)] \\ +2E(Y)[(1-\lambda_0)E(V)+\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n] \\ +[2/E(\Lambda)]\Sigma_{n=0}^{N-1} n\gamma_n\end{array}}{2\{(1-\lambda_0)[E(V)+E(Y)]+\Sigma_{n=0}^{N-1}\gamma_n\}}. \quad (5)$$

식 (5)에서 $N=1$이라 하면 W_q는 N정책은 없고 단수휴가와 준비기간만을 가진 Geo^X/G/1 대기행렬 모형의 평균대기시간[1]과 일치함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 이성희 외 2인[1]을 N정책을 포함하여 확장하였다. N정책과 준비기간을 갖는 휴가형 Geo^X/G/1 대기행렬시스템에 대하여 평균대기시간을 간단하게 구하고 휴리스틱 방법론이 유용하게 활용될 수 있음을 보였다. 이는 Chae and Lee[3]가 제안한 휴리스틱 방법이 이산시간 대기행렬시스템에도 유용하게 쓰일 수 있음을 보인 것이다.

휴리스틱 방법론은 본 논문에서 다룬 대기행렬시스템뿐만 아니라 다양한 연속/이산시간 대기행렬시스템의 분석에 널리 활용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] 이성희, 김성진, 채경철, "휴리스틱 방법을 이용한 준비기간을 갖는 휴가형 *Geo^X/G/*1 모형의 평균대기시간 분석", 2006 대한산업공학회/한국경영과학회 춘계공동학술대회.

[2] Bruneel, H. and B.G. Kim, *Discrete-Time Models for Communication System Including ATM*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[3] Chae, K.C. and H.W. Lee, "*M^X/G/*1 Vacation Models with N-Policy : Heuristic Interpretation of the Mean Waiting Time," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.46, No.2(1995), pp.258-264.

[4] Medhi, *Stochastic Models in Queueing Theory*, second edition, Academic Press, 2003.

[5] Hur, S. and S. Ahn, "Batch Arrival Queues with Vacations and Server Setup," *Applied Mathematical Modeling*, Vol.29(2005), pp. 1164-1181.

[6] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol 3 : Discrete-Time Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

부록 A : Lemma 1 증명

$N=1$일 때, $Q_1(z)=[\Lambda(z)-\lambda_0]/(1-\lambda_0)$이므로 $Q_N(z)$는 참이다.
$N=k(k=1,2,3,\cdots)$일 때, $Q_N(z)$가 참이라 가정하면,

$$
\begin{aligned}
Q_{k+1}(z) &= \Sigma_{i=k+1}^{\infty} \Pr(Q_{k+1}=i)z^i \\
&= \Sigma_{i=k+1}^{\infty}\{\lambda_i+\Sigma_{j=0}^{k}\lambda_j \Pr(Q_{k+1-j}=i-j)\}z^i \\
&= \Lambda(z)+\Sigma_{i=0}^{k}\lambda_i z^i[Q_{k+1-i}(z)-1] \\
&= \Lambda(z)+\lambda_0[Q_{k+1}(z)-1]+\Sigma_{i=1}^{k}\lambda_i z^i\left[\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{j=0}^{k-i}\pi_j z^j\right] \\
&= \Lambda(z)+\lambda_0[Q_{k+1}(z)-1]+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{i=1}^{k}\Sigma_{j=0}^{k-i}\lambda_i z^{i+j}\pi_j \\
&= \Lambda(z)+\lambda_0[Q_{k+1}(z)-1]+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=1}^{k}z^n\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i\pi_{n-i} \\
&= \Lambda(z)+\lambda_0[Q_{k+1}(z)-1]+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=1}^{k}z^n(1-\lambda_0)\pi_n
\end{aligned}
$$

$$(1-\lambda_0)Q_{k+1}(z)=\Lambda(z)-\lambda_0+(\Lambda(z)-1)\Sigma_{n=1}^{k}\pi_n z^n$$

$$Q_{k+1}(z)=\frac{\Lambda(z)-\lambda_0}{1-\lambda_0}+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=1}^{k}\pi_n z^n=1+\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=0}^{k}\pi_n z^n.$$

$N=k+1$일 때, $Q_N(z)$가 참이므로 수학적 귀납법에 의하여 $Q_N(z)$의 증명이 완료된다. ■

$$E(Q_N)=\frac{E(\Lambda)}{1-\lambda_0}\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n. \tag{6}$$

$$E(Q_N^2)=\frac{1}{1-\lambda_0}\{E(\Lambda^2)\Sigma_{n=0}^{N-1}\pi_n+2E(\Lambda)\Sigma_{n=0}^{N-1}n\pi_n\}. \tag{7}$$

부록 B : Lemma 2 증명

$N=1$일 때, $Q_1(z)=[\alpha(z)-\alpha_0]/(1-\alpha_0)$이므로 $Q_N(z)$는 참이다.
$N=k(k=1,2,3,\cdots)$일 때, $Q_N(z)$가 참이라 가정하면,

$$
\begin{aligned}
Q_{k+1}(z) &= \Sigma_{i=k+1}^{\infty}\Pr(Q_{k+1}=i)z^i \\
&= \Sigma_{i=k+1}^{\infty}\{\alpha_i+\Sigma_{j=0}^{k}\alpha_j\Pr(Q_{k+1-j}=i-j)\}z^i \\
&= \alpha(z)+\Sigma_{i=0}^{k}\alpha_i z^i[Q_{k+1-i}(z)-1] \\
&= \alpha(z)+\alpha_0[Q_{k+1}(z)-1]+\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i z^i\left[\frac{\alpha(z)-1}{1-\alpha_0}\Sigma_{j=0}^{k-i}\beta_j z^j\right] \\
&= \alpha(z)+\alpha_0[Q_{k+1}(z)-1]+\frac{\alpha(z)-1}{1-\alpha_0}\Sigma_{i=1}^{k}z^i\Sigma_{j=1}^{i}\alpha_j\beta_{i-j} \\
&= \alpha(z)+\alpha_0[Q_{k+1}(z)-1]+[\alpha(z)-1]\Sigma_{i=1}^{k}\beta_i z^i
\end{aligned}
$$

$$(1-\alpha_0)Q_{k+1}(z)=\alpha(z)-\alpha_0-(\alpha(z)-1)+(\alpha(z)-1)\Sigma_{i=0}^{k}\beta_i z^i$$

$$Q_{k+1}(z)=1+\frac{\alpha(z)-1}{1-\alpha_0}\Sigma_{i=0}^{k}\beta_i z^i.$$

$N=k+1$일 때, $Q_N(z)$가 참이므로 수학적 귀납법에 의하여 $Q_N(z)$의 증명이 완료된다. ■

$$E(Q_N)=\frac{1}{1-\alpha_0}E(\Lambda)E(V)\Sigma_{j=0}^{N-1}\beta_j. \tag{8}$$

$$E(Q_N^2)=\frac{2E(\Lambda)E(V)}{1-\alpha_0}\Sigma_{j=0}^{N-1}j\beta_j+\frac{\Sigma_{j=0}^{N-1}\beta_j}{1-\alpha_0}[E(\Lambda^2)E(V)+E^2(\Lambda)E(V^2)-E^2(\Lambda)E(V)]. \tag{9}$$

부록 C : Lemma 3 증명

$$\begin{aligned}
Q_N^0(z)&=\Sigma_{i=N}^{\infty}\Pr(Q_N^0=i)z^i\\
&=\Sigma_{i=N}^{\infty}\left\{\alpha_i+\Sigma_{j=0}^{N-1}\alpha_j\Pr(Q_{N-j}=i-j)\right\}z^i\\
&=\alpha(z)+\Sigma_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^i[Q_{N-i}(z)-1]\\
&=\alpha(z)+\Sigma_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^i\left[\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\Sigma_{j=0}^{N-i-1}\pi_j z^j\right]\\
&=\alpha(z)+\left(\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\right)\Sigma_{i=0}^{N-1}z^i\Sigma_{j=0}^{i}\alpha_j\pi_{i-j}\\
&=\alpha(z)+\left(\frac{\Lambda(z)-1}{1-\lambda_0}\right)\Sigma_{i=0}^{N-1}\gamma_i z^i.
\end{aligned}$$

이 때, Q_N은 휴가가 없는 모형의 N정책을 갖는 Geo^X/G/1 모형에서의 바쁜기간 시작시의 고객수를 나타낸다(부록 A 참조). ■

$$E(Q_N^0)=E(\Lambda)E(V)+\frac{E(\Lambda)}{1-\lambda_0}\Sigma_{j=0}^{N-1}\gamma_j. \tag{10}$$

$$E[(Q_N^0)^2]=E(V^2)E^2(\Lambda)-E(V)E^2(\Lambda)+E(\Lambda^2)\left\{E(V)+\frac{\Sigma_{j=0}^{N-1}\gamma_j}{1-\lambda_0}\right\}+\frac{2E(\Lambda)}{1-\lambda_0}\Sigma_{j=0}^{N-1}j\gamma_j. \tag{11}$$