

국내 금융시계열의 누적(INTEGRATED)이분산성에 대한 사례분석*

박진아¹⁾ 황선영²⁾ 백지선³⁾

요약

시계열 자료 분석에서 ARCH류와 같은 조건부 이분산성 모형을 가정하고 분석하는 모형들이 많이 쓰이고 있다. 실제 우리나라 금융 시계열 자료들을 분석해 보면 비정상성을 나타내는 경우가 드물지 않게 나타난다. 즉, 단위근 형태의 비정상 패턴(integrated phenomenon)에 가까운 경우가 자주 나타난다. 본 논문에서는 다양한 국내 금융시계열 15개에(주가지수, 선물지수, 환율, 이자율 등) GARCH(1,1) 모형을 적합시켜 분산의 지속성을 확인하고, 각 데이터에 첨도(Kurtosis)와 적합한 IGARCH(1,1) 모형을 제시하고자 한다.

주요용어: IGARCH(1,1), 지속성 효과, 국내금융시계열 자료.

1. 서론

전통적인 시계열 분석방법은 주어진 시계열이 시간에 따라 평균과 분산이 안정되고, 시차가 같으면 공분산도 같은 약정상을 가정한다. 그러나 실제 데이터의 경우, 이런 가정들은 성립되지 않는 자료들이 많다. 시계열의 한 시점에 충격이 가해져 순간적으로 큰 값이 만들어지면 이 값은 지속적으로 큰 값을 생성하고, 작은 값이 만들어지면 계속해서 작은 값이 생성되는 변동성 집중(clustering)현상이 발생한다. 이런 시계열 자료에서 변동성 예측은 아주 중요하다. 변동성 예측의 한 방법으로 Engle(1982)에 의해 제안된 ARCH 모형과 이것을 발전시킨 GARCH류 모형(Bollerslev, 1986)이 대표적이다. 재무론 분야에서 GARCH 모형을 실제 데이터에 적용할 때, 비정상 패턴(integrated phenomenon)에 가까운 경우가 자주 나타난다. 정상 GARCH 과정은 조건부 분산에 대한 충격이 지수적으로 0에 수렴한다. 그러나 누적 과정(integrated process)의 경우 충격의 효과가 오랜 시간 남아있다. 즉, 미래의 관측치에 현재의 충격이 지속적인 효과를 갖게 된다. 이러한 현상을 고려한 모형이 IGARCH(Integrated GARCH)모형이다. 본 논문에서는 국내 15개의 금융 시계열(주가지

* 이 연구는 한국과학재단(KOSEF, R11-2000-073-00000)의 지원에 의해 연구되었음.

백지선의 연구는 한국학술진흥재단(KRF, 2005-070-C00022)의 지원에 의해 연구되었음.

1) (140-742) 서울시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 이과대학 수학과통계학부, 박사과정

E-mail: mukkabi@sookmyung.ac.kr

2) (교신저자)(140-742) 서울시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 이과대학 수학과통계학부, 교수

E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr

3) (140-742) 서울시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 이과대학 수학과통계학부, 박사 후 연구원

E-mail: jsbaik98@sookmyung.ac.kr

수, 선물지수, 환율, 이자율 등)을 바탕으로 GARCH(1,1) 모형을 적용시켜 보고, heavy-tail 을 확인하기 위해 침도를 계산하였다. 또한, 충격의 지속성(persistent effect)을 확인하여 IGARCH(1,1) 모형에 적합시킨 결과를 확인하고자 한다.

2. IGARCH 모형과 충격의 지속성 효과(Persistent Effect)

ARCH 모형(Engle, 1982)에서는 현재 오차항의 분산을 과거시점의 오차항 제곱의 선형 함수로 나타내었다. 이 같은 ARCH 모형을 일반화한 GARCH(p, q) 모형이 Bollerslev(1986)에 의해 제시되었으며, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t | F_{t-1} &\sim N(0, h_t), \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{l=1}^q \gamma_l h_{t-l}. \end{aligned}$$

여기서 $\alpha > 0, \alpha_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots, p), \gamma_l \geq 0 (l = 1, 2, \dots, q)$ 이며 F_{t-1} 는 $(t-1)$ 까지의 정보를 의미한다. 또한, 정상성 조건은 $\sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{l=1}^q \gamma_l < 1$ 이다. GARCH 모형에서 가장 많이 사용되어지는 GARCH(1,1) 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}. \quad (2.1)$$

자산가격의 변동성은 일단 상승(저하)하게 되면, 그 후 잠시 동안 변동성이 높은(낮은) 상태를 지속하게 된다. GARCH(1,1) 모형에서 변동성의 충격의 지속성은 $\alpha_1 + \gamma_1$ 의 크기에 의존한다. 실제 데이터 분석에서 GARCH(1,1) 모형을 적용할 때, $\alpha_1 + \gamma_1 \cong 1$ 인 경우가 자주 나타나는데, 이러한 경우 충격의 지속성이 커지게 되고, 과거의 정보가 현재의 분산에 아주 중요한 역할을 하게 된다. 또한, GARCH(1,1) 모형이 정상적이기 위한 조건은 $\alpha_1 + \gamma_1 < 1$ 이므로 정상성을 갖지 못할 가능성이 있다. 이러한 현상을 고려한 모형이 Nelson(1990)의 IGARCH 모형이다. 식 (2.1)에서 $\alpha_1 + \gamma_1 = 1$ 인 경우를 IGARCH(1,1) 모형이라 한다. 즉, $\alpha_1 + \gamma_1 = 1$ 을 만족하는 IGARCH(1,1) 모형은 변동성이 지속적(persistent)이다. 이러한 성질이 IGARCH(1,1) 모형에서 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다. $\alpha_1 + \gamma_1 = 1$ 의 조건에 의

$$\begin{aligned} E(h_{t+1} | F_{t-1}) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \gamma_1 h_t | F_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1}) + \gamma_1 h_t \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \gamma_1) h_t \\ &= \alpha_0 + h_t, \\ E(h_{t+2} | F_{t-1}) &= E(E(h_{t+2} | F_t) | F_{t-1}) \\ &= E(\alpha_0 + h_{t+1} | F_{t-1}) = 2\alpha_0 + h_t, \end{aligned}$$

일반적인 결과는 위 과정을 반복하여 구할 수 있다. 즉,

$$E(h_{t+m}|F_{t-1}) = m\alpha_0 + h_t, \quad (2.2)$$

식 (2.2)은 오늘의 변동성이 내일의 변동성 예측에 영향을 주고 미래에도 지속적인 영향을 주는 것을 의미한다. 결국, IGARCH 모형은 조건부 분산인 변동성이 지속되는 비정상성을 만든다.

3. 우리나라 금융시계열 사례분석

본 논문에서는 5년간 (2001.1.1 ~ 2005.12.31) 한국의 15가지 금융시계열 자료 (KOSPI, KOSPI200, KOSDAQ, KOSDAQ50, 회사채, 국고채 3년, 국고채 5년, 국고채 10년, 원/미국달러, 원/일본엔, 원/유로, 삼성전자 주가, SK텔레콤 주가, 현대자동차 주가, 포스코 주가)에 대해 조건부 이분산 모형인 GARCH(1,1) 모형과 IGARCH(1,1) 모형을 적합시켜 보았다. 각 자료에 대한 시계열 그래프를 그림 3.1에 나타내었으며, 각 자료의 수익률을 모형에 적합시키기 위하여 로그 차분한(이를 ν_t 로 표현하기로 하자) 후 분석에 이용하였다. 분석 과정은 모든 자료에 대하여 동일하므로 KOSPI 자료와 국고채 3년 자료에 대해서만 기술하고 나머지 자료에 대해서는 결과를 요약하여 표 3.1에 수록하였다. 연관된 분석으로는 Hwang과 Park(2005)를 참고하기 바란다. 표 3.1에서 각 자료의 첨도는 대부분 기준인 3을 넘어 이분산 모형의 특징인 급침(leptokurtic)현상을 볼 수 있으며 주가와 관련된 자료들은 일별 상-하한 15% 규정에 의해 SK텔레콤을 제외하고는 첨도가 기준인 3보다 크지 않음을 알 수 있다. 또한 모든 자료에 대해 GARCH(1,1) 모형을 적합한 결과 $\alpha_1 + \gamma_1$ 에 대한 추정값이 1에 가깝게 나타나고 있어 IGARCH(1,1) 모형의 타당함을 실증적으로 보여주고 있다.

3.1. 사례분석 1 - KOSPI

2000년 1월부터 2005년 12월까지 5년간 KOSPI 데이터를 이용하여 IGARCH 모형, GARCH 모형을 적합시켜 보았다. GARCH 모형을 적합한 후, 모형의 heavy-tail 을 확인하기 위해 첨도(Kurtosis)를 구하였다. 또한, 변동성 충격의 지속성을 알아보기 위해 $\alpha_1 + \gamma_1$ 의 추정치를 계산하였다.

$$GARCH : \nu_t = 0.0586\nu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad h_t = 1.948 \times 10^{-6} + 0.0614\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9356h_{t-1}.$$

Kurtosis는 3.4로 GARCH(1,1) 모형이 Heavy-tail 함을 알 수 있다. 추정된 GARCH 모형에서 $\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1$ 값이 0.997로 1에 가까우므로 IGARCH(1,1) 모형에 적합하여 다음의 결과를 얻었다.

$$IGARCH : \nu_t = 0.0585\nu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad h_t = 1.4029 \times 10^{-6} + 0.0632\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9368h_{t-1}.$$

3.2. 사례분석 2 - 국고채

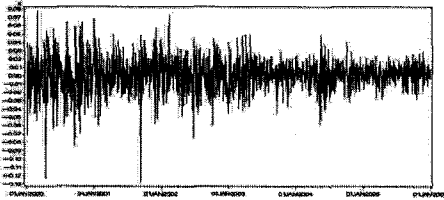
2000년 1월부터 5년간 국고채 3년 데이터를 이용하여 GARCH(1,1) 모형 적합 결과는 다음과 같다.

$$GARCH : \nu_t = 0.1517\nu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad h_t = 8.1981 \times 10^{-6} + 0.1443\varepsilon_{t-1}^2 + 0.81856h_{t-1}.$$

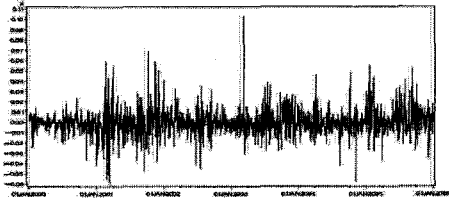
Kurtosis는 4.87로 GARCH(1,1) 모형이 Heavy-tail 함을 알 수 있다. 추정된 GARCH 모형에서 $\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1$ 값이 0.9628로 1에 가까우므로 IGARCH(1,1) 모형에 적합하여 다음의 결과를 얻었다.

$$IGARCH : \nu_t = 0.148\nu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad h_t = 5.5575 \times 10^{-6} + 0.1705\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8295h_{t-1}.$$

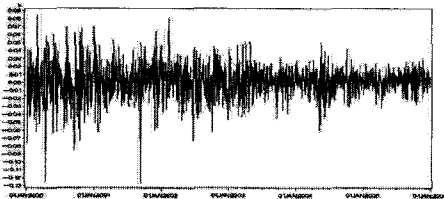
(1) KOSPI



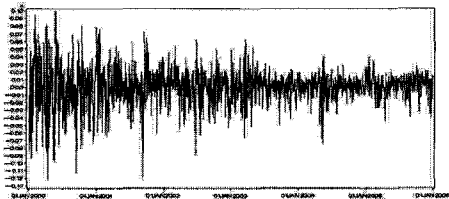
(2) 국고채 3년



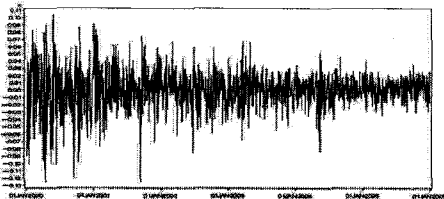
(3) KOSPI200



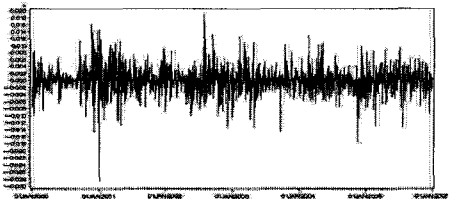
(4) KOSDAQ



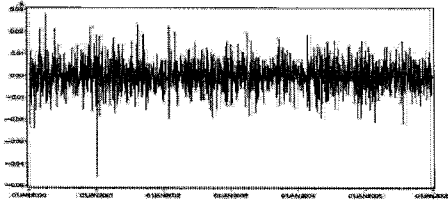
(5) KOSDAQ50



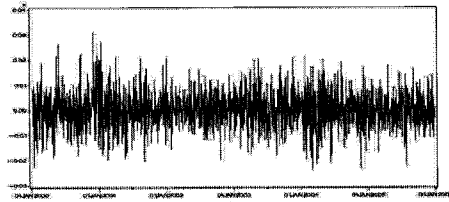
(6) 원/달러 환율



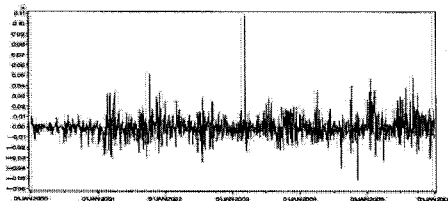
(7) 원/엔 환율



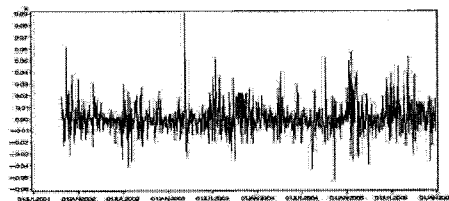
(8) 원/유로 환율



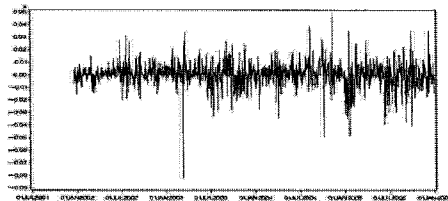
(9) 회사채



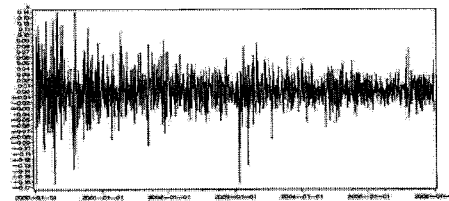
(10) 국고채 5년



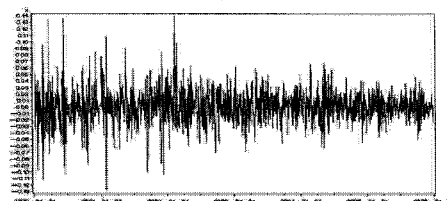
(11) 국고채 10년



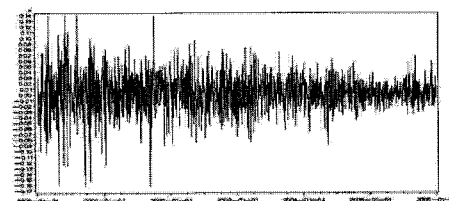
(12) SK 텔레콤 주가



(13) 포스코 주가



(14) 현대자동차 주가



(15) 삼성전자 주가

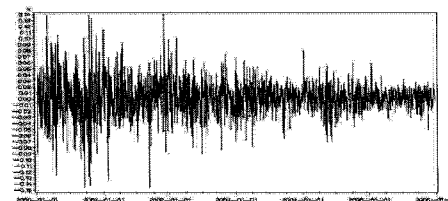


그림 3.1: 15가지 국내 금융 시계열도(2000.1.1~2005.12.31)

표 3.1: 국내 금융시계열에 대한 사례분석 결과

| DATA | GARCH(1,1) | | IGARCH(1,1) |
|----------|------------|-----------------------------------|---|
| | Kurtosis | $\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1$ | |
| KOSPI200 | 3.15 | 0.9973 | $\nu_t = 0.049\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 1.811 \times 10^{-6} + 0.0568\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9405h_{t-1}$ |
| KOSDAQ | 3.15 | 0.9941 | $\nu_t = 0.1594\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 3.7232 \times 10^{-6} + 0.0977\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9023h_{t-1}$ |
| KOSDAQ50 | 2.83 | 0.9949 | $\nu_t = 0.1112\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 2.3198 \times 10^{-6} + 0.0675\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9325h_{t-1}$ |
| 원/달러 환율 | 5.00 | 0.9733 | $\nu_t = 0.0987\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 2.054 \times 10^{-7} + 0.1068\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8932h_{t-1}$ |
| 원/엔 환율 | 2.34 | 0.9636 | $\nu_t = -0.2073\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = -5.49 \times 10^{-26} + 0.004503\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9355h_{t-1}$ |
| 원/유로 환율 | 1.02 | 0.9898 | $\nu_t = -0.0802\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 2.8224 \times 10^{-8} + 0.02\varepsilon_{t-1}^2 + 0.98h_{t-1}$ |
| 회사채 | 12.33 | 1.0078 | $\nu_t = 0.1644\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 9.2445 \times 10^{-6} + 0.3852\varepsilon_{t-1}^2 + 0.6148h_{t-1}$ |
| 국고채5년 | 5.89 | 0.8902 | $\nu_t = 0.1867\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 9.5821 \times 10^{-6} + 0.2188\varepsilon_{t-1}^2 + 0.7812h_{t-1}$ |
| 국고채10년 | 7.56 | 0.9812 | $\nu_t = 0.1655\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 3.3535 \times 10^{-6} + 0.1943\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8057h_{t-1}$ |
| SK텔레콤 주가 | 4.01 | 0.9961 | $\nu_t = 0.0279\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 1.2733 \times 10^{-6} + 0.0332\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9668h_{t-1}$ |
| 포스코 주가 | 3.38 | 0.9898 | $\nu_t = 0.0733\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 3.6499 \times 10^{-6} + 0.0724\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9276h_{t-1}$ |
| 삼성전자 주가 | 2.92 | 0.9918 | $\nu_t = 0.0762\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 3.2998 \times 10^{-7} + 0.0298\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9702h_{t-1}$ |
| 현대자동차 주가 | 2.45 | 0.9991 | $\nu_t = 0.0881\nu_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 6.4119 \times 10^{-7} + 0.0363\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9637h_{t-1}$ |

참고문헌

- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987-1007.
- Hwang, S. Y. and Park, J. A. (2005). VaR(Value at Risk) for Korea financial time series,

Journal of Korean Data and Information Science Society, **16**, 283–288.

Hwang, S. Y. and Park, J. A. (2005). IGARCH and stochastic volatility: case study, *Journal of Korean Data and Information Science Society*, **16**, 835–841.

Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model, *Econometric Theory*, **6**, 318–334.

[2006년 10월 접수, 2006년 12월 채택]

Evidence of Integrated Heteroscedastic Processes for Korean Financial Time Series*

J. A. Park¹⁾ S. Y. Hwang²⁾ J. S. Baek³⁾

ABSTRACT

Conditionally heteroscedastic time series models such as GARCH processes have frequently provided useful approximations to the real aspects of financial time series. It is not uncommon that financial time series exhibits near non-stationary, say, integrated phenomenon. For stationary GARCH processes, a shock to the current conditional variance will be exponentially converging to zero and thus asymptotically negligible for the future conditional variance. However, for the case of integrated process, the effect will remain for a long time, i.e., we have a persistent effect of a current shock on the future observations. We are here concerned with providing empirical evidences of persistent GARCH(1,1) for various fifteen domestic financial time series including KOSPI, KOSDAQ and won-dollar exchange rate. To this end, kurtosis and Integrated-GARCH(1,1) fits are reported for each data.

Keywords: IGARCH(1,1), persistent effect, Korean financial time series.

* This work was supported by the SRC program of KOSEF(R11-2000-073-00000).

J. S. Baek's work was supported by a grant from KRF(2005-070-C00022).

- 1) Doctoral student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Chungpa-dong 2-ga, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea
E-mail: mukabi@sookmyung.ac.kr
- 2) (Corresponding author) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Chungpa-dong 2-ga, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea
E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr
- 3) Post Doctor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Chungpa-dong 2-ga, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea
E-mail: jsbaik98@sookmyung.ac.kr