

## 음수 개념의 이해에 관한 교수학적 분석

우정호\* · 최병철\*\*

본 논문에서는 먼저 음수개념의 내재적 본질이 외형화되는 점진적 형식화의 과정을 역사적인 측면에서 분석하였다. 그리고 음수의 개념장을 가법구조와 승법구조에 측면에서 분석하였으며 역사적 심리학적 분석을 바탕으로 음수개념의 형식성을 이해하기 위한 방안을 모색하기 위해 음수개념의 발달 수준을 설정하였다. 그리고 음수개념의 형식적 본질에 비추어 현행 교육과정에서의 음수 지도 내용을 분석하여 그 문제점을 드러내고자 하였으며, 우리나라 중등학교 학생들의 음수의 이해 상태를 조사 분석하였다. 끝으로, 이러한 분석을 기초로 점진적 수학화 과정, 기호화 과정을 통하여 음수개념의 형식성을 지도하기 위한 구체적인 지도 방안을 제시하였다.

### I. 서 론

학교수학에서 음수 개념의 이해에 큰 어려움이 없는 듯이 여겨지는 이유는 아마도 온도계 모델, 동·서 방향 모델, 이익·손해 모델, 수직선 모델 등이 방향 불은 크기를 나타내는 수로서 정수에 실제성을 부여하고 있기 때문일 것이다. 그리하여, 음수를 학습한 현대인이라면 누구나 ‘음수는 0보다 작은 수’라고 말할 수 있을 정도로 자연수만큼 친숙한 수가 되었지만 인류 역사상 음수는 가장 이해하기 어려운 수학적 개념 중 하나였다. 역사적으로 음수가 출현하여 사용되기 시작한 것은 기원 1세기 경까지 거슬러 올라가지만 음수의 형식적 본질이 파악되어 음수가 수로 인정받게 된 것은 불과 200년도 되지 않는다.

음수는 역사적으로 뱀셈과 방정식의 해를 구

하는 과정에서 나타났다. 방정식  $x + a = b$ 에서  $a < b$ 인 경우에는 자연수 해를 구할 수 있지만  $a > b$ 인 경우에는 자연수 범위에서 해를 구할 수 없으며 음수가 필요하게 된다. 그러나 고대 그리스에서는 그와 같은 수를 논리적으로 받아들이지 못하였다. 그로 인하여 음수는 서구에서 오랫동안 거부되었다. 0 곧 ‘없는 것’보다 작은 양은 존재하지 않으며,  $1:-4=-5:20$ 과 같은 비례관계의 의미를 설명하기 어렵다. 그리고  $4 \times (-3)$ 은 어떻게 설명할 것인가? 이러한 문제로 인하여 음수는 거의 200년 동안 논란의 대상이 되었고, 19세기 중반에 이르러 비로소 음수는 상대적인 양이라는 인식을 벗어나 형식적인 수라는 인식에 이르게 되었다(Arcavi, 1985).

이와 같이 인류가 음수 개념의 본질인 형식성을 이해하는 과정은 쉽지 않았다. 이로부터 우리는 학생들이 음수 개념의 형식성을 바로 이해할 수 있으리라고 기대하기는 어려우며,

\* 서울대학교, wjh@plaza.snu.ac.kr

\*\* 서울사대부중, choibc03@snu.ac.kr

음수 개념을 학습하는 과정에서 학생들이 인지적인 장애를 겪을 것임을 예상할 수 있다. 더구나 구체적인 모델을 통해 음수 학습을 한 학생들의 경우에도 Gallardo(1994)의 연구에 의하면 학생들은 3-(-5)를 3-5로 계산하여 2라고 답하는 경향이 있으며, Peled et al.(1989)의 연구에서는 학생들이 -5+8을 -(5+8)로 계산하여 -13이라고 답하는 것을 발견하였다. 학생들에게서 발견되는 이러한 오류의 이면에는 음수 학습에서 인지적 장애를 일으키는 근본적인 원인이 있는 것으로 이해될 수 있다.

그러나, 음수 학습 지도에 관하여 이루어진 선행 연구를 살펴보면, 음수 개념의 학습에서 일상적 경험과 일상적 지식이 유용하게 작용하는가에 대한 연구(Human, P. & Muraay, H. 1987; Peled et al., 1989; Mukhopadhyay et al., 1990, Linchevski et al., 1999)와 음수를 구체적 모델을 이용하여 지도하는 방안에 대한 연구(Roby, 1981; Janvier, 1985; 신유신, 1995)가 주를 이루고 있다. 이러한 연구들은 음수 개념의 초기 도입 단계에 유용한 지도 방안을 제안하고 있으나, 음수의 내재적 본질인 형식성의 지도 문제를 다루고 있지는 않다. 형식불연의 원리를 이용하여 음수의 본질인 형식성을 드러내어 지도해야 한다는 주장이 Freudenthal(1973, 1983)과 Hefendehl-Hebeker(1991)에 의하여 제기되기는 하였으나, 그에 대한 체계적인 연구와 구체적인 지도방안에 관한 연구는 아직 이루어지지 않았다.

이에 본 논문에서는 음수 개념의 본질인 형식성을 지도하기 위한 구체적인 방안을 구축하고자 한다. 이를 위하여 먼저 음수 개념의 본질인 형식성의 이해 과정에 대한 역사적 현상학적 고찰과 음수 개념 이해의 심리학적 분석을 토대로 음수 개념의 발달 수준을 설정하였다. 그리고 이러한 분석을 기초로 우리나라 교육과정에서의 음수 지도 내용과 우리나라 중등

학교 학생들의 음수의 이해 상태를 조사 분석하였다. 그리고 음수 개념의 기호화 과정에 대한 분석을 기초로 음수 개념의 형식성을 지도하기 위한 방안을 제시하였다.

## II. 음수 개념의 역사적 현상학

학교수학은 그 의미를 명확히 드러내지 않는 ‘닫힌’ 지식이며 무엇보다도 교수학적 분석을 통해 그 표층 이면에 있는 기본적인 의미를 드러내는 것은 수학교육의 가장 중요한 과제 가운데 하나이다. 이를 위해 Poincaré, Klein, Freudenthal 등에 의해 강조되어 온 것이 학교수학의 역사-발생적 분석이다.

이와 같은 관점에서 볼 때, 음수 개념의 역사-발생적 분석은 그 표층 이면에 있는 음수 개념의 본질인 형식성이 어떻게 외형화되었는지에 대한 과정을 인식론적 측면에서 살펴볼 수 있게 한다. 이에 다음에서는 음수 개념의 본질에 대한 이해의 과정을 다섯 개의 단계로 나누어 살펴보고 그 과정에서 나타난 인식론적 장애와 극복의 과정을 분석하고자 한다.

### 1. 이산적인 양에 대한 산술

아리스토텔레스는 양을 이산적인 것과 연속적인 것으로 구분하였다(Aristotle, categories, 4b, 20). 아리스토텔레스가 수를 이산적인 것으로 본 이유는 그의 수 관념이 자연수 체계에 근거하고 있었기 때문이다. 자연수는 각각의 수가 독립적이며 하나씩 분리하여 셀 수 있는 속성이 있다. 그러나 수를 이산적인 양으로 보고 기하학의 관점에서 수를 다룬 것은 산술의 발전을 저해하는 요인이 되었다. 수는 이산적인 한계를 벗어나지 못하였고, 이러한 한계는 바

로 그 시대의 인식론적 장애였던 것이다.

[장애 1] 수는 이산적인 양이다.

이러한 양적인 사고에서 두 수의 곱은 동수 누가의 관계로 이해된다. 이것은 유클리드의 원론 VII장, 정의 15에서 살펴볼 수 있다. “어떤 수에 다른 수를 곱하는 것은 피승수를 승수의 단위의 개수만큼 누가하여 더하는 것이다 (Euclid's Element VII, Definition 15)”. 이러한 생각은 수를 이산적인 양으로 보았기 때문에 당연한 것으로 받아들여졌다. 이로부터 이산적인 양의 관점에서 다음과 같은 인식론적 장애가 있었음을 알 수 있다.

[장애 2] 두 수의 곱은 반복된 덧셈이다.

이와 같은 이산적인 양의 관점에서는 음수의 곱은 생각조차 할 수 없는 상황이 야기된다. 음수 곱하기 양수는 동수누가로 설명이 가능하지만, 양수 곱하기 음수 또는 음수 곱하기 음수는 동수누가로 설명이 불가능하다. 예를 들어,  $(-3) \times 5$ 는 동수누가를 이용하여  $(-3) \times 5 = (-3)+(-3)+(-3) +(-3)+(-3)$ 이 되지만  $5 \times (-3)$ 는 동수 누가로 설명할 수 없다. 유클리드의 수의 관념은 이산적인 양에 제한되어 있었기 때문에 이러한 문제에서 비켜나갔다. 음수는 고대 그리스인들의 크기 관념에 바탕을 둔 기학학적인 사고 영역의 밖에 있었다.

양적 사고에서 나타나는 또 다른 장애는 비에 대한 관점과 관련된 것이다. 유클리드는 동종의 크기에 대해서만 비를 다루고 있다.

원론 V장, 정의 3: 비는 같은 종류의 두 양 사이의 크기에 관한 일종의 관계이다(Gwinn, 1990).

이와 같은 동종의 크기에 대한 비 ‘내적인 비’만을 다루게 됨으로써, 시간에 대한 경로의 비는 직사각형에 선분을 더하는 것처럼 무의미한 것으로 간주되었다. 동종의 연속적인 크기를 곱하면 그 결과는 다른 종의 크기가 된

다. 이와 같은 종류의 두 양의 비라는 관점은 또 하나의 인식론적 장애가 된다.

[장애 3] 비는 동종의 양 사이의 비 곧 내적인 비이다.

[장애 3]에 의해서 음수는 내적인 비로 이해될 수 없다. 산술의 관점에서 볼 때 음수의 비는 이해될 수 없는 인식론적 장애인 것이다. [장애 3]의 인식론적 장애는 14세기에 Oresme가 자연 현상을 수학적으로 설명하려는 시도를 통해 서서히 변화된다. Oresme은 등가속운동에 의한 운동 거리가 초속도와 마지막 속도의 산술평균인 등속도에 의한 운동 거리와 같음을 기하학적인 방법을 사용하여 설명하였다. 그는 또한 초속도가 0인 등가속도 운동에서 거리는 시간의 제곱에 비례한다는 것을 보이고 있다(Sierpinska, 1991). 그러나 [장애 3]이 17세기까지 여전히 영향을 미치고 있었다는 것을 Anauld의 음수 사용에 대한 비판<sup>1)</sup>에서 확인할 수 있다.

## 2. 초기 대수에서 음수의 이해

중국에서의 음수 사용은 음수가 가진 의미보다는 음수를 사용하여 계산을 쉽게 할 수 있다는 효율성에 바탕을 두고 있다. 음수는 세금의 계산이나 금전의 문제에서 지불해야 할 상대적인 양으로 다루어졌다. 즉 음수를 하나의 대상으로 다루기보다는 어떤 양의 값에 대한 상대적인 값으로 다룬 것이다. 고대 그리스인들이 양적인 측면에서 음수를 수용하지 못했던 것과 달리, 고대 중국인들은 양적인 맥락에서 발생하는 음수에 대한 논리적인 문제보다는 음수를 이용한 계산의 편의성을 중시해 실제적인 맥락에서 음수를 다루었다.

그러나 상대적인 수로서 음수를 이해하는 것

1) 3절 “기호의 사용과 음수의 정당성 논쟁” 참조

은 음수가 가진 내재적 질서의 일부를 이해하는 것에 지나지 않으며, 이와 같은 부분적인 이해는 16세기 이후 음수에 대한 많은 논쟁을 불러일으킨다. 한 예로 불란서 작가 Stendhal(1783~1843)은 “어떻게 5,000,000프랑을 10,000프랑의 빚을 500프랑의 빚만큼 곱함으로써 얻을 수 있겠는가?(Hefendehl-Hebeker, 1991)”라고 반문하며 음수의 사용을 반대하였다. 상대적인 수의 개념으로는 음수의 곱을 설명할 수 없기 때문이다. 따라서 음수를 상대적인 수로 보는 것은 하나의 인식론적 장애로 작용하며, 그 장애를 극복하지 않고서는 음수의 본질에 다가갈 수 없는 것이다.

[장애 4] 음수는 양적인 문맥에서 상대적인 수이다.

3세기경 그리스 수학자 Diophantus는 그의 책 「Arithmetica」에서 방정식에 관한 기록을 남기고 있다. 그의 방식은, 고대 중국에서 음의 계수를 이용한 것과 달리, 음의 계수를 양의 계수로 바꾸어 계산하였다는 점에서 차이가 있다. Diophantus는 방정식의 계산 과정에서 음수를 발견하였지만 음수를 방정식의 유용한 해로 인식하지는 못했다. 그의 책 Arithmetica에서  $4x+20=4$ 와 같은 방정식은 ‘불가능한’ 해  $x=-4$ 를 가지므로 ‘불합리한’ 것으로 여겼다. 그는 음수를 단순히 계산과정에서 만들어지는 부산물로 여겼으며, 이로 인하여 방정식은 자연수 또는 양수 범위에서만 다루어지게 되고 음의 해는 배제되어 일반해에 대한 인식이 결여되게 되었다. 그 결과 음수가 방정식의 해로서 지닌 의미와 음수의 형식성을 이해하지 못하였다.

[장애 5] 음수는 방정식의 해가 될 수 없다.

음수가 방정식의 해가 될 수 없다는 인식론적 장애는 기하학적 방법에 의존하여 방정식의 해를 연구한 데에 기인한다. 이것은 대수적인 기호가 발명되기 전에 이차방정식의 풀이를 기

하학적인 방법으로 설명하고 정당화할 수밖에 없었던 그 당시 지식의 인식론적 장애를 보여주는 예이다.

### 3. 기호의 사용과 음수의 정당성 논쟁

16세기 이탈리아 수학자 Cardano(1501~1576)의 삼차방정식의 일반해에 대한 연구에서 음수에 대한 부정적인 태도에 변화가 일어난다. Cardano는 그의 저서 「Ars Magna」에서 삼차방정식을 13개의 유형으로 정리하여 각각의 경우의 해에 대한 증명을 기하학적 방법으로 자세하게 설명하고 있다. 오늘날에는 하나의 방정식  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 으로 일반화하여 그 해를 구할 수 있음에도 불구하고, Cardano가 13개의 유형으로 분류하여 각각의 경우의 일반해를 구한 것은 방정식의 해를 기하학적인 도형을 사용하여 입증하는 이전의 방법을 사용했기 때문이다.

Cardano가 음수를 상대적인 양의 개념으로서 방정식의 근으로 다루었던 반면, Descartes (1596-1650)는 문자를 양 또는 음의 값을 나타내는 것으로 사용하였다(Chrystal, 1964). Descartes는 Cardano와 마찬가지로 음수를 부족한 양으로 보았다. 그러나 Cardano가 양의 관점에서 음수를 다룬 것과는 달리, Descartes는 음수를 방정식에서 직접적으로 사용하였다. 인식론적 장애 [장애 5]는 Descartes에 이르러 새로운 이해에 이르게 된 것이다. 그러나 Descartes 역시 음수의 대수적인 측면을 보지는 못하였으며, 단지 거짓 근으로서 방정식에서 나타나는 수로 여겼다. 꽤 오랫동안 수학자들도 음수를 방정식의 해로서 형식적으로 접근하려는 생각을 하지 못했다. Newton (1642~1727)은 일반산술(Universal Arithmetic: A Treatise od Arithmetical Composition and Resolution)에서 음수를 상대적인 측면에서 옹호하고 있지만 이러한 설명이 음의 양을 정당화하

는 데는 논란의 대상이 되었다.

Arnauld는 ‘없는 것보다 작은 양’을 인정할 수 없었다. 양의 관점에서 작은 수의 제곱이 큰 수의 제곱과 같다는 것은 있을 수 없는 일이며 두 음수의 곱이 양수가 되는 것을 인정하

면  $\frac{1}{-4} = \frac{-5}{20}$  이 되어 큰 수와 작은 수의 관계가 작은 수와 큰 수의 관계와 같다는 모순이 일어나는 것이다(Arcavi, 1985). 음수에 대한 Arnauld의 사고는 고대 그리스에서 나타난 [장애 3]의 인식론적 장애를 극복하지 못하였던 것이다. 음수를 상대적인 수 [장애 4]로 사용하는 것은 비례의 문제 [장애 3]뿐만 아니라 크기의 문제 [장애 1]을 해결할 수 없기 때문에 Pascal, Arnauld에 의하여 거부되었다.

#### 4. 기호대수<sup>2)</sup>에서의 음수의 이해

17세기에 이르러 해석기하학이 탄생되면서 좌표계의 일반화와 도형의 방정식의 일반적인 타당성에 대한 요구로 음수의 존재를 용인하지 않을 수 없게 되어갔다(Kline, 1972). 그러나 수 많은 반대자들이 납득할 만한 타당한 수학적 논증을 제시해야 하는 것이 과제로 남아 있었다.

비유클리드기하학이 용인되면서 19세기 중엽에 이르러 수학계에는 추상대수의 싸이 트고 있었다. 영국의 수학자 Peacock(1791-1858)은 음수와 그 연산은 양적인 관점에서 설명될 수 없으며 대수적 방법을 통해서 형식화되어야 한다고 보았다. 1830년 Peacock은 「Treatise on algebra」에서 대수를 산술대수와 기호대수로 구분하고 음수를 기호대수의 관점에서 형식적인 수로 이

해하였다. 그는 산술대수를 수 자체보다는 음이 아닌 수를 상징하는 문자를 사용하는 대수, 즉 보편적 산술로 정의하고, 기호대수를 어떤 특별한 해석 없이 기호를 사용할 수 있는 대수라고 정의하였다.

Peacock은 분배법칙  $a(b-c)=ab-ac$ 이 산술에서 양수  $a, b, c$ 에 대하여  $b \geq c$ 일 때만 성립하지만 기호대수에서는 기호에 관한 어떤 제한도 없이 성립된다고 말하고 있다(Allaire, P. R. 1997, Katz, V., 1998). Peacock은 이러한 원리를 형식불역의 원리(Principle of Permanence of equivalent Forms)라고 부르고, 음수의 연산법칙을 다음과 같이 설명하였다. 음수와 양수의 곱이 음수, 음수와 음수의 곱이 양수가 되는 것은 산술대수의 성질에서  $(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$ 로부터  $a=d=0$ 을 대입하면  $(-b)c = -bc$ 가 되고  $a=c=0$ 을 대입하면  $(-b)(-d) = bd$ 로 설명될 수 있다(Katz, 1998).

[장애 6] 한 수 체계는 형식불역의 원리에 의하여 보다 포괄적인 수 체계로 확장 가능하다.

그러나 Peacock의 형식불역의 원리는 이론이 라기보다는 가정으로 여겨졌으며 형식불역의 원리가 적용이 되지 않은 반례에 의하여 수 체계 확장의 보편적 원리로 받아들이지 않게 된다<sup>3)</sup>. Peacock이 제기한 형식불역의 원리를 바탕으로 한 수의 형식적 확장으로 음수의 존재성은 인정받게 되지만 형식불역의 원리가 모든 수 체계로 확장 가능한 것은 아니라는 것이 알려지게 되었다. 현대적인 공리론적 추상수학의 발달로 수 체계를 공리적으로 접근해야 할 필요성이 보다 명확해 졌으며, 이는 곧 음수를 수의 대수적 구조의 측면에서 보는 공리체계의

2) 여기서 말하는 기호대수는 Peacock의 산술대수와 기호대수의 구별에 의한 기호대수를 말하는 것으로 Nesselmann의 대수의 단계를 구분한 기호적 대수와 구별된다.

3) 형식불역의 원리는 자연수에서 실수 체계까지는 이전 체계의 연산과 순서 관계를 보존하지만, 그 이상의 수 체계에서는 모든 형식을 보존하지는 못하는 것으로 드러났다. 예를 들면, 복소수에서는 순서관계가 보존되지 않으며 사원수에서는 곱셈의 교환법칙이 보존되지 않는다.

구성 단계에 이르게 하였다.

### 5. 공리체계의 구성

Peacock에 의한 음수와 그 연산의 대수적 설명은 음수에 대한 논쟁에 획기적인 전환점을 마련하였고, 음수는 이제 형식적인 수 체계 안에서 자유롭게 되었다. De Morgan(1806-1871)은 「On the Study and Difficulties of Mathematics」에서 음수를 양의 개념이 아닌 순수한 대수의 기호적 본성을 가진 수로 받아들였다. 그는 대수 체계는 기호의 특정한 해석과 독립된 완전히 새로운 연산 규칙 또는 공리의 용어로 정의될 수 있다고 생각하였다. 그는 대수체계 내에서의 의미, 해석, 그리고 내용을 강조하였던 것이다. 음수와 그 연산 그리고 복소수를 대수 체계로 정의하려는 시도는 Hamilton에 의해서 완성되게 된다(Arcavi, 1985). Hamilton은 수를 공리체계로서 다루었다. 이후 Weierstrass, Dedekind와 Cantor에 의해서 실수체계에 대한 논리적 기초가 완성되었다. 이로써 음수는 형식 체계 안에서 그 체계를 이루는 대상으로서 의미를 갖게 되었다.

## III. 음수 개념의 심리학적 고찰

인류는 음수의 본질인 형식성을 이해하기 위하여 실로 오랜 동안에 걸쳐 인식론적 장애를 극복해야 하였다. 그 만큼 음수의 본질을 이해한다는 것이 쉽지 않았던 것이다. 음수를 받아들이지 못한 것은 몇 사람에게서 나타난 현상이 아니었으며 어느 한 지역에 국한된 문제도 아니었다. 그것은 인식론적 장애였으며 그 인식론적 장애를 극복하지 않고서는 음수를 수로서 받아들일 수 없었던 것이다.

이러한 어려움은 실제로 음수를 학습하는 학

생들도 마찬가지로 당면할 것으로 예상된다. 더구나 흔히 학생들이 음수 학습에서 다루게 되는 상황은 단일한 요소로 이해될 수 있는 것이 아니라 다양한 요소들이 얹혀 개념망을 이루고 있으므로 음수의 이해는 더욱 어려운 것이며, 특히 구체적인 상황 모델과 형식적인 설명을 혼용하는 음수 지도를 통해 음수를 처음 배우는 학생들이 음수 개념을 이해하는 것은 결코 쉽지 않다. 이에 다음에는 음수의 개념장 분석을 통하여 음수 개념 이해의 어려움을 살펴보고, 음수 개념의 본질이 외형화되는 단계를 설정하기 위하여 Freudenthal과 van Hiele의 이론을 고찰할 것이다.

### 1. 음수의 개념장

Vergnaud는 개념의 본질을 어떤 상황, 그 상황을 다루는 조작적 불변자, 그 상황을 표현하는 기호적 표현의 집합으로 정의하였다.

개념은 세 가지 요소의 집합으로 이루어진 순서쌍이다.

$$C = (S, I, S)$$

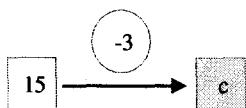
여기서  $S$ 는 개념을 의미 있게 만드는 상황의 집합이고  $I$ 는 이러한 상황을 다루기 위해 인식하고 사용할 수 있는 조작적 불변자이며  $S$ 는 기호 표현(자연언어, 그림, 그래프, 대수...)의 집합이다(Vergnaud, 1996, p.238).

Vergnaud(1996)에 따르면 개념장은 밀접하게 관련된 한 묶음의 개념이며, 그 개념을 의미 있게 하는 상황들의 모임이고, 그 개념을 구성하는 불변자들의 모임이며, 개념, 성질, 그리고 그것들을 의미 있게 하는 상황을 나타내는 데 사용되는 기호 표현의 모임이다.

이와 같은 맥락에서 보면 음수 개념의 개념장 분석을 통하여 두 가지 중요한 결과를 도출 할 수 있을 것으로 보인다. 하나는 음수 개념

이 매우 다양한 복합적인 개념과 관련된 개념들이기 때문에 단일한 요소로 이해될 수 있는 단순한 개념이 아니라는 것이다. 다른 하나는 음수 개념을 학습하는 데 유용한 문제 상황을 추출할 수 있다는 것이다.

Vergnaud(1982)는 가법 구조의 문제 상황을 6가지 범주<sup>4)</sup>로 분류하였는데, 그 범주에 따르면 변환의 관점에서의 음수의 덧셈은 두 측도의 합성을 제외한 나머지의 범주로 설명될 수 있다. 그는 동적인 관계와 정적인 관계를 구분하고 이것을 변환과 관계라는 용어로 나타내고 있다. 그러나 이러한 구별은 두 측도의 변환과 두 변환의 합성으로 통일될 수 있다. 두 측도의 변환에 대한 예를 들면,  $15 + (-3) = 12$ 는 15가 변환 (-3)에 의하여 12로 대응되는 사상으로 설명된다. 즉, 함수  $f: x \rightarrow f(x)$ 와 같은 맥락으로  $15 + (-3)$ 은  $-3: 15 \rightarrow 15 + (-3)$ 과 같이 일항연산으로 표현할 수 있다.

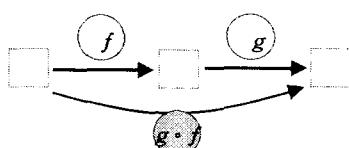


[그림 III-1] 두 측도의 변환

한편,  $(+8) + (-9) = -1$ 은 두 개의 변환에 대한 합성으로 다음과 같이 설명할 수 있다.

$$f: x \rightarrow x + (+8), g: x \rightarrow x + (-9)$$

$$g \circ f: x \rightarrow x + (+8) + (-9)$$



[그림 III-2] 변환  $f$ 와  $g$ 의 합성

Vergnaud의 가법구조에서 변환  $+b$ 의 집합<sup>5)</sup>은 합성 연산에 대해 닫혀있고 결합법칙과 교환법칙이 성립하는 가환군을 이루게 된다.

이상의 내용을 정리하면, 음수 개념의 가법구조의 개념장은 자연수, 상태, 변환, 관계, 상대적인 수, 뱀셈, 합성, 역변환, 방정식, 가역성, 가환군이 상호 관련된 개념의 집합이다. 이것은 가법구조에서 살펴본 음수 개념이 매우 다양한 개념 요소들과 관계망을 이루고 있다는 것을 말해 준다.

곱셈과 나눗셈은 승법적 구조의 요소이다. 승법적 구조는 부분적으로 가법적 구조와 관련이 있지만 덧셈으로 환원할 수 없는 근본적으로 다른 체계라고 할 수 있다. Vergnaud는 문제 상황에서의 승법적 구조를 분석하는 데 곱셈을 ‘측도의 동형’, ‘측도의 곱’, ‘다중 비례’의 세 가지 유형으로 분류하였다. 그 중 ‘측도의 동형’ 유형의 문제 상황을 통해 상대적인 수로서의 음수의 승법구조를 분석할 수 있다. 두 집합  $M_1, M_2$ 에서  $b > 0$  이거나  $b < 0$ , 또는  $a > 0$  이거나  $a < 0$ 인 경우에 대하여 문제 상황은 4가지로 분류할 수 있고 스칼라 연산자 또는 함수 연산자를 이용하여 상대적인 수로서의 음수의 승법구조를 설명할 수 있다.

음수 개념의 승법구조는 변환의 집합으로 볼 수 있다. 그 집합은 합성연산에 대해 닫혀있고 결합법칙이 성립하며 교환법칙이 성립하며 항등원이 존재한다. 변환  $\times b$ 의 집합에서  $b$ 가 정수라면 그 역원은 존재하지 않지만 유리수로 확장하면 역원이 존재하게 되어 가환군을 이루게 된다. 따라서 음수의 개념장은 승법구조에서 비례관계를 갖는 측도, 스칼라 연산자, 함수

4) 범주 I: 부분-부분-전체, 범주 II: 상태-변환-상태, 범주 III: 상태-관계-상태, 범주 IV: 두 변환의 합성, 범주 V: 관계-변환-관계, 범주 VI: 관계-관계-관계

5) 변환  $+b$ 는 <그림 III-2>에서와 같은 변환  $f$ 를 말한다. 이때,  $b$ 는 정수, 유리수, 실수, 또는 복소수와 같은 집합의 원소를 말한다.

연산자, 선형사상, 변환, 자연수, 상대적인 수, 가역성, 유리수, 가환군 등이 상호 관련된 개념들의 집합이다.

이렇듯 음수 개념의 이해는 단일한 개념이 아니라 가법구조와 승법구조의 개념 요소들이 개념망을 이루는 복잡한 개념군의 이해를 전제로 한다. 따라서 음수 개념의 이해가 심리적인 측면에서도 매우 복잡하다는 것을 확인할 수 있다.

## 2. 점진적 수학화와 사고 수준 이론

Freudenthal(1973)에 따르면 수학화란 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 경험을 체계화시켜 나가는 것을 말한다. 그에 의하면 수학화 활동이란 현상으로부터 경험을 조직할 수 있는 수평적 수학화와 그것을 다시 새로운 형식으로 조직화할 수 있는 수직적 수학화가 일어날 수 있는 활동을 모두 포함하는 것이다. 수학적 개념이 발달하는 과정은 이러한 수학화 활동을 통한 수학화의 과정을 의미한다. 이것은 기존의 수학 학습-지도에서 개념 획득을 위한 연역적 체계에 의한 형식화된 개념을 도입하거나 그것을 단순히 구조적인 관점에서 초등화하여 도입하려는 것과는 정반대의 것이라 할 수 있다. 전자의 경우는 학습자에게 수학적 개념을 인지양식에 동화되도록 하지 못하고 학습자 밖에 머무르게 하여 오히려 수학적 개념을 형성하는 데 방해가 되거나 지체되도록 하기 쉽다(정영옥, 1997). Freudenthal의 수학화 이론은 이러한 문제점을 극복할 수 있는 수학적 개념 형성을 위한 올바른 방향을 제시해 준다고 볼 수 있다.

수학화 과정은 현실 내의 풍부한 문맥 내에서 단순화 과정을 통해 비본질적인 요소를 제거하고 그 문맥 내의 본질을 이해하는 활동으로

그것은 현실적인 상황 또는 이미 수학적으로 조직화된 상황들 사이에 본질을 파악하는 과정이다. 이것은 여러 가지 예를 통하여 또는 하나의 전형을 통하여거나 도식화를 통하여 일반화에 이르는 과정을 포함한다. 일반화된 수학적 대상과 조작은 점차적으로 간결화되고 용축되어 기호와 상징체계에 의한 형식화가 이루어지고 마지막으로 여러 가지 활동에 대한 반성을 통하여 수학적 사고 체계를 바라볼 수 있는 공리체계에 이르게 된다(Freudenthal, 1991).

이러한 과정은 현상을 조직하는 수단으로서의 본질을 드러내는 내용과 형식, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준 상승이 이루어지는 불연속적인 특징을 갖는 발달 과정이며(정영옥, 1997), 본질은 이러한 점진적 수학화의 활동을 통하여 점차 보다 명확히 이해될 수 있는 것이다.

이러한 수학화 활동을 통한 구체적인 학습 방법의 기초 이론을 제시한 것이 van Hiele의 기하 학습수준 이론이다. van Hiele의 기하 학습 수준에 관한 연구는 Freudenthal의 수학화 학습 과정에서 나타나는 불연속적인 특징에 주목하여 기하학습에 있어서 수학화 활동의 위계를 연구 제시한 것이다. van Hiele의 기하 학습수준 이론은 Piaget의 인지발달 이론과 Freudenthal의 점진적 수학화 이론을 수학적 지식의 학습과정으로 구체화한 이론이라고 볼 수 있다. 그것은 기하학습 영역에 한정된 것이 아니라 수학의 모든 영역으로 확장하여 수학적 개념의 학습수준으로 일반화 될 수 있다고 van Hiele는 말하고 있다. van Hiele는 기하 학습수준 이론을 일반화하여 수학적 사고 수준을 시각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역체계를 파악하는 수준, 논리적인 법칙의 본질을 파악하는 수준으로 구분하고 수나 함수 등의 학습수준을 거론하고 있으나 그에 대한 상세한 논의는 하고 있지 않

다(van Hiele, 1986). 그러나 van Hiele의 기하 학습수준 이론은 도형을 형식적 관점에서 이해하기 위한 점진적 형식화의 과정을 제시하고 있다는 점에서 음수 개념의 형식성을 이해하기 위한 점진적 수학화의 과정에 대한 모델을 제시해 준다고 할 수 있다.

## IV. 음수 개념의 발달수준과 학습내용 분석

앞에서 역사 발생적 분석과 심리학적 분석으로부터 이 장에서는 음수 개념의 내재적 질서가 외형화되는 단계를 보다 분명히 하고 이를 음수 개념의 발달수준으로 설정하는 시도를 할 것이다. 또한 이러한 음수 개념의 발달 수준에 근거하여 학교수학에서 음수 지도를 어떻게 하 고 있는지를 현행 중 고등학교 수학 교과서 분석을 통하여 살펴보자 한다.

### 1. 음수 개념의 발달수준

#### · 일상적 시각적 수준

아동은 일상적인 맥락에서 자발적으로 발달된 지식으로 상대적인 양의 관념을 갖게 된다. 예를 들면 기상 캐스터의 “서울과 수도권의 아침 기온은 영하 10도이고 오후에는 영하 2도가 되겠습니다”라는 일기 예보에서 영하라는 용어는 영상의 상대적인 관념으로 자연스럽게 이해된다. 그리고 현재 위치에서 동쪽 3km와 서쪽 3km 지점은 서로 상대적인 관념임을 알 수가 있다. 그러나 이 수준의 아동은 양적인 맥락으로 이해하거나 시각적인 의미에서의 구별을 할

뿐 그것을 새로운 수로 표현하지 못한다.

#### · 상대적인 수 개념을 구문론적으로 다루는 수준

이 수준은 음수를 상대적인 양의 관념을 나타내는 수로 이해하는 단계이다. 이는 역사적으로 볼 때 중국과 인도, 아랍의 실용적 대수에서 나타나는 것과 같이 음수를 상대적인 수로 사용하는 단계이다. 상인들이 자산에 대하여 부채를 상대적인 양의 개념으로 보고 그것을 상대적인 수로 사용했던 것과 유사하게 학생들은 일상적인 문제 상황에서 음수를 상대적인 수로 인식하게 된다. 이러한 인식은 학습을 통하여 온도계 상황, 자산과 부채 상황, 시간-위치-속력의 상황에서 그 결과를 쉽게 음수로 표현하도록 돋는다. 학생들은 상대적인 수로서 음수를 이해한 후 구문론적으로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈으로 정확한 부호를 사용하여 표현하게 된다.

#### · 기호대수의 수준

Peacock은 산술 대수의 일반적인 원리를 기호대수에 적용하여 음수의 연산을 설명하였다. Freudenthal(1973)은 양수에 대한 산술의 기본구조를 만족하면서 수를 확장하는 ‘형식불역의 원리’를 ‘대수적 원리(the algebraic principle)’라 부르고 음수의 연산은 이 원리에 의해서 자연스럽게 설명된다고 강조하고 있다. 이러한 역사적 인식론적 맥락과 유사하게 학생들은 상대적인 수로서 음수의 사칙연산을 조작하다가 그러한 조작의 일반성에 대한 의문을 갖기 시작하고<sup>6)</sup>, 인지적으로 자연수와 그 연산 구조의 확장에 의한 음수의 연산을 구성할 수 있는 조작의 수준에 이른다.

형식불역의 원리에 의한 조작은 일상적 맥락에 의존하지 않고 음수와 음수의 연산을 정당

6) 실제로 그런 의문이 자발적으로 일어난다고 보기는 어렵다. 그것은 비자발적 지식의 학습에 의한 자각에 의해서 발생하는 경향이 높다. van Hiele(1986) 역시 한 수준에서 다음 수준으로의 이행의 과정을 생물학적 성숙에 의한 자발적인 것이기보다는 학습에 의한 것이라고 말하고 있다.

화한다는 점에서 사고의 새로운 수준이라고 할 수 있다. 그러나 학생들은 아직 그런 구성을 가능하게 하는 사고의 수단에 대해서는 의식하지 못한다. 이를테면  $(-3)+(-4)$ 의 계산에서 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 기본성질 곧, 공리로서 의미가 있다는 것을 모른다.

#### · “공리적” 이해 수준

음수를 기호 대수로 이해하는 것은 음수의 존재성과 조작적 특성을 일반화하고 정당화한다는 점에서 새로운 사고의 전환이며 개념의 발달이다. 그것은 산술과 대수의 법칙을 수단으로 하여 조직된 조작의 결과이다. 그러나 이 수준에서는 사고의 수단으로서의 본질을 보지 못한다. 즉, 기호 대수의 이해 수준에서는 ‘기본성질’에 대한 이해가 결여되어 있다. 그것은 “공리적” 이해 수준에서 가능하며, 학생들은 이전 수준에서 현상을 조직했던 사고의 수단을 사고의 대상으로 볼 수 있게 된다. 이 수준에서는 ‘산술의 구조는 보편적인 형식, 다시 말해서 실수의 기본 성질에 의해서 설명이 가능하다’는 이해에 이르게 된다.

#### · 공리체계의 이해에 기초한 음수의 본질 파악 수준

자연수 체계에서 0보다 작은 수는 존재할 수 없으며 작은 수에서 큰 수를 뺄 수도 없다. 그것은 ‘두 자연수의 차’라는 새로운 수학적 대상에 의해 구성된 정수 체계에서 설명이 가능하다. 정수 체계에서 음수는 자연수의 순서쌍의 동치류에 의해 구성된 수학적 대상이며 정수 체계의 연산의 법칙을 만족하는 대상이다. 정수 체계에는 자연수 구조와 동형을 이루는 부분 집합이 존재하며 자연수의 연산법칙을 보존한다는 점에서 확장된 수 체계이다. 또한 유리수 체계는 정수 체계의 확장이지만 다른 구조를 가지고 있으며 정수 체계는 유리수 체계의 부분집합과 동형인 구조를 가지고 있다. 마

찬가지로 무리수는 유리수에서 확장된 실수 체계에서 설명할 수 있게 된다. 복소수 체계에서는 순서 관계가 성립하지 않기 때문에 양수와 음수의 구별은 무의미해진다. 그러나 실수는 복소수의 부분집합과 동형의 구조를 갖고 있고 순서 관계를 제외하면 음수의 연산은 복소수에서도 성립한다. 이와 같이 음수는 대수적 형식 체계로서의 수체계의 법칙을 만족하는 대상으로서의 의미를 갖고 있다.

다음 절에서는 이러한 음수 개념의 발달 수준에 비추어 학교수학에서 음수 개념이 어떻게 지도되고 있는지 교과서 분석을 통하여 살펴볼 것이다.

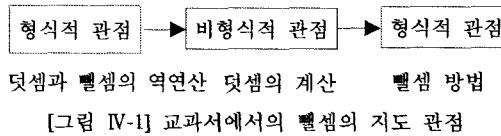
## 2. 교과서 분석

상대적인 수로서의 음수는 어떤 기준에 의한 양의 값의 반대 개념이므로 양의 값에 해당하는 것을 명시하고 음의 값을 그 상대적인 값으로 정의할 수 있다. 이를테면, ‘100원의 이익을  $+100$ 으로 나타내면, 200원의 손해는 □으로 나타내어진다.’(K교과서) 또한 어떤 기준에 대한 양의 값을 명시하지 않고 ‘100원의 손해’, 또는 ‘출발 4시간 전, 출발 6시간 후’를 ‘부호 +, -를 사용하여 나타내어라(H1, J교과서)’와 같이 제시하기도 한다.

일상적인 맥락과 형식적인 관점의 혼재는 사칙계산의 취급에서 두드러지게 나타난다. 음수의 덧셈은 대다수(80%)의 교과서가 수직선을 이용하여 상대적인 관점에서 다루고 있다.

음수의 덧셈을 일상적인 예에서 상대적인 맥락으로 접근하는 것과 대조적으로, 음수의 뺄셈은 과반수의 교과서(60%)가 자연수에서 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계를 이용하여 설명하고 있다. 이러한 설명은 자연수에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 정수의 범위로 확장한 것이며, 산술

대수의 관계는 기호대수에서도 마찬가지로 성립한다는 형식불역의 원리에 바탕을 두고 있는 것이다. 형식적 관점에서 자연수에서의 덧셈과 뺄셈의 관계를 정수 집합으로 확장한 것은 형식불역의 원리에 기초한 것이지만, 덧셈으로 바꾸어진 상태, 즉  $(+9)+(-3)$ 은 다시 음수의 덧셈이 되므로 그 결과는 앞에서 상대적인 관점에서 다룬 덧셈을 이용하여야 한다. 이는 뺄셈을 형식적 관점에서 도입하고, 그 과정에서 등장하는 덧셈은 비형식적으로 다루는 것이다. 그런 후에 뺄셈을 덧셈으로 바꾸고 피감수의 부호를 바꾼 계산 결과가 같다는 것으로부터 결론적으로 뺄셈을 덧셈으로 바꾸어서 계산하는 알고리즘을 제시한다. 이상의 내용을 정리하면 [그림 IV-1]와 같이 도식화할 수 있다.



음수의 곱셈에서는 과반수의 교과서(60%)가 부호 규칙을 정당화하기 위하여 귀납적 외삽법을 이용하고 있다. 한편 다른 교과서들(40%)은 시간-위치-속력의 모델을 이용하여 음수의 곱셈을 설명하고 이를 수직선 위에 나타내고 있다. 음수의 나눗셈은 조사한 모든 교과서가 곱셈의 역연산으로 간단히 도입하고 바로 나눗셈의 부호규칙을 제시하고 있다. 음수의 뺄셈의 경우와 유사하게, 형식불역의 원리에 기초하여 자연수에서의 곱셈과 나눗셈의 관계를 음수의 경우로 확장하여 적용한 것이다. 이는 뺄셈에서와 같이 산술대수의 관계를 기호대수의 관계로 확장한 형식불역의 원리를 적용한 것이다.

한편, 음수의 형식성은 방정식의 해를 통하여 드러나므로, 교과서에서 방정식을 어떻게 취급하는지 살펴볼 필요가 있다. 학교수학에서

방정식은 중학교 1학년 ‘문자와 식’ 단원에서 등식의 성질을 제시하는 것으로 시작된다. 등식의 성질을 설명함에 있어 조사한 모든 교과서에서 그 전개 양식은 차이가 있었지만 ‘접시 저울(양팔저울)’과 같은 종류의 저울을 모델로 사용하고 있었다. 이어서 등식의 성질을 제시한다. 양팔저울은 대상의 무게를 측정하는 것으로 두 무게를 비교하게 되어 a, b, c가 양수인 경우로 한정된다. 그런데 등식의 성질은 모든 수에 적용이 되는 것으로 암묵적으로 제시되고 있다. 여기에는 자연수에서 성립하는 것이 일반적으로 문자식에서도 성립한다는 형식불역의 원리가 내재되어 있지만 그러한 원리가 교과서에서 밖으로 드러나지는 않고 있다. 형식불역의 원리가 명시적으로 제시되지 않음으로 인하여 학생들은 오히려 혼란을 일으킬 수 있다. 더 이상 등식의 성질이 갖고 있는 형식의 의미를 자각하지 못한 채, 학생들은 등식의 성질을 이용하여 방정식을 풀게 된다.

고등학교에서 지도하는 수 개념에는 “공리적인” 관점이 포함되어 있다. 고등학교에서 수는 ‘실수’의 단원에서 형식적으로 다뤄지며 연산을 포함한 구조의 측면에서 취급되고 있다. 수의 확장 과정을 ‘자연수 → 정수 → 유리수 → 실수’의 순으로 제시하고 있으며 그 과정을 비교적 간략하게 언급하고 있다. 이어서 실수의 덧셈과 곱셈의 기본 성질을 제시하고 있다. 또한 뺄셈과 나눗셈을 역원을 이용하여 정의하고 있다. “공리”라는 용어를 사용하지는 않지만 실수의 기본 성질은 고등학교 1학년에서 명시적으로 취급되며, 실수의 기본성질에 근거하여 두 실수 a, b에 대한 곱셈의 부호규칙을 증명하게 된다.

이에 다음 절에서는 실제로 학생들이 음수 개념에 대하여 어떻게 이해하고 있는지 음수 개념의 발달 수준에 비추어 그 실태를 조사 분석하고자 한다.

## V. 중등학교 학생들의 음수개념 이해 조사

본 장에서는 제 4장에서 논의한 음수 개념의 발달 수준에 근거하여 중등학교 학생들의 음수 개념의 이해 실태를 지필검사와 면담 사례 분석을 통하여 살펴보고자 한다.

### 1. 조사 방법 및 대상

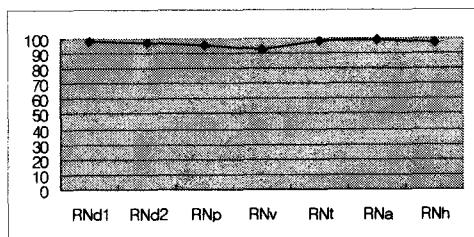
중등학교 학생들의 음수 개념의 이해 상태를 알아보기 위한 지필검사는 검사문항의 개발, 수학교육 전문가의 검토, 예비조사, 그리고 본조사와 면담의 다섯 단계를 거쳐 시행되었다. 예비조사를 거쳐 본 조사는 2006년 4월~5월에 중학교 1학년, 2학년, 3학년, 고등학교 1학년, 2학년을 대상으로 평가1, 평가2, 평가3을 시행하였다. 면담은 지필 평가를 본 학생 중에서 각 수준에 해당하는 학생을 대상으로 하였다. 각 지필 평가 문항의 풀이 과정을 질문하였으며 그 과정을 동영상으로 촬영하고 면담내용을 문서화하였다.

### 2. 검사문항의 개발

검사지의 문항이 음수 개념의 이해의 수준을 정확히 반영하고 있는가와 질문의 내용이 그 수준을 확인하는데 적합한지에 대한 타당도를 확인하기 위하여 5명의 수학교육 전문가에게 검토를 요청하였다. 수학교육 전문가의 의견을 토대로 질문의 내용이 명확하지 못하거나 각 수준에 해당하는 내용을 반영하는데 미흡한 문항, 또 음수 개념의 이해 상태를 제대로 파악할 수 없는 문항에 대하여 새로운 문항을 만들어 2차 검토를 요청하고 다시 문항을 수정하였다.

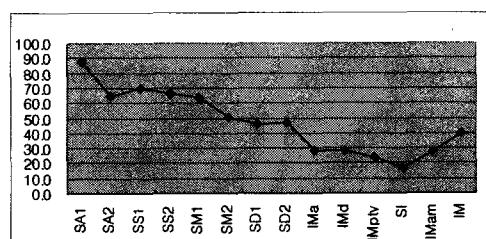
### 3. 학생들의 음수개념 이해 상태 분석

범주 I(일상적 시각적 이해도)에 해당하는 전체 문항의 정답률 그래프는 다음 [그림 V-1]과 같다. [그림 V-1]에서 알 수 있듯이 일상적 시각적 이해도를 묻는 문항에 대한 정답률은 상당히 높다.



[그림 V-1] 범주 I의 문항별 전체 정답률 그래프  
(N=567)

범주 II(상대적인 수로서 음수의 구문론적 이해도)에서는 음수 연산을 기호를 사용하여 정확하게 표현할 수 있는지(SA, SS, SM, SD)<sup>7)</sup>와 일상적인 모델에 의한 음수의 설명이 갖는 한계(IMa, IMd, IMptv, IMam)를 인식하고 있는지에 대한 학생들의 반응을 살펴보았다. 범주 II에 속한 문항에 대한 전체 정답률 그래프는 다음과 같다.



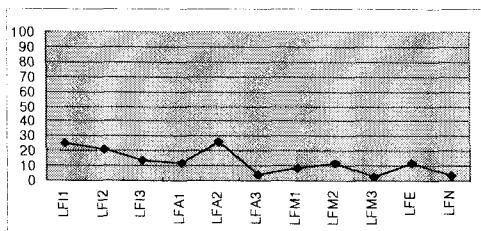
[그림 V-2] 범주 II의 문항별 전체 정답률 그래프  
(N=567)

[그림 V-2]에 나타난 바와 같이 음수의 사칙

7) <부록>검사범주와 검사문항의 코드표 참조.

계산, 즉 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 정확히 부호를 사용하여 표현할 수 있는가를 알아보는 문항에 대한 정답률은 각각 87%, 65%, 70%, 67%, 63%, 51%, 46%, 47%로, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 순으로 나타났다.

범주 III(기호대수에서의 음수의 이해도)은 기호대수에서의 음수의 이해에 대한 학생들의 이해도를 알아보는 유형 LFS, LFA, LFM, LFE, LFN으로 구성되어 있다. 각 문항에 대한 전체 정답률과 그 그래프는 다음과 같다.

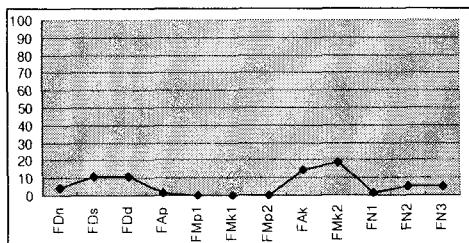


[그림 V-3] 범주 III의 문항별 전체 정답률을 그래프 (N=567)

검사 결과, 학생들이 음수의 형식성에 대한 이해도는 매우 낮았다. 형식불역의 원리를 이용하여 음수의 덧셈과 곱셈을 계산한 문제에서 음수를 방정식의 근으로 이해하고 있는지를 물어보는 문항 LFA1, LFM1, LFN의 정답률은 12%, 8%, 3%에 그치고 있다. 학생들은 음수를 0보다 작은 수, 또는 영하 몇 도, 빌린 돈 등 상대적인 수로는 이해하고 있지만, 그것이 방정식과 어떤 관계가 있는지 알지 못하고 음수가 방정식의 근으로 정의할 수 있는 형식적인 수라는 이해에 이르지 못하고 있었다.

범주 IV(“공리”에 의한 음수 개념의 이해도)의 음수의 이해도가 매우 낮다는 사실로부터 음수가 기본성질 곧 공리를 만족하는 실수 체

계를 이루는 추상적인 대상이라는 것에 대한 학생들의 이해도는 더욱 낮을 것으로 예측할 수 있다. 실제로 범주 IV에 해당하는 문항에 대한 전체 정답률은 이와 같은 예측을 실증하고 있다.



[그림 V-4] 범주 IV의 문항별 전체 정답률을 그래프 (N=567)

음수를 “공리적” 측면에서 형식적인 수로 이해하고 있는가에 대한 범주 IV의 문항에 대한 정답률은 0.2%에서 11%에 불과하며, 음수의 덧셈과 곱셈을 실수의 기본성질을 이용하여 보이는 문항의 정답률은 14%, 18%에 그치고 있다. 정의를 이용하여 뺄셈과 나눗셈을 덧셈과 곱셈으로 바꾸어 계산하는 것은 중학교 학생도 알고 있었지만, 연산을 바꾸는 과정에서 사용된 덧셈과 곱셈의 역원의 이해에 있어서는 매우 낮은 정답률(각각 1%, 0.4%)을 보이고 있다.

이어 학생들의 음수 개념의 이해 수준을 알아보기 위하여 Guttman의 범주적 자료분석인 반응도 분석을 하였다. 음수 개념의 검사범주에서 범주 II를 ‘일상적 의미에서 음수를 상대적인 수로 인식하는 수준(범주 II-1)’과 ‘일상적 의미에서의 음수와 음수 연산의 불완전성을 인식하는 수준(범주 II-2)’으로 세분<sup>8)</sup>하여 범주 I, 범주 II-1, 범주 II-2, 범주 III, 범주 IV의 5개

8) 유형 IMa, IMD, IMptv, IMam, IM에 대한 정답률이 28%, 28%, 24%, 28%, 40%(<그림 V-2>참조)에 불과하였다. 이러한 측면에 주목할 때, 앞에서 살펴본 음수 개념의 이해의 수준에서, ‘일상적 의미에서 음수를 상대적인 수로 인식하는 수준’과 ‘일상적 의미에서의 음수와 음수 연산의 불완전성을 인식하는 수준’을 구분할 필요가 있어서 두개의 수준으로 세분하였다.

로 나누었다. 반응유형을 적용한 결과는 다음 <표 V-1>와 같다.

<표 V-1> 음수 개념 이해 수준에 대한 사범주의 반응 유형 결과

유형	검사범주					f	오류
	I	II-1	II-2	III	IV		
T1	0	0	0	0	0	5	0
T2	1	0	0	0	0	257	0
T3	1	1	0	0	0	260	0
T4	1	1	1	0	0	35	0
T5	1	1	1	1	0	0	0
T6	1	1	1	1	1	0	0
T7	0	1	0	0	0	0	0
T8	0	0	1	0	0	2	2
T9	0	0	0	1	0	0	0
T10	0	0	0	0	1	0	0
T11	1	0	1	0	0	8	8
T12	1	0	0	1	0	0	0
T13	1	0	0	0	1	0	0
T14	0	1	1	0	0	0	0
T15	0	1	0	1	0	0	0
T16	0	1	0	0	1	0	0
T17	0	0	1	1	0	0	0
T18	0	0	1	0	1	0	0
T19	0	0	0	1	1	0	0
T20	1	1	0	1	0	0	0
T21	1	1	0	0	1	0	0
T22	1	0	1	1	0	0	0
T23	1	0	1	0	1	0	0
T24	1	0	0	1	1	0	0
T25	0	1	1	1	0	0	0
T26	0	1	1	0	1	0	0
T27	0	1	0	1	1	0	0
T28	0	0	1	1	1	0	0
T29	1	1	1	0	1	0	0
T30	1	1	0	1	1	0	0
T31	1	0	1	1	1	0	0
T32	0	1	1	1	1	0	0

5개의 범주를 각각 통과하는 모든 경우의 수는 32가지이고, 각 검사범주에 대한 완전 반응 유형은 여섯 가지 유형의 반응결과 T1-00000, T2-10000, T3-11000, T4-11100, T5-11110, T6-11111<sup>9)</sup>이다. 각 범주에 대한 유형분석 결과 기대했던 유형 T1, T2, T3, T4, T5, T6에 해당하는 빈도수 f는 98.2%에 달했다. 유형 분석 결과로부터 본 자필검사의 반응도 분석에서 나타난 재생산성 계수 Rep는 99.6%<sup>10)</sup>로 매우 높게 나타났다. 재생산성 계수가 매우 높게 나왔다는 것은 Thomas(1969)에 따르면 어떤 개념의 수준을 완전하게 입증하는 증거라고 할 수는 없더라도 하나의 증거로서 타당성을 제시해 준다는 점에서 유의미한 결과라고 할 수 있다.

또한 이러한 반응 유형은 학생들의 음수 개념의 이해 수준이 어디에 이르러 있는지를 보여주고 있다. 제 I 범주에 해당하는 학생은 46.1%, 제 II-1범주에 이른 학생은 45.9%, 제 II-2 범주에 이른 학생은 6.1%였다. 그리고 제 III범주와 제 IV범주에 이른 학생은 조사대상 중에는 없었다.

검사 범주 I, II-1, II-2, III, IV의 통과 분포는 다음 <표 V-2>와 같다. 각 검사 범주의 통과 비율을 살펴보면 범주 I은 98.8%, 범주 II-1은 52%, 범주 II-2는 8.1%, 범주 III, 범주 IV를 통과한 학생은 없었다.

<표 V-2> 음수 개념 이해 수준에서 검사범주 통과 분포

검사범주	f					백분율 f	
	7단계	8단계	9단계	10단계	11단계		
I	102	141	99	92	126	560	98.8%
II-1	54	60	29	58	94	295	52.0%
II-2	5	8	8	10	15	46	8.1%
III	0	0	0	0	0	0	0
IV	0	0	0	0	0	0	0

9) 본 연구에서는 학생이 각 검사범주에서 얻은 점수가 그 범주의 총점의 2/3을 넘으면 그 검사범주를 통과한 것으로 하였다.

10)  $Rep = 1 - \frac{10}{567 \times 5} = 1 - \frac{10}{2835} \approx 0.996$

이상의 분석 결과를 종합해보면 학생들의 음수 개념의 이해 수준은 대체로 제 2수준인 구문론적 수준에 머무르고 있음을 알 수 있다. 거의 모든 학생들(98.8%)이 상대적인 양의 개념을 갖고 있지만 그 상대적인 양의 개념을 음수를 이용하여 기호로 정확히 표현하는 학생은 절반을 조금 넘는 정도(52%)에 그치고 있다. 또한 음수의 일상적인 의미가 갖는 한계를 인식하는 정도는 매우 낮아서(8.1%) 대부분의 학생들이 음수를 자연수처럼 당연한 수로서 받아들이고 있으며 음수 연산 규칙을 아무 의문 없이 자연스러운 것으로 받아들이고 있음을 알 수 있다. 음수 개념의 기호대수적 이해 수준 그리고 ‘공리적 이해’ 수준에 이른 학생은 조사 대상 중에는 나타나지 않았다. 이는 학생들이 음수 개념에 대한 의미를 깊이 이해하지 못하고 있으며 음수를 단지 기호로 다루는 도구적인 이해 수준에 머무르고 있음을 보여주고 있다.

#### 4. 면담 사례 분석

지필검사 결과에서 드러난 바와 같이, 음수 개념의 이해에 있어서 음수의 형식성을 이해하는 학생의 비도는 매우 낮았고, 음수 개념에 대해 구문론적 이해 수준에 머물러 있었다. 학생들의 음수 개념의 이해 정도를 좀 더 명확하게 파악하기 위하여 면담을 실시하였다. 지필검사에서 분류한 4가지 범주 중 일상적 시각적 이해도는 지필검사로도 충분히 유의미한 결과를 얻을 수 있기 때문에 여기서는 그 이외의 상대적인 수로서의 구문론적 이해의 측면과 기호대수의 측면, 실수의 기본성질 이해의 측면에 대한 면담 결과를 분석하였다.

Q: 서울이 마이너스 3도고 강릉이 마이너스 10도야. 두 지역의 온도는 어떻게?

H: 강릉이 낮죠.

Q: 서울의 온도는 강릉보다 몇도 높지?

H: 7도 높아요.

Q: 어떻게 쓰면 되지?

H: (-10)-(-3)

Q: 서울의 온도가 강릉의 온도보다 높다는 것을 이렇게 쓰면 되겠어?

H: 잘 모르겠어요.

위에서 알 수 있듯이 제 I범주에 해당하는 학생 H는 서울의 온도가 강릉의 온도보다 7도 높다는 것을 알고 있지만 온도를 비교하기 위한 뺄셈식에서 두 음수의 관계를 명확하게 이해하지 못하고 있었다. 이것은 음수에 대해 상대적인 양의 관념을 갖고 있음에도 계산에서는 상대적인 수로서의 음수가 정확히 기호화되지 않고 있다는 것을 시사한다. 이러한 현상은 제I 범주에 머무르고 있는 학생들에게서 공통적으로 관찰되었다.

뺄셈의 덧셈과의 역연산 관계를 묻는 문항에서 제 II-2 범주에 해당하는 피면담자 L은 초등학교에서 배운 자연수에서의 덧셈과 뺄셈의 관계를 기억하지 못하고 이항을 이용하여 설명하고 있다.

Q: (<평가2>의 문항1에서) 뺄셈을 덧셈으로 바꾸는 것을 자연수에서 설명할 수 있어?

L: 4 빼기 7은 네모고 네모를… 이항하고 부호가 바뀌니까 플러스…

한편, 문항 LFA에 관한 면담에서 제 II-1범주에 해당하는 피면담자 K2는 음수를 어떤 양수와 더해서 0이 되는 수라는 것을 이해하고 있지만 그 계산 과정에서 자연수의 연산의 기본법칙이 암묵적으로 적용되었다는 것을 이해하지 못하였다. 자연수에서 성립하는 덧셈의 교환법칙이 음수에서도 성립한다고 생각하고 있으며, 음수 더하기 음수가 음수가 된다는 것을 밝히고 있다는 사실을 망각하고 있었다.

K2:  $x+a=0$ ,  $y+b=0$ 에서 둘 다 0이니까 더해서 어느 것도 먼저 더해도 되니까

Q: 왜 아무거나 먼저 더해도 되지? 자연수일 때는 되지만,  $x$ ,  $y$ 가 음수인데 마음대로 해도 돼?

K2: 음수 더하기 음수는 음수니까.

Q: 그걸 보이려고 하는 거잖아. 더하는 걸 바꿔 도 된다고 하는 것이 될까?

K2: ...

제 II-1범주에 해당하 K3는 마이너스 마이너스 5가 플러스 5라는 것은 알고 있었지만 그것을 역원으로 설명하지는 못하였다. 또한 음수 곱하기 음수가 왜 양수가 되는지를 모르고 있었고 그 이유를 학교에서 가르쳐 주지 않았다고 말하고 있다.

Q: 아직도 음수라는 것이 어떤 수인지 모르겠나?  
마이너스 곱하기 마이너스가 왜 플러스인가?

K3: 그것도 모르겠어요.

Q: 그럼 모르는 것을 그냥 배운 거야? 궁금하지 않았니?

K3: 궁금했어도 중학교에서, 학원에서 배울 때 마이너스 곱하기 마이너스는 양의 부호를 가진다고 배웠지 그게 왜 그런가는 안 배웠고 궁금할 여유도 없었어요.

학생들은 음수를 상대적인 양의 관점에서 이해하고 있을 뿐만 아니라 그 계산규칙을 아무런 반성 없이 받아들이고 있다. ‘음수는 양적인 문맥에서 상대적인 수[장애4]’라는 인식론적 장애가 학생들에게도 인지적 장애로 작용하고 있는 것이다. 역사 속에서 그러한 장애는 음수를 형식적인 수로 본 사고의 전환에 의해서 극복되었지만, 학교수학에서는 음수의 형식성을 제대로 지도하지 않고 있어 학생들은 이와 같은 인지적 장애를 극복하지 못하고 있다. 이러한 실정은 음수의 형식성을 보다 명시적으로 드러

내는 학습 지도가 이루어질 필요가 있음을 시사한다. 음수의 형식성을 명시적으로 드러내는 형식화의 과정을 통하여 학생들은 음수 개념의 학습과정에서 나타나는 필연적인 인지적 장애를 극복할 수 있을 것이기 때문이다. 이에 다음에서는 Peirce와 Frege의 기호학과 이를 바탕으로 한 Azarello et. al.(2001)의 개념 발달 이론에 근거하여 그 구체적인 방안을 모색하고자 한다.

## VI. 기호화에 의한 음수 개념의 이해

앞에서 음수 개념의 발달 수준을 5개의 수준으로 나누고, 학생들의 음수 개념의 이해 정도를 알아보기 위한 경험적 분석을 하였다. 분석 결과 학생들은 제 2수준인 구문론적 이해의 수준에 머무르고 있음을 확인하였다. 그렇다면 그 이상의 수준에 해당하는 음수 개념의 형식성을 어떻게 이해하게 할 것인가? 이는 점진적 수학화 이론에 기초한 음수 개념의 발달 수준에 따른 학습 지도를 통하여 가능할 것이다.

### 1. 기호화

Peirce의 기호학은 기호, 대상, 해석체<sup>11)</sup>의 삼원적 관계로 이루어져 있다. ‘의미의 연쇄’에서 기호를 기의와 기표로 보는 이원적 관계와 대조적으로, Peirce의 기호학은 기호를 해석하는 사람의 행동, 느낌, 또는 사고에서의 반응이나 결과를 나타내는 ‘해석체’를 포함하고 있다. 대상은 기호를 매개로 해석체에서 번역된다. 기호는 대상의 해석을 매개하는 매개체의 역할을 하며 해석체가 대상을 이해할 수 있도록 돋는 외형화된 표현이다. 따라서 해석체가 대상의 의미를

11) 기호, 대상, 해석체는 영어로 각각 sign, object, interpretant이다.

파악하기 위해서는 대상에 대한 적합한 기호 표현이 필수적이다.

우산 문제(Whitson, 1997)를 생각해보자. 어떤 사람이 기압계의 눈금이 떨어지는 것을 보고 우산을 준비한다고 하자. 여기서 ‘기압계의 눈금’은 ‘기호’를 나타내고, ‘우산을 준비하는 것’은 ‘해석체’이며, 이것이 지시하는 ‘대상’은 ‘비’가 된다.

이러한 Peirce의 기호의 삼원적 관계는 Frege의 의미와 표현, 지시체<sup>12)</sup>의 의미론적 삼각형과 동일한 맥락으로 이해될 수 있다. Frege의 기호학에서 표현의 지시체는 표현이 지시하는 대상이며 의미는 대상이 마음에 각인되는 방식이다.

따라서 Peirce의 삼원적 관계에서의 기호는 표현에 대응하고 대상은 지시체에 대응하며 해석체는 의미와 대응한다고 할 수 있다. Frege의 의미론적 삼각형 이론에 근거한 Arzarello et al(2001)의 이론에 따르면, 표현(기호)은 외적 측면에서 발전하고 의미(해석체)는 내재적 측면에서 발전하며, 이러한 발전은 상호 긴밀한 관계망을 유지하며 작용한다. 그러면 표현, 의미, 대상은 어떤 메카니즘에 의해 상호작용하는가? 이를 해명하기 위해서는 표현(기호), 의미(해석체), 지시체(대상)라는 개념적 틀의 세 요소가 새로운 개념적 틀에서의 세 요소와 어떤 관련을 갖는가를 살펴보아야 한다.

Azarello et al.은 이전 개념적 틀에서 다음 개념적 틀로의 전이는 개념적 틀을 이루고 있는 세 요소가 독립적으로 변화를 일으키는 것이 아니라고 본다. 내적인 측면(의미)은 외적인 측면(표현)에 의해 안내되고 구성되며, 그 역도 마찬가지로 성립한다. 한 대상에 대한 표현의 전이는 조작에 의한 외적 측면의 변화이며 이

것은 다시 내적 측면에서 의미의 변화를 유도하여 의미의 전이가 일어난다. 이러한 의미의 변화를 통하여 낮은 수준에서 명확하지 않았던 대상은 점점 그 모습을 명확히 드러내고, 낮은 수준의 개념적 틀은 상위 수준의 개념적 틀로 전환된다. 이 때, 개념의 발달 곧 하나의 개념적 틀에서 상위의 개념적 틀로의 전환은 표현에 의해서 시작된다. 표현은 단순히 어떤 대상을 이미지나 도식 또는 기호로 나타내는 것만이 아니라 의미의 변화를 통하여 개념 발달을 매개한다. 이와 같이 의미의 변화를 수반하는 표현의 전이가 기호화의 과정이다. 기호화의 과정은 잘 드러나지 않는 대상을 드러나도록 의식화하는 과정이다. 따라서 아동이 개념을 학습함에 있어서 새로운 의미를 의식하기 위해서는 기호화의 과정이 선행되어야 하는 것이다.

## 2. 기호화에 의한 음수 개념의 점진적 수학화

앞에서 음수 개념의 내재적 질서가 외형화되는 측면에서 학생들이 음수 개념을 이해하는 과정을 위계에 근거하여 음수 개념의 발달 수준으로 나누어 분석하였다. 각각의 수준에서의 음수 개념은 의미론적 삼각형의 개념적 틀로 전형화될 수 있으며, 각 수준에서의 개념은 Peirce와 Frege의 이론에 기초하여 대상, 표현, 의미의 세 가지 요소의 삼원적 관계로 설명될 수 있다. 즉, 각각의 수준에서 외형화된 음수 개념은 개념적 틀에서 삼원적 관계의 구성 요소로 전형화될 수 있다. 각각의 수준에서의 개념을 삼원적 관계로 설명하면 다음과 같다.

제 1수준인 시각적 일상적 수준에서 전형적<sup>13)</sup>

12) 의미, 지시체, 표현은 영어로 각각 sense, denotation, expression이고 독일어로는 Sinn, Bedeutung, Zeichen이다.

13) 이때 전형이란 각각의 특정한 경우에 적용될 수 있다는 의미에서 전형이다. 이를테면, 시각적 일상적 수준에서의 여러 개념들은 이러한 전형적인 개념적 틀로 설명이 된다.

개념의 틀은 상대적인 대상, 시각적 언어적 표현, 일상적 의미의 의미론적 삼각형으로 설명된다. 이를테면, 저수지의 물이 비가 와서 기준 위치보다 3m 높아졌다가 날씨가 좋아져서 물이 증발하여 5m 내려갔다고 하자. 이때 상대적인 대상은 저수지 물의 수위이고, 이것이 시각적 이미지로 표현된다면 그것은 시각적 일상적 표현이고, 일상적 의미에서의 수위의 변화 즉, ‘2m 내려갔다’가 의미가 된다.

제 2수준에서의 음수 개념의 전형적 특성은 산술적인 수의 관계, 산술적인 표현, 산술적 문맥의 의미론적 삼각형으로 설명된다. 이를테면, ‘ $3+5=8$ ’은 산술적인 표현이고, 그것은 ‘3 더하기 5는 항상 8이다’는 산술적 문맥에서의 의미를 지니고 있으며, 그 대상은 산술적인 수의 관계, 즉 덧셈이 된다.

제 3수준에서의 음수 개념의 전형적 특성은 대수적인 수의 관계, 대수적인 표현, 대수의 문맥의 삼원적 관계로 설명된다. 이를테면,  $a+b=b+a$ 는 대수적인 표현이고, ‘모든 수<sup>14)</sup>에 대하여 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다’는 것은 대수적인 문맥에서의 의미이며, 그 대상은 대수적인 수의 관계, 즉 여기서는 교환법칙이 된다.

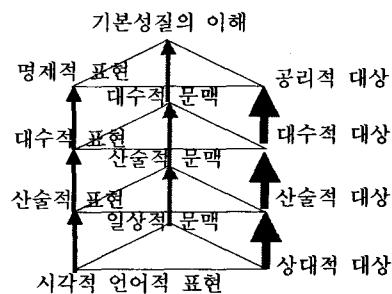
제 4수준에서의 음수 개념의 전형적 특성은 형식적인 수의 관계, 명제의 형식적 표현, 기본 성질의 이해의 의미론적 삼각형으로 설명된다. 이를테면, ‘실수  $a$ 에 대하여,  $a+0=a$ 인 항등원 0이 실수에 존재한다’는 것은 명제의 형식적인 표현이고, 그것이 실수의 기본성질이라는 것을 이해하는 것은 의미에 해당하며, 그 대상은 실수체계가 된다.

그러면 하나의 개념적 틀에서 상위의 개념적 틀로의 전환은 어떻게 설명할 수 있는가? 이것은 앞에서 논한 Azarello et. al.의 이론에 기초하

여 표현의 전이와 의미의 전이로 설명할 수 있다. 먼저 하나의 대상에 대한 표현의 전이가 일어나고(E1→E2), 전이된 표현 E2는 의미의 전이를 일으킨다(S1→S2). 의미의 변화를 통하여 구조적인 측면에서 대상을 인식할 때 구상화가 일어나고 새로운 개념적 틀을 형성하게 된다.

따라서 음수 개념의 내재적 질서의 이해는 이러한 개념적 틀의 전이의 관점에서 접근할 수 있다. 낮은 수준에서의 대상은 기호화에 의하여 이미지, 도식 또는 기호로 표현되고 그것은 어떤 의미를 갖는다. 낮은 수준에서의 대상에 대한 표현은 보다 상위 수준의 표현으로 변화되며, 변화된 표현은 다시 낮은 수준의 의미에 변화를 초래하여 보다 상위의 수준의 의미로 해석되게 되는 것이다. 이러한 표현의 변화와 변화된 표현에 의한 의미의 변화는 결국 질적인 도약으로 이어져서 구상화의 과정에 이르게 되는 것이다.

이상을 정리하면, 음수 개념 발달 과정을 다음과 같이 도식화할 수 있다.



[그림 VI-1] 음수 개념 발달의 기호화 과정

다음 장에서는 이와 같은 기호화에 의한 음수 개념의 이해 과정의 분석에 기초하여, 점진적 수학화에 의해 음수의 형식성을 지도하기 위한 구체적인 방안을 모색할 것이다.

14) 여기서 모든 수는 각 학년에서 다루는 수 체계를 말한다. 예컨대, 중학교 1, 2학년에서는 유리수, 중학교 3학년에서는 실수, 고등학교 1학년에서는 복소수까지를 말한다.

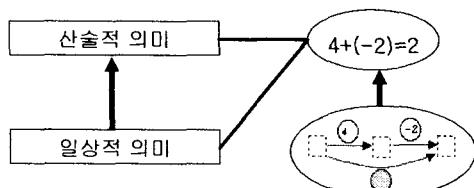
## VII. 음수개념의 학습-지도 개선을 위한 방안

### 1. 상대적인 수로서 음수 개념의 지도

음수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈도 일상적인 문제 상황을 제시하고 그것을 도식화하여 표현한 후 산술적인 표현으로 전이될 수 있도록 간결하게 제시하여 의미의 변화를 유도할 수 있다.

#### ■ 상대적인 수로서 음수의 덧셈의 지도

[SA] 철수는 처음 위치(0)에서 동쪽으로 4km를 가다가 방향을 바꾸어서 서쪽으로 2km를 갔다. 현재 철수의 위치는?



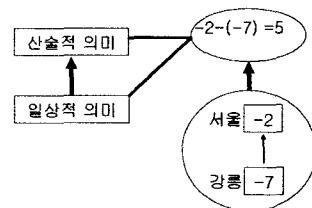
[그림 VII-1] 상대적인 수로서 음수의 덧셈의 기호화<sup>15)</sup>

위와 같이 음수 덧셈의 문제 상황을 제시하고 도식화를 이용하여 시각화하고 그것을 산술적으로 표현하는 것은 개념적 틀에서 표현의 전이에 해당한다(E1→E2). 이러한 산술적 표현을 통해 음수의 연산을 이해할 때 일상적 의미에서 산술적 의미로 의식화가 일어나고(S1→S2), 이로 인하여 상대적인 대상에 대한 조작적 개념에서 산술적인 수의 관계의 구조적 개념으로 구상적 추상화가 일어난다. 이를테면, 문제 상황 [SA]는 시각적 모델로 표현(E1)되고,  $4+(-2)=2$ 라는 산술적 표현(E2)으로 바뀐다. 이러한 표현은 일상적 의미(문제 상황)를

산술적 의미로 변하게 하고, 이와 같은 기호화의 과정에 의하여 덧셈 연산에 대한 일반화가 일어난다.

#### ■ 상대적인 수로서 음수의 뺄셈 지도

[SS] 현재 서울의 온도는 -2도이고 강릉의 온도는 -7도이다. 서울의 온도는 강릉의 온도보다 몇 도 더 높은가?



[그림 VII-2] 상대적인 수로서 음수의 뺄셈의 기호화<sup>16)</sup>

음수의 뺄셈은 Carpenter와 Moser(1982)가 분류한 뺄셈의 범주에서 ‘비교’의 범주에 해당하는 문제 상황을 제시할 수 있다. Carpenter와 Moser에 따르면, 비교 상황을 제시하면 뺄셈을 문제 상황으로부터 기호화하는 것이 가능하다. 이때 온도계는 문제 상황을 시각화하여 두 지역의 온도를 비교할 수 있는 시각적 표현이고, 시각적 표현은 뺄셈의 산술적 표현으로 전이된다(E1→E2). 산술적 표현은 덧셈에서와 마찬가지로 일상적 의미가 산술적 의미로 전이되고 (S1→S2), 상대적인 대상에 대한 조작은 산술적인 관계로 구상화가 일어난다.

### 2. 대수의 문맥에서의 지도

자연수 산술에서의 기본 법칙은 대수에서도 보존된다. 중학교 1학년에서는 유리수 범위의 수 체계를 다루면서 자연수의 기본 법칙을 유리수 체계로 확장해도 성립함을 약속한다. 이

15) 문제 상황 [SA]의 E1에 해당하는 도식적 표현은 ‘수직선 모델’의 표현으로 대체될 수 있다.

16) 문제 상황 [SS]의 E1에 해당하는 도식적 표현은 ‘온도계’의 시각적 표현으로 대체될 수 있다.

와 같은 맥락에서 자연수에서의 기본법칙에 대한 산술적 표현이 대수적 표현으로 전이될 수 있도록 해야 한다. 표현의 전이가 중요한 이유는 표현의 전이에 의한 의미의 변화가 개념의 발전에 영향을 주기 때문이다. 표현의 전이는 앞에서 논의한 바와 같이 E2→E3로의 표현의 전이로 설명이 되며, 전이된 표현 E3은 의미의 변화를 유도한다. 이때 그러한 표현의 전이가 필요한 이유를 명확히 드러낼 필요가 있다.

■ [LMC] 자연수에서  $2 \times 3 = 3 \times 2$ 이다. 이것으로부터 정수(유리수)  $a, b$ 에 대하여  $a \times b = b \times a$ 가 성립한다.

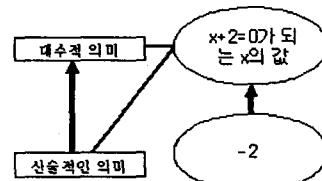
[LMC]를 명시하지 않으면 예컨대,  $2 \times (-3)$ 과  $(-3) \times 2$ 가 서로 같다는 것을 설명할 수 없다.  $(-3) \times 2$ 를 동수누가로 해석하여  $(-3) + (-3)$ 이라고 한다면  $2 \times (-3)$ 은 2가 -3개 있다는 것인데 이것은 논리적으로 설명이 불가능하다. 위와 같이 학생들에게 동수누가로 설명할 수 없는 것과 대수적으로 문자를 사용하여 표현하는 것의 관련을 반성하게 할 필요가 있다. 반성의 과정을 거친 후 표현 E2에서 표현 E3로의 변화를 지도할 때, 학생들은 자연수의 교환법칙이 정수, 유리수에서도 보존된다는 ‘형식불역의 원리’의 의미를 점진적으로 이해할 수 있다. 또한 산술적인 문맥의 구문론적 의미로부터 대수적인 문맥의 의미로 변화를 유도할 수 있게 된다.

산술의 기본법칙에서 대수의 기본법칙으로 의미의 변화가 일어나면, 음수에 대해서  $(-2) \times (-3) = (-3) \times (-2)$ 임을 대수적 표현(E3)으로부터 연역할 수 있게 된다.

자연수뿐만 아니라 음수에 대해서도 대수 법칙인 등식의 성질을 이용할 수 있다는 것을 명시적으로 드러낼 필요가 있다. 제 4장 2절의 교과서 분석에서 살펴본 바와 같이, 교과서에서는 등식의 성질이 자연수의 경우로부터 확장되어 제시되고 있지만 그것을 명시적으로 드러

내지는 않고 있기 때문에 학생들은 그 의미를 반성할 기회를 갖지 못하고 있다. 그 결과 학생들은 방정식을 풀 때, 좌변의 항을 우변으로 옮길 수 있는 이유를 등식의 성질과 관련짓지 못하고 있었다. E2에서 E3로 표현의 전이는 자연수에서 성립하는 원리가 수를 확장하여 유리수에서도 성립한다는 의미의 변화를 일어나게 한다. 이로 인하여 등식의 성질은 산술적 개념의 틀(O2, E2, S2)로부터 대수적 개념의 틀(O3, E3, S3)로 전이되는 것이다

자연수 체계에서 방정식의 해는 자연수로 제한되는 반면, 확장된 수 체계에서 음수는 방정식의 해로 정의될 수 있다.  $x+2=0$ 의 해를 -2라고 정의할 수 있다. 즉, -2는 2와 더해서 0이 되는 수이다. 상대적인 수의 개념을 구문론적으로 다루는 수준에서 산술적인 수 -2는 대수적인 의미에서 방정식의 해가 되는 것이다.



[그림 VII-3] 음수 표현의 전이와 의미의 전이

■ [LN] 자연수  $a$ 에 대하여  $-a$ 는  $x+a=0$ 이 되는  $x$ 의 값이다.  $-a$ 와 같은 수를 음의 정수라고 한다.

자연수에서 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙은 형식불역의 원리에 의하여 정수, 유리수에서도 그대로 보존된다. 앞에서 살펴본 바와 같이 산술에서 덧셈의 교환법칙  $1+2=2+1$ 은 기호대수에서  $a+b=b+a$ 로 표현이 전이된다(E2→E3). 이러한 표현의 전이는 산술적 의미에서 대수적 의미로 변화를 유도하게 된다(S1→S2). 즉 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 대수적 측면에서

이해되고, 그 법칙에 의하여 음수의 덧셈과 곱셈을 다룰 수 있게 된다.

이와 같이 대수적 수준으로의 표현의 전이와 의식화는 개념적 틀을 산술적 문맥에서 대수적 문맥으로 바꾸어 하여 새로운 개념적 틀에서 음수를 형식적인 수로 바라보게 한다.

한시되어 음수의 형식성의 이해를 어렵게 하고 있는 것이다.

학생들은 인류가 음수 개념의 본질인 형식성을 이해하는 과정에서 겪었던 인식론적 장애를 학습하는 과정에서 겪을 수 있으며, 이는 음수 개념의 본질인 형식성의 지도 없이는 극복될 수 없는 문제라는 것을 말해주고 있다.

본 논문은 음수 개념의 본질이 형식성에 있음에도 불구하고 중학교 수학에서 음수를 단지 일상적인 맥락에서 구체적으로 접근하는 것으로 그치기 때문에 학생들은 음수의 형식성을 이해하지 못한 채 계산 규칙을 기계적으로 암기하고 있는 현상에 문제의식을 가지고, 음수 개념의 본질인 형식성을 지도하기 위한 교수학적 방안을 모색한 것이다. 이를 위해 본 논문에서는 음수의 역사적 발생과정과 그 과정에서 드러난 인식론적 장애, 음수의 개념장, 음수 개념의 발달 수준, 점진적 수학화와 기호화 과정에 의한 음수 개념 이해 수준 상승에 대하여 이론적 분석을 시도하였다. 그리고 음수 개념에 대한 이러한 이론적 분석과 우리나라 학생들의 음수 개념 이해 상태에 대한 조사 결과를 바탕으로 음수 개념의 학습 지도 방안을 제시하였다. 후속 연구로서 본 연구에서 제시한 학습 지도 방안에 따른 구체적인 교재 구성과 수업 연구가 이루어 지기를 기대한다. 끝으로, 본 연구에서 제안한 음수 개념 이해의 각 수준에서 나타나는 미시적인 현상에 대한 후속 연구가 이루어져 음수 개념 이해의 수준 이론이 더욱 구체화되기를 기대 한다.

## 참고문헌

강행고 외(2000). 수학 7-가. 중앙교육진흥연구소.

## VIII. 결 론

음수는 인류 역사상 가장 이해하기 어려운 수학적 개념 중의 하나였다. 그 이유는 음수의 본질은 그 형식성에 있으며 인류가 이를 인식하기까지 1500년 동안 양적 사고의 틀 속에서 수를 생각해 온 인식론적 장애를 극복해야 했기 때문이다.

오늘날 학교수학에서는 음수 개념의 본질인 형식성을 고등학교 수학에서 지도하고 있으며, 중학교에서는 구체적인 모델을 통한 음수의 계산 지도에 치중하고 있다. 그러나 음수의 구체적 모델이 다양한데다 그 기능이 불완전하여 뺄셈과 나눗셈의 지도에서는 형식적인 모델을 함께 사용하고 있으며, 고등학교 수학에서의 음수의 형식적 취급은 의미 있게 전개되고 있지 못하다. 이로 인하여 학생들은 음수의 계산 원리를 적절히 이해하지 못하고 부호규칙을 적용하게 되며 음수의 본질인 형식성을 이해하지 못한 채 음수를 단지 구체적인 모델과 결부된 상대적인 수로서 이해하는 상태에 머물러 있게 된다. 그러한 가운데 음수 지도에 이어서 곧바로 다루어지는 방정식 풀이에서는 비록 암묵적 이기는 하지만 수의 확장과 함께 등식의 성질과 연산의 기본성질을 형식적으로 수용하여 이용하면서도 이를 드러내고 있지 않다가 고등학교 수학에서 형식적인 전개를 하고 있는 것이다. 다시 말하면 점진적인 형식화의 과정이 등

- 고성은 외(2002). 수학 7-가. 블랙박스.
- 금종해 외(2001). 수학 7-가. 고려출판.
- 박두일 외(2002). 수학 7-가. 교학사.
- 박윤범 외(2005). 수학7-가. 대한교과서.
- 배종수 외(2002). 수학 7-가. 한성교육연구소.
- 신유신(1995). 음수 지도 모델에 관한 고찰. 서울대학교 대학원 교육학 석사학위논문.
- 신항균(2001). 수학 7-가. 형설출판사.
- 양승갑 외(2005). 수학 7-가. 금성출판사.
- 이영하 외(2001). 수학 7-가. 교문사.
- 이준열 외(2002). 수학 7-가. 도서출판 디딤돌.
- 정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 교육학 박사 학위논문.
- 최상기 외(2002). 수학 10-가. 고려출판사.
- Allaire, P. R. (1997). *The Development of British Symbolical Algebra as a Response to 'The Problem of Negatives' with an Emphasis on the Contribution of Duncan Farquharson Gregory*. Ph.D. dissertation. Adelphi University.
- Arcavi (1985). *History of Mathematics as a Component of Mathematics Teachers Background*. Weismann Institute of Science Rehovot, Israel
- Aristotle (1980). *The Selected Works of Aristotle*. Seo Kwang Sa.
- Azarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (2001). A Model For Analysing Algebraic Processes of Thinking. In Sutherland et al.(eds), *Perspectives on School Algebra*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. pp. 13-36.
- Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills. In Carpenter, T. P. et al.(eds). *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. pp. 39-59.
- Chrystal, G. (1964). *Algebra: an Elementary Text-Book*. Chelsea Publishing Company: New York.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht-Holland.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London.
- Gallardo, A. (1994). Negative Numbers In Algebra. The Use Of A Teaching Model. In da Fonte, J.P., & Matos, J.F.(Eds.), *Proceedings of the 18th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* vol. 1, pp. 376-383.
- Gwinn, R. P. (1990). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Encyclopaedia Britanica, Inc.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative Number: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics* 11, 1. pp. 26-32.
- Human, P. & Muraay, H.(1987). Non-Concrete Aproches To Integer Arithmetic. In Bergerson, J.C., Herscovics, N., & Kieren, C. (Ed.), *Proceedings of the 11th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

- Education* vol. 2, pp. 437-443.
- Janvier, C. (1985). Comparison Of Models Aimed At Teaching Signed Integers. In Streefland, L.(Ed.), *Proceedings of the 9th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* vol. 1, pp. 135-140.
- Katz, V. J. (1998). *The History of Mathematics*. HarperCollins College.
- Linchevski, L. & Williams, J. (1999). Using Intuition From Everyday Life In 'Filling' The Gap In Children's Extention Of Their Number Concept To Include The Negative Number. *Educational Studies in Mathematics*, 39. pp. 131-47.
- Mukhopadhyay, S., Resnick, L.B., & Schauble, L. (1990). Social Sense-Making in Mathematics: Children's Ideas of Negative Numbers. *Proceedings of the 12nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* vol. 3. pp. 281-288.
- Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L.B. (1989). Formal And Informal Sources of Mental Models For Negative Numbers. In Vergnaud, G., Rogalski, J., &Artique, M.(Ed.), *Proceedings of the 13th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* vol. 3, pp. 106-110.
- Roby, C. E. (1981). *Models for the System of Integers and the Learning of Intergers Concepts at the Elementary School Level*.
- Unpublished doctoral dissertation, George Peabody College for Teachers of Vanderbilt University.
- Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of mathematics*, 10, 3, pp. 24-36.
- Thomas, H. L. (1969). *An Analysis of Stages in the Attainment of a Concept of Function*. Columbia University, Ph. D. Education general. University Microfilms.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press, Inc.
- Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Substraction Problems. In Carpenter, T. P. et. al.(eds), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. pp. 39-59.
- Vergnaud, G .(1996). The Theory of Conceptual Fields. In Steffe, L. P. & Nesher, P.(eds.), *Theories of Mathematical Learning*, New Jersey : Lawrence Erlbaum. pp. 219-239.
- Whitson, J. A. (1997). Cognition as a semiotic process: From situated mediation to critical reflective transcendence. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. pp. 97-150.

# A Didactical Analysis on the Understanding of the Concept of Negative Numbers

Woo, Jeong Ho (Seoul National University)

Choi, Byung Chul (Seoul National University Middle School)

Negative numbers have been one of the most difficult mathematical concepts, and it was only 200 years ago that they were recognized as a real object of mathematics by mathematicians. It was because it took more than 1500 years for human beings to overcome the quantitative notion of numbers and recognize the formality in negative numbers. Understanding negative numbers as formal ones resulted from the Copernican conversion in mathematical way of thinking.

we first investigated the historic and the genetic process of the concept of negative numbers. Second, we analyzed the conceptual fields of negative numbers in the aspect of the additive and multiplicative structure.

Third, we inquired into the levels of thinking on the concept of negative numbers on the basis of the historical and the psychological analysis in order to understand the formal concept of negative numbers. Fourth, we analyzed Korean mathematics textbooks on the basis of the thinking levels of the concept of negative numbers. Fifth, we investigated and analysed the levels of students' understanding of the concept of negative numbers. Sixth, we analyzed the symbolizing process in the development of mathematical concept. Furthermore, we tried to show a concrete way to teach the formality of the negative numbers concepts on the basis of such theoretical analyses.

\* **Key words** : negative numbers(음수), the stages of historical development(역사적 발달 단계), epistemological obstacles(인식론적 장애), conceptual fields(개념장), mathematization(수학화), symbolization(기호화), levels of learning of the negative numbers(음수의 학습 수준).

논문접수 : 2007. 1. 5

심사완료 : 2007. 2. 5

<부록 1> 검사범주와 검사문항의 코드표

검사	범주	유형	세부유형	문항번호	조사내용
평가 1	I	RN	RNd1	1	상대적인 양의 관념을 갖고 있는가?
			RNd2	2	
			RNp	3	
			RNv	4	
			RNt	5	
			RNa	6	
			RNh	7	
	II	SA	SA1	8	음의 기호를 정확히 사용하여 덧셈을 표현할 수 있는가?
			SA2	9	
		SS	SS1	10	음의 기호를 정확히 사용하여 뺄셈을 표현할 수 있는가?
			SS2	11	
		SM	SM1	12	음의 기호를 정확히 사용하여 곱셈을 표현할 수 있는가?
			SM2	13	
		SD	SD1	14	음의 기호를 정확히 사용하여 곱셈을 표현할 수 있는가?
			SD2	15	
		SI	SI	19	음수의 곱셈을 귀납적 방법으로 표현할 수 있는가?
	IM	IM	IMa	16	음수를 상대적인 양의 수로 이해하여 음수와 음수의 연산을 설명하는 것의 한계 또는 모순을 알고 있는가?
			IMd	17	
			IMptv	18	
			IMam	20	
			IM	21	
평가 2	III	LFI	LFI1	1.1	음수의 연산에서 뺄셈을 역연산을 이용하여 다룰 수 있는가?
			LFI2	1.2	
			LFI3	1.3	
		LFA	LFA1	2.1	형식불역의 원리를 이용한 음수의 덧셈을 이해하고 있는가?
			LFA2	2.2	
			LFA3	2.3	
		LFM	LFM1	3.1	형식불역의 원리를 이용한 음수의 곱셈을 이해하고 있는가?
			LFM2	3.2	
			LFM3	3.3	
		LFE	LFE	4	동식의 성질의 형식성을 이해하고 있는가?
		LFN	LFN	5	음수는 방정식의 근으로서 정의되는 형식적인 수라는 것을 이해하고 있는가?
평가 3	IV	FD	FDn	1	음수를 형식적 관점에서 정의할 수 있는가?
			FDs	2	
			FDd	3	
		FA	FAp	4	음수의 덧셈 계산을 실수의 기본성질을 이용하여 보일 수 있는가?
			FAK	7.1, 7.2, 7.3	
		FM	FMp1	5	음수의 곱셈 계산을 실수의 기본성질을 이용하여 보일 수 있는가?
			FMp2	6.2	
			FMk1	6.1	
			FMk2	8.1, 8.2, 8.3	
		FN	FN1	9	음수와 음수의 연산을 형식적 구조의 관점으로 이해하고 있는가?
			FN2	10	
			FN3	11	

## <부록 2> 평가 1

1. 영상  $3^{\circ}\text{C}$ 를  $+3$ 이라고 표시한다. 영하  $7^{\circ}\text{C}$ 를 어떻게 표현하면 좋을까?
2. 어느 날 서울의 낮 기온은 아침 기온보다 2도가 높았다. 2도가 높다는 것을  $+2$ 라고 표시한다. 철원의 온도가 서울의 온도보다 5도 낮다고 한다면 5도 낮다는 것을 어떻게 표현하면 좋을까?
3. 현재 위치를 0이라고 할 때 현재 위치에서 동쪽 3km 지점을  $+3$ 으로 표시한다. 현재 위치를 0이라고 할 때 현재 위치에서 서쪽 2km 지점을 어떻게 표현하면 좋을까?
4. 철수가 동쪽으로 시속 3km로 걷고 있다. 여기서 철수의 속력, 동쪽으로 시속 3km를  $+3$ 으로 표시한다. 영희가 서쪽으로 시속 4km로 걷고 있을 때, 영희의 속력을 어떻게 표현하면 좋을까?
5. 영희가 약속 시간의 20분 후에 도착하였을 때, 20분 후를  $+20$ 이라고 표시한다. 철수가 약속 시간의 30분 전에 도착하였을 때, 30분 전을 어떻게 표현하면 좋을까?
6. 2000원의 이익을  $+2000$ 으로 표시한다. 3000원의 손해를 어떻게 표현하면 좋을까?
7. 지표면의 높이는 해수면을 기준으로 측정이 된다. 대부분의 나라에서는 지표면이 해수면 보다 높아서 해발 10m, 20m일 때 지표면의 높이를 각각  $+10$ ,  $+20$ 으로 표시한다. 그런데 네덜란드는 대다수의 지역은 오히려 지표면이 해수면보다 낮다. 네덜란드의 어느 지역의 지표면이 해수면 아래 8m에 있다면 그 지역의 지표면의 높이는 어떻게 표현하면 좋을까?
8. 어떤 상인이 장사를 해서 어제는 5000원의 손해를 보았지만 오늘은 3200원의 이익을 남겼다. 그 상인은 결과적으로 어떤 상태인지 이것을 덧셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라. (주의! 양의 부호 (+) 또는 음의 부호 (-)의 사용에 주의하여 기호로 쓰시오)
9. 어느 저수지의 수위는 어제보다 오늘 오전에 2m 올라갔다가 오후에 3m 내려갔다. 현재 그 저수지의 수위는 어제의 수위와 비교하여 그 결과를 생각해 보자. 이것을 덧셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
10. 현재 서울의 온도는 -3도이고 강릉의 온도는 -10도이다. 서울의 온도는 강릉의 온도보다 높은지 낮은지 생각해 보자. 이것을 뺄셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
11. 현재 서울의 온도는 2도이고 강릉의 온도는 -7도이다. 서울의 온도는 강릉의 온도보다 높은지 낮은지 생각해보자. 이것을 뺄셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
12. 철수는 동서로 곧바로 뻗은 직선 도로 위를 동쪽으로 시속 3km로 걷고 있다. 현재의 위치를 0으로 할 때, 2시간 전의 위치를 생각해보자. 이것을 곱셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
13. 철수는 동서로 곧바로 뻗은 직선 도로 위를 서쪽으로 시속 4km로 걷고 있다. 현재의 위치를 0으로 할 때, 3시간 전의 위치를 생각해보자. 이것을 곱셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
14. 철수는 동서로 곧바로 뻗은 직선 도로 위를 걷고 있다.  
현재의 위치를 0으로 하여 2시간 전에 철수가 서쪽 6km 지점에 있었다면 철수의 걷는 속력을 생각해 보자. 이것을 나눗셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
15. 철수는 동서로 곧바로 뻗은 직선 도로 위를 걷고 있다.  
현재의 위치를 0으로 하여 2시간 전에 철수가 동쪽 8km 지점에 있었다면 철수의 걷는 속력을 생각해 보자. 이것을 나눗셈을 사용하여 식으로 나타내고 그 계산 결과도 써라.
16. 문항 8과 문항 9에서 이익과 손해, 저수지 물의 수위와 같은 음수모델을 참고할 때, 음수 곱하기 음수는 항상 양수가 된다고 할 수 있는가?  
⑦ 있다.      ⑧ 없다.

17 문항 10과 문항 11에서 온도계 모델을 참고할 때, 음수 곱하기 음수는 항상 양수가 된다고 할 수 있 는가?

⑦ 있다. ⑧ 없다.

18 문항 13에서 시간-위치-속력 모델을 참고할 때, -4와 -3의 의미가 다르다. 여기서 그 대소 관계를 말할 수 있는가?

⑦ 있다. ⑧ 없다.

\* 철수는 음수의 곱을 다음과 같이 계산하였다.

음수 곱하기 양수	양수 곱하기 음수
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 2 = 4$
$1 \times 3 = 3$	$2 \times 1 = 2$
$0 \times 3 = 0$	$2 \times 0 = 0$
$(-1) \times 3 = (-3)$	$2 \times (-1) = (-2)$
$(-2) \times 3 = (-6)$	$2 \times (-2) = (-4)$

19. 위와 같이 음수 곱하기 음수 “ $(-2) \times (-3) = 6$ ”이 됨을 철수의 방법을 이용하여 보여라.

\* 영희는 철수의 방법에 대하여 의문이 생겼다.

영희: 네가 보여준 방법으로 음수의 곱셈의 부호규칙이 성립한다고 말할 수 없어. 예를 들면, 음수 곱 하기 양수에서  $(-1) \times 3$ 이  $(-3)$ 이라는 것을 자연수의 곱셈을 예로 들어 설명하고 있지만  $(-1)$ 과  $(-3)$ 이 무엇인지 모르잖아.

철수: 왜 몰라.  $(-1)$ ,  $(-3)$ 은 0보다 작은 수잖아.

영희: 없는 것(0)보다 작은 수가 어디 있니?

철수: 왜 없어. ‘영하 3도’, ‘빌린 돈 5000원’, ‘3시간 전’, ‘서쪽 5km’. 이런 것들은 모두 음수잖아.

영희: 그것은 어떤 값을 기준으로 한 상대적인 양의 값이야. 설령 너의 말에 따라 음수가 ‘영하 3도’, ‘빌린 돈 5000원’, ‘3시간 전’, ‘서쪽 5km’와 같은 것이라고 하자. 위에서  $(-2) \times 3$ 은  $(-1)$ 을 3배한 것, 즉  $(-2) + (-2) + (-2) = -6$ 이라고 한다면 2개씩 세 번 빌리면 6개를 뺏진 것으로 해석할 수 있지만 2를  $(-3)$ 배하는 것은 어떻게 설명할 수 있니? 또는  $(-2)$ 를  $(-3)$ 배하는 것은 어떻게 설명할 수 있니?

만약에 음수가 이 세상에 존재하는 어떤 것이라면  $(-3)$ 은 2보다 작은데  $(-3)$ 의 곱이 2의 곱보다 크다는 것을 어떻게 설명할 수 있니? 서로 다른 두 수에서 더 큰 수의 곱이 더 작은 수의 곱보 다 작은 경우가 생기잖아.

20 영희가 말한 “2를  $(-3)$ 배하는 것”을 설명할 수 있는가?

⑦ 있다. ⑧ 없다.

21 문항 8에서 이익과 손해, 문항 10과 문항 11에서 온도계 모델, 문항 12에서 문항 15까지 시간-위치-속력 모델, 문항 19에서 철수의 방법을 이용하여 음수에 관한 여러 가지 질문에 답하였다. 이들 중에서 음 수와 음수의 연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)을 완전하게 설명할 수 있는 모델이 있는가?

⑦ 있다. ⑧ 없다.

### <부록 3> 평가 2

※ 1. 자연수에서는 작은 수에서 큰 수를 뺄 수가 없다. 이를테면 4-7을 계산할 수 없다. 그런데 영희는 초등학교에서 배웠던 자연수에서 뺄셈을 덧셈으로 바꾸거나 덧셈을 뺄셈으로 바꿀 수 있는 원리를 이용하여 4-7를 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} 4-7 &= \square \\ \square + 7 &= 4 \quad \text{①} \\ \square &= 4 + (-7) \quad \text{②} \\ 4-7 &= 4 + (-7) \quad \text{③} \end{aligned}$$

위 계산에서 ②단계, 즉  $\square$ 가  $4+(-7)$ 이 됨을 영희는 또 다음과 같이 보였다.

$$\begin{aligned} (4+(-7))+7 &\quad \text{④} \\ = 4 + ((-7)+7) &\quad \text{⑤} \\ = 4+0 & \\ = 4 & \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

- 1.1 (1) 자연수에서 뺄셈을 덧셈으로 바꾸는 방법이 사용된 단계는 ①~⑥중에서 어느 것인가?  
 (2) 영희가 이용한 자연수에서 뺄셈을 덧셈으로 바꾸는 방법은 무엇인가? 예를 들어 설명하여라
- 1.2 (1) 위에서 영희는 음수가 있는 식에서도 자연수의 덧셈에 대한 기본 법칙을 사용하고 있다. 영희는 자연수의 덧셈에 대한 기본 법칙을 ①~⑥중에 어느 단계에서 사용하였는가?  
 (2) 영희가 사용한 자연수의 덧셈에 대한 기본법칙은 무엇인가?
- 1.3 영희는 자연수에서 4-7를 계산할 수 없기 때문에 자연수에서 뺄셈을 덧셈으로 바꾸는 원리를 이용하여 계산하였다고 한다. 그런데, 영희는  $\square$ 가  $4+(-7)$ 이 됨을 보이는 과정에서 여전히 자연수에서는 계산할 수 없는 것을 아무 설명 없이 이용한 것이 있다.  
 (1) 영희의 계산 단계 ④, ⑤, ⑥중에 어느 것인가?  
 (2) 자연수에서는 왜 계산할 수 없는지 설명하여라.
- ※ 2. 영희는 음수가 있는 연산은 일상적인 예로는 설명하기가 곤란하다는 것을 알았다. 그래서 일상적인 예를 이용하지 않고 음수의 덧셈
- $$(-2)+(-5)$$
- 를 다음과 같이 하였다.
- 2.1 위에서 영희는 음수를 어떻게 보고 있는가?  
 예를 들어 설명하여라.
- 2.2 (1) 위에서 영희는 음수가 있는 식에서도 자연수의 덧셈에 대한 기본 법칙을 사용하고 있다. 영희는 자연수의 덧셈에 대한 기본 법칙을 ①~⑤중에 어느 단계에서 사용하였는가?  
 (2) 영희가 사용한 자연수의 덧셈에 대한 기본법칙은 무엇인가?
- 2.3 위에서 영희는 '음수 더하기 음수는 음수'가 된다는 것을 어떤 원리에 근거하여 보이고자 한 것이다. 문항 2.1과 문항 2.2를 참고하여 영희는 어떤 원리를 이용하여 음수의 덧셈계산을 하고 있는지 설명하여라.

$$x = -2 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad ①$$

$$y = -5 \Leftrightarrow y + 5 = 0 \quad ②$$

①식과 ②식을 변변 더하면

$$(x+2)+(y+5)=0 \quad ③$$

$$(x+y)+(2+5)=0 \quad ④$$

$$x+y=-(2+5) \quad ⑤$$

따라서

$$(-2)+(-5) = -(2+5) \quad ⑤$$

\* 3. 영희는 음수가 있는 연산은 일상적인 예로는 설명하기가 곤란하다는 것을 알았다. 그래서 일상적인 예를 이용하지 않고 음수의 곱셈

$$(-2) \times (-4)$$

를 다음과 같이 하였다.

3.1 위에서 영희는 음수를 어떻게 보고 있는가? 예를 들어 설명하여라.

3.2 (1) 위 계산 과정에서 영희는 음수가 있는 식에서도 자연수 계산의 기본법칙을 이용하여 나온 식이 있다.  
영희는 자연수 계산의 기본 법칙을 ①~⑧중에 어느 단계에서 사용하였는가?

(2) 영희가 사용한 자연수 계산의 기본법칙은 무엇인가?

3.3 위에서 영희는 ‘음수 곱하기 음수는 양수’가 된다는 것을 어떤 원리에 근거하여 보이고자 한 것이다. 문항 3.1과 문항 3.2를 참고로 하여 영희는 어떤 원리를 이용하여 음수의 곱셈계산을 하고 있는지 설명하여라.

#### ◆ 등식의 성질

- (1) 양변에 같은 수를 더하여도 등식은 성립한다.
- (2) 양변에 같은 수를 빼어도 등식은 성립한다.
- (3) 양변에 같은 수를 곱하여도 등식은 성립한다.
- (4) 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다.

\* 우리는  $a, b, c$ 가 양수일 때 양팔저울을 이용하여 등식의 성질이 성립함을 보였다. 그리고 이를 이용하여 다음과 같이 방정식을 풀었다.

$$x+2=5$$

등식의 양변에서 2를 빼면

$$x+2-2=5-2$$

$$x=3$$

4. (1) 그런데 위 등식의 성질에서  $a, b, c$  가운데 음수가 있는 경우에 양팔저울로 등식의 성질이 성립함을 보일 수 있는가?

- ⑦ 있다. ⑧ 없다.

\* 그런데 어떻게 하였는가? 우리는  $a, b, c$ 가 음수인 경우에도 등식의 성질이 성립한다고 보고 방정식을 풀었다. 방정식  $x-2=(-5)$ 에서는 양팔저울로는 등식을 설명하기조차 어렵다. 그런데도 등식의 성질을 이용하여 다음과 같이 풀었다.

$$x-2=(-5)$$

등식의 양변에 같은 수 2를 더하면

$$x-2+2=(-5)+2$$

$$x=(-5)+2$$

(2)  $a, b, c$ 가 음수인 경우에도 등식의 성질이 성립한다고 할 수 있는 이유는 무엇인지 설명하여라.

5. 영희는 음수가 있는 수의 덧셈과 곱셈을 <평가1>에서와 같이 일상적인 예, 이를테면 이익과 손해, 시간-위치-속력의 모델을 이용하지 않고 순전히 방정식과 자연수의 기본성질을 이용하여 계산한 것이다. 그렇다면, 영희는 음수를 어떤 수라고 보고 있는가? 예를 들면,  $-3$ 은 어떤 수인가?

$$x = -2 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad \dots ①$$

$$y = -4 \Leftrightarrow y + 4 = 0 \quad \dots ②$$

①식에 4를 곱하고, ②식에  $x$ 를 곱하면

$$4x + 2 \cdot 4 = 0 \quad \dots ③$$

$$x(y+4)x=0 \quad \dots ④$$

$$2 \cdot 4 = -4x \quad \dots ⑤$$

$$x(y=-4)x \quad \dots ⑥$$

⑤식과 ⑥식으로부터

$$x(y=2 \cdot 4) \quad \dots ⑦$$

$$\text{곧, } (-2) \times (-4) = 2 \cdot 4 \quad \dots ⑧$$

$$a=b \text{이면 } a+c=b+c$$

$$a=b \text{이면 } a-c=b-c$$

$$a=b \text{이면 } ac=bc$$

$$a=b \text{이면 } \frac{a}{c}=\frac{b}{c} \text{ (단, } c \neq 0\text{)}$$

## <부록 4> 평가 3

◆ 다음은 실수의 기본 성질이다.

### I. 실수의 덧셈에 관한 기본 성질

[성질 A1] 임의의 실수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 인 실수가 존재한다.

[성질 A2] 교환법칙이 성립한다.  $a+b=b+a$

[성질 A3] 항등원이 0이 존재한다.  $a+0=0+a=a$

[성질 A4] 덧셈에 대한 역원이 존재한다.

어떤 실수  $a$ 에 대하여, 다음을 만족하는 실수  $-a$ 이 존재한다.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

[성질 A5] 결합법칙이 성립한다.  $a+(b+c)=(a+b)+c$

### II. 실수의 곱셈에 관한 기본 성질

[성질 M 1] 임의의 실수  $a, b$ 에 대하여  $a \cdot b$ 인 실수가 존재한다.

[성질 M 2] 교환법칙이 성립한다.  $a \cdot b=b \cdot a$

[성질 M 3] 항등원 1이 존재한다.  $a \cdot 1=1 \cdot a=a$

[성질 M 4] 0이 아닌 원소에 대하여 역원이 존재한다.

0이 아닌 어떤 실수  $a$ 에 대하여, 다음을 만족하는 실수  $\frac{1}{a}$ 이 존재한다.

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

[성질 M 5] 결합법칙이 성립한다.  $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

[성질 M 6] 분배법칙이 성립한다.

임의의  $a, b, c \in R$ 에 대하여,  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 이다.

◆ 실수  $a, b$ 에 대하여 뺄셈을 다음과 같이 정의한다.

$$a - b = a + (-b)$$

◆ 실수  $a, b$ 에 대하여 나눗셈을 다음과 같이 정의한다.

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

◆ 실수의 대소 관계에 관한 기본성질

실수는 다음 두 성질을 만족하는 ‘양수의 집합’ P를 부분집합으로 갖는다.

[성질 O1] 임의의  $a, b \in P$ 에 대하여  $a + b \in P$ 이고  $a \cdot b \in P$ 이다.

[성질 O2] 실수 a에 대하여 다음 세 가지 중 한 가지만 성립한다.

$$a \in P, a = 0, -a \in P$$

※ 실수의 기본성질과 대소관계에 관한 기본성질 및 정의를 잘 읽고 다음 물음에 답하여라.(문항1~문항 6.2)

1. 실수의 기본 성질과 정의로부터 음수는 어떤 수인지 설명하여라. 예를 들면, ‘-2’는 어떤 수인지 설명하여라.

2. (1) 실수의 뺄셈의 정의에 따라  $3-(-5)=8$ 임을 보여라.

(2) “ $-(-5)=5$ ”임을 보여라.

3. (1) 실수의 나눗셈의 정의에 따라  $(-8) \div (-\frac{1}{2}) = 16$ 임을 보여라.

$$(2) \frac{1}{(-\frac{1}{2})} = (-2) \text{ 임을 보여라.}$$

4. 위 실수의 덧셈의 기본 성질에는  $(-a)+(-b)=-(a+b)$  되는 기본 성질이 없다. 위 실수의 덧셈의 기본 성질을 이용하여  $(-a)+(-b)=-(a+b)$ 이 됨을 보여라.

5. 위 실수의 기본 성질에는  $0 \cdot (-4) = 0$ 이 되는 기본 성질이 없다. 위 실수의 기본 성질을 이용하여  $0 \cdot (-4) = 0$ 이 됨을 보여라.

- 6.1 위 실수의 기본 성질에는  $(-a) \cdot (-b)=a \cdot b$ 이 되는 기본 성질이 없다. 이는 무엇을 의미하는가?

- 6.2 위 실수의 기본 성질을 이용하여 실수  $a, b$ 에 대하여  $(-a) \cdot (-b)=a \cdot b$ 임을 보여라.

※ 다음은 실수의 덧셈의 기본 성질을 이용하여  $(-2)+(-3)=-(2+3)$ 임을 보인 것이다. 물음에 답하여라.

$$2+(-2)=0 \quad \cdots ①$$

$$3+(-3)=0 \quad \cdots ②$$

$$(2+(-2))+(3+(-3))=0 \quad \cdots ③$$

$$((-2)+(-3))+(2+3)=0 \quad \cdots ④$$

$$(-2)+(-3)=-(2+3) \quad \cdots ⑤$$

- 7.1 ①식 또는 ②식은 실수의 덧셈에 관한 기본 성질 A1~A4중 어떤 기본 성질을 이용한 것인지 그 기호를 써라.

- 7.2 ③식에서 ④식으로 바뀌는 과정은 실수의 덧셈에 관한 기본 성질 A1~A4중 어떤 기본 성질을 이용한 것인지 그 기호를 써라.

- 7.3 ④식에서 ⑤식으로 바뀌는 과정은 실수의 덧셈에 관한 기본 성질 A1~A4중 어떤 기본 성질을 이용한 것인지 그 기호를 써라.

※ 다음은 실수의 기본 성질을 이용하여  $(-2) \times 7=-(2 \times 7)$ 임을 보인 것이다. 물음에 답하여라.

$$2+(-2)=0 \quad \cdots ①$$

$$(2+(-2)) \times 7=0 \quad \cdots ②$$

$$2 \times 7 + (-2) \times 7=0 \quad \cdots ③$$

$$(-2) \times 7=-(2 \times 7) \quad \cdots ④$$

- 8.1 ①식은 실수의 덧셈에 관한 기본 성질 A1~A4중 어떤 기본 성질을 이용한 것인지 그 기호를 써라.

- 8.2 ②식에서 ③식으로 바뀌는 과정은 실수의 곱셈에 관한 기본 성질 M1~M6중 어떤 기본 성질을 이용한 것인지 그 기호를 써라.

- 8.3 ③식에서 ④식으로 바뀌는 과정은 실수의 덧셈에 관한 기본 성질 A1~A4중 어떤 기본 성질을 이용한 것인지 그 기호를 써라.

9. 여러분은 <평가 3>의 문항1~문항7의 문제를 풀었다. 이상으로부터 여러분은 음수를 무엇이라고 생각하는가?

10. 여러분은 <평가 3>의 문항1~문항7의 문제를 풀었다.

이상으로부터 여러분은 음수 더하기 음수가 된다는 것은 무엇에 근거하여 성립하는 것이라고 생각하는가?

11. 여러분은 <평가 3>의 문항1~문항7의 문제를 풀었다.

이상으로부터 여러분은 음수 곱하기 음수가 양수가 된다는 것은 무엇에 근거하여 성립하는 것이라고 생각하는가?