韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 05. 제 46권, 제 2호, 155-171.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2007, Vol. 46, No. 2, 155-171.

한 초등학교 2학년 아동의 곱셈과 나눗셈 해결 전략에 관한 사례 연구

이 종 욱 (개포초등학교)

Ⅰ. 서 론

곱셈과 나눗셈 연산에 관한 이전의 연구를 살펴보면 아동들은 형식적인 교육을 받기 훨씬 전에 다양한 곱셈 문제를 해결할 수 있는 것으로 나타났다. 예를 들어, Kouba(1989)는 1학년 학생의 30%와 2학년 학생의 70%가 간단한 묶음[1] 문제를 해결할 수 있다는 것을 발견하였으며, Mulligan (1992)은 간단한 문제에 바른 답을 하는 비율이 2학년초 50%에서 3학년말에는 거의 95%까지 꾸준히 증가한다는 것을 알 수 있었다. Carpenter 등 (1993)은 심지어 유치원생들도 곱셈 문제를 해결할 수 있다는 것을 알았다.

아동들은 곱셈과 나눗셈 문장제를 해결하기 위해 여러 가지 해결 전략을 사용한다. 그리고 이로부터 그들은 다양한 비형식적 계산 전략을 획득하는 것으로 추측할 수 있다. 비형식적 계산 전략에 관심을 가지는 이유는 곱셈과 나눗셈에 관한 지식은 초등에서 일찍이 형성되면서 이후 곱셈 상황을 이해하는 데 있어서 영향을 줄 수 있다는 주장을 하기 때문이다(Fischbein et al., 1985; Graeber, Tirosh, & Glover 1989; Simon, 1993).

그러나 어린 아동이 특정한 기간에, 예를 들면 곱셈에 관한 형식적 교육을 받기 직전 단계에서부터 형식적 교육을 받기 시작하는 기간에 아동이 곱셈 문제를 해결하면서 어떤 계산 전략을 사용하는지, 그런 전략은 문제의 상황과 어떻게 관련되는지, 그리고 그 기간 동안 계산 전략은 어떻게 변하는지에 대해서는 분명하지 않다.

또한 곱셈은 나눗셈과 밀접한 관계를 가지고 있다. 나눗셈을 곱셈의 역연산으로 도입하면서 형식적 교육에서는 세로 나눗셈의 알고리즘을 익히는 것에 집중하는 것 같다. 그러나 아동들이 나눗셈 문제를 해결하면서 가지는 인지적인 어려움은 아동의 비형식적 해결 전략과 형식적 교육이 서로 유연하게 연결되지 못한 결과로 해석할 수 있다. Resnick(1983)이 강조한 바와 같이, 수학적 지식은 비형식적 지식에서 닻을 내린 교수의 결과이다. 아동들이 사용한 비형식적 지식을 지금의 학교 교육과정에서 제시하는 나눗셈 교육과 연결하기 위해서는 먼저 아동이 해결하는 비형식적 나눗셈 계산 전략에 대한 깊은 이해가 필요할 것이다.

본 연구에서는 한 초등학교 2학년 학생(준수, 가명)을 대상으로 먼저 곱셈에 관한 학교 교육을 받기 직전과 직후에 곱셈 문제를 해결하는 계산 전략이 어떻게 전개되는지를 분석할 것이며, 다음으로 나눗셈에 관한 학교 교육을 받기 전 준수가 분할과 측정 상황에서 나눗셈 문제를 해결하는 비형식적 지식을 분석하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 곱셈과 나눗셈 상황

곱셈 상황은 문제에 포함된 양과 그 양들 사이의 관계에 따라 몇 가지로 분류할 수 있다. Greer(1992)는 자연수 곱셈 상황을 묶음, 곱셈적 비교, 직사각형 정렬, 조합으로 분류하였으며 분수와 소수로 확장하면서 6가지 범주를 추가하였다. 그리고 각 곱셈 상황에 상응하는 나눗셈 문제를 만들었다. 묶음 나눗셈 문제는 분할과 측정의 상황으로 범주화하였다.

Carpenter 등(1999)은 곱셈 상황에서 넓이, 정렬, 조합 문제를 대칭적인 문제로 보았으며 이를 제외한 묶음, 비

* 2007년 2월 투고, 2007년 4월 심사 완료
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 곱셈, 나눗셈, 해결 전략, 비형식적 지식

1) 묶음은 '다은이는 사탕 3봉지를 샀다. 각 봉지에는 사탕이 7개씩 들어 있다. 다은이가 산 사탕은 모두 몇 개인가?'와 같이 각 집합에 속한 사물의 수가 동일한 경우 사물 전체의 수를 구하는 상황이다.

율, 가격, 비교 문제 각각에 대해 분할과 측정의 나눗셈 문제를 제시하였다. 예를 들어, '긴 의자 하나에 어린이 4명이 앉을 수 있습니다. 긴 의자 2개에는 모두 몇 명의 어린이가 앉을 수 있습니까?'라는 문제는 묶음의 곱셈 상황이다. 이 문제를 '어린이가 8명 있습니다. 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉으려고 합니다. 긴 의자 한 개에는 몇 명의 어린이가 앉을 수 있습니까?'라는 나눗셈 문제로 만들면 이것은 분할의 문제이고, '어린이가 8명 있습니다. 긴 의자 하나에 4명씩 앉으려고 합니다. 긴 의자는 모두 몇 개가 필요합니까?'라는 문제로 만들면 측정 나눗셈 문제가 된다.

Greer(1992)와 Carpenter 등(1999)의 연구는 곱셈과 나눗셈 문제를 분류하는데 있어서 좋은 아이디어를 제공하고 있다. 이를 바탕으로 본 연구에서는 곱셈적 사고와 관련하여 현행 교육과정에서 주로 다루고 있는 문제를 동수누가, 비율, 비교[2], 정렬, 조합으로 분류하였다.

가. 동수누가

한 묶음에 포함된 사물의 수와 묶음의 수를 알아본 후, 같은 수를 여러 번 더하여 전체 사물의 수를 알아봄으로써 곱셈의 기초를 학습할 수 있다. 덧셈에서 곱셈을 도입할 때 주로 사용되는 상황으로 같은 수의 반복된 덧셈, 즉 5+5+5를 5×3으로 표현할 수 있다. 동수누가의 장면은 곱셈에서 교환 성질을 적용하면 5×3(5+5+5=15)은 3×5(3+3+3+3+3=15)와 결과는 같지만 같은 수의 반복을 통한 곱셈이므로 그 의미는 다르며, 그 범위는 자연수에까지 미친다.

나. 비율

비율 문제는 '1개의 길이가 4cm인 막대 3개를 연결하면 전체 길이는 몇 cm인가?'처럼 항목의 수와 비율이 주어졌을 때 전체를 찾는 것이다. 비율 문제는 동수누가와 마찬가지로 교환을 하면 4×3과 3×4는 연산 결과는 같으나 그 의미는 다르다. 또 같은 수를 몇 번 더하는 것이 아니기 때문에 4×2.5와 같이 분수와 소수까지 그 범위를 확장할 수 있다는 점에서 동수누가보다는 수 체계에서의 확장가능성이 높다고 할 수 있다(남승인, 서찬숙, 2004).

다. 비교

비교 문제에서는 한 양이 다른 양의 배수가 되는 두 양의 비교를 하게 되며, 한 양이 다른 것보다 몇 배나 더 큰지에 관한 조건이 제시된다. 이러한 두 양 사이의 관계를 수량화하여 나타낸 수는 실제로 존재하는 양을 표현하는 것이 아니다. '어느 1학년 교실에 햄스터와 개구리가 있다. 햄스터의 몸무게는 개구리의 몸무게보다 3배 무겁다. 개구리의 몸무게가 200g이라면, 햄스터의 몸무게는 얼마이겠는가?'처럼 동물의 몸무게는 측정할 수 있는 양이지만, 3배라고 표현할 때 사용한 수 3은 단지 측정할 수 있는 양 사이의 관계를 나타낼 뿐이다. 자연수 곱셈의 본질적인 의미는 배의 개념이며 비교의 상황은 곱셈의 교환 성질을 사용하면 그 의미가 달라진다.

라. 정렬

정렬된 총수를 곱셈식으로 나타낼 때에는 가로 또는 세로로 묶는 것으로 볼 수 있다. 앞의 문제들의 특징은 대칭적이지 않다는 것이다. 즉 4×3과 3×4는 연산 결과는 같지만 그 의미는 다르다는 것이다. 한 집합의 크기와 집합의 수를 나타내는 것이 정해져 있었다. 그러나 정렬 문제에서 두 인수는 서로 다른 역할을 하지 않으며 특정한 지시물에 종속되지도 않는다. 예를 들면, 직사각형 모양으로 5개씩 4줄 있는 달걀의 수를 구하는 문제에서 5개씩 4줄이 될 수 있고 4개씩 5줄이 될 수 있다. 5개씩 4줄은 5×4이고 4개씩 5줄은 4×5가 되어 전체의 수를 구하는데에 있어서 두 가지 방법은 모두 통용되어 곱셈에서 두 수를 바꾸어 곱해도 그 값은 같음을 알 수 있다. 직사각형 모양에서 가로와 세로가 특정하게 주어지지 않았기 때문에 곱셈의 교환성을 쉽게 지각할 수 있게 된다.

마. 조합

조합의 문제는 한 항목과 다른 항목을 결합하는 모든 방법을 구하는 것이다. 예를 들면, '승희는 셔츠 5벌과 바지 3벌을 가지고 있다. 서로 다른 셔츠와 바지를 입을

---

2) 두 양의 크기를 비교하는 방법에는 덧셈적 구조로 비교하는 방법과 곱셈적 구조로 비교하는 두 가지가 있다. 예를 들어 교실에 남자 20명과 여자 10명이 있을 때, 덧셈적 구조로 비교하면 남자는 여자보다 10명이 많다. 그러나 곱셈적 구조로 비교하면 남자는 여자의 2배이다. 본 연구에서 비교는 '곱셈적 비교'를 말한다.

수 있는 방법은 모두 몇 가지인가?'라는 문제를 들 수 있다. 이 문제는 대칭적이다. 셔츠와 바지는 서로 교환할 수 있기 때문이다. 조합 문제는 앞의 4가지 문제만큼 저학년에서 곱셈과 나눗셈 개념을 형성하는 데 중심적인 것은 아니다(Carpenter et al., 1999).

2. 해결 전략

아동들이 자연수 곱셈적[3] 문제를 해결하면서 사용하는 전략에 관한 연구를 살펴보면 전략은 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 전략을 구분하는 한 방법은 학생들이 사용하는 계산 전략에 따르는 것이다. 여러 연구들을 종합해보면 다음 <표Ⅱ-1>과 같이 5가지 범주로 요약할 수 있다.

해결 전략을 구분하는 다른 방법은 표현과 관련된다. 학생들은 동전이나 손가락과 같은 대상을 사용하여 문제 상황을 표현하거나 그림을 그려서 표현할 수 있다. 이와 같은 방법은 <표Ⅱ-1>의 전략을 사용할 때 동시에 일어나는 것으로 나타났다.

3. 나눗셈을 경험하는 초기 방법에 관한 연구

어린 아동들이 나눗셈을 어떻게 해결하는가에 관한 연구 중에서 본 연구의 목적에 부합하는 연구는 크게 두 가지이다. 하나는 나눗셈이 분할인 것처럼 보이기도 하고 측정인 것처럼 보이기도 하는 어려움에 관한 것이다. 곱셈에서 측정 변수들에 대해 분석한 Vergnaud(1988)의 연구는 이런 어려움을 설명한다. 다음은 분할과 측정 나눗셈을 경험하는 비형식적 방법에 관한 것이다. Fischbein 등(1985)이 제시한 나눗셈의 기본 상황과 Mulligan(1992)의 분할과 측정 나눗셈을 경험하는 초기 방법에 관한 연구가 이런 부류의 연구이다.

가. 곱셈에서 한 가지 또는 두 가지 측정 변수에 관한 연구

Vergnaud(1988)는 곱셈이 한 가지 측정 변수 또는 두 가지 측정 변수와 어떻게 관련되는가를 연구하고서 두 측정 변수보다는 한 측정 변수 내에서 생각하는 것이 일반적이라고 하였다. 이와 같은 사실은 분할과 측정 나눗셈을 해결하면서 아동들이 가지는 경험을 탐구하고자 할 때 도움을 주게 된다. 왜냐하면 측정 나눗셈은 한 측정 변수와 분할 나눗셈은 두 측정 변수와 관련된다는 것을 알려주기 때문이다. 예를 들어, '사과가 42개 있습니다. 한 명이 6개씩 가지려고 합니다. 모두 몇 명이 나누어 가질 수 있습니까?'라는 42÷6의 측정 나눗셈 문제에서는 제수뿐 아니라 피제수도 사과와 관련된다. 여기서 사과 6개는 사과 42개를 측정하는 단위로 측정 변수가 된다. 이와는 달리 '사과가 42개 있습니다. 6명의 학생이 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 사람이 몇 개씩 가지면 됩니까?'라는 42÷6의 분할 나눗셈 문제에서 보면 피제수는 사과와 관련이 있지만 제수는 아동과 관련이 있다. 사과 42개를 측정하기 위한 단위로 6명의 학생을 사용할 수는 없다. 이러한 사실로부터 우리는 측정과 분할 나눗셈은 아동들이 서로 다르게 경험하는 세기 활동임을 추측할 수 있다.

<표Ⅱ-1> 아동이 자연수 곱셈적 문장제를 해결하는 계산 전략

계산 전략	정의
단순한 세기	문제를 해결하기 위해 구체물을 사용한다. 곱셈적 구조와 어떤 명백한 관련이 없지만 대상을 단지 세어본다.
반복해서 세기	문제의 구조에 따라 세기를 한다(예, '1, 2; 3, 4; 5, 6'). 두 번째 세어지는 수는 집합에 포함된 수가 된다.
뛰어 세기	배수로 세기를 한다. 2개씩 3묶음을 '2, 4, 6'이라고 세면 묶음의 수에 포함된 전체의 수를 더 쉽게 알 수 있다.
덧셈	'2+2=4, 4+2=6 또는 6-2=4, 4-2=2'와 같은 계산으로 세기를 대체한다.
곱셈	알고있는 곱셈구구의 형태를 취하여 계산하거나(예, 3×2=6)또는 이미 알고 있는 사실로부터 유추(예, 2×3=2×2+2)하여 계산한다.

3) 여기서 '곱셈적'이라는 용어에는 곱셈은 물론 나눗셈도 포함된다.

나. 나눗셈의 기본 상황에 관한 연구

곱셈과 나눗셈의 기본 상황에 관해 중학생을 대상으로 소수 문제를 가지고 수행한 Fischbein 등(1985)의 연구를 살펴보면 나눗셈이 분할과 측정의 두 상황으로 서로 다르게 경험된다는 가정에 몇 가지 의문점을 가지게 된다. Fischbein 등(1985)이 설정한 가설에서 한 상황은 묶음으로서 곱셈과 다른 두 상황은 분할과 측정으로서 나눗셈과 관련된다. 하지만 결과를 면밀하게 분석한 후 그들은 측정은 교육에 의해 획득되는 상황이며 나눗셈에서 기본 상황은 분할 나눗셈만 있다는 결론을 내렸다. 그러나 다른 연구들(Brekke, 1991; Murray, Olivier, & Human, 1992; Mulligan, 1992)을 살펴보면 측정이 학교 수업의 결과라는 것도 분할이 나눗셈의 유일한 기본 상황이라는 것도 확신하지 못했다.

Murray 등(1992)은 아동들에게 자신의 문제 해결 전략을 만들고 토론하도록 하였을 때, 처음에는 분할 나눗셈 문제를 해결하기 위해 분할 상황을 사용하는 아동이 거의 없었으나 얼마 후 측정 구성 모델4)로 대체됨을 관찰하고, 아동들은 측정 구성 모델을 가장 자주 사용하는 전략으로 선택하는 것 같다고 하였다. Silver(1987)가 언급한 바와 같이 학생들에게 나눗셈식에 맞는 적절한 상황을 제시하라고 할 때 그들은 분할 나눗셈 상황으로 제시하지만 정작 나눗셈 알고리즘은 측정의 방법으로 해결하였다.

이렇게 모순되는 결과는 분할 나눗셈뿐 아니라 측정 나눗셈은 이중적인 특성, 즉 분할과 측정의 양면적인 특성을 가짐을 암시한다. 아동들은 분할 나눗셈의 상황을 생각하지만 문제를 해결할 때는 측정의 방법을 사용한다는 것이다.

계산 문제를 해결하기 시작할 때 아동들은 제3의 미지수를 찾기 위해 이미 알고 있는 두 수를 이용한다. 나눗셈에서 주어진 수는 제수와 피제수이다. 42÷6을 세로 형식의 나눗셈으로 계산할 때 '42에는 6이 몇 번 들어가는가?'라고 묻는 것이 자연스러운 질문이다. 이런 질문은 나눗셈을 측정의 상황으로 접할 때부터 시작하는 것이 자연스럽다. 그러나 놀라운 것은 '사탕 42개를 6명의 학생에게 똑같이 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 개씩 주면 됩니까?'와 같은 분할 나눗셈 문제를 해결하면서 이런 질문을 하여도 학생들은 전혀 어려움을 느끼지 않는다는 것이다. 이 질문을 다시 생각해보면 '사탕 42개에는 6명의 학생이 몇 번 들어가는가?'라는 의미를 가지게 된다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상자는 부산시에 거주하는 초등학교 2학년 남학생(준수, 가명)으로 연구 당시 8년 4개월이었다. 연구자는 부산시 소재 J초등학교 2학년 담임인 H교사를 통해 준수를 소개받았다. 연구 대상자를 선정하기 위해서는 몇 가지 조건이 있었다. 첫째, 학교 정규 수업외의 학원 교육이나 수학 학습지 또는 개인 과외를 받아서 사전 학습이 이루어진 학생은 연구의 성격상 연구 대상자가 될 수 없기 때문에 이런 학생을 제외한 학생 가운데 연구 대상자를 선발하였다. 둘째, 극단적인 사례를 피하기 위해 연구 대상자는 수학 학력 수준에 있어서 보통 수준에 있는 학생을 대상으로 선정해야 했다. 그래서 H교사의 학급에서 최상위 집단과 최하위 집단에 속한 학생은 연구 대상에서 제외하였다. 셋째, 한 사례만을 다루는 연구의 특성상 연구 대상자는 자신의 생각을 말이나 글로 표현하는데 문제가 없는 아동이어야 했다. H교사의 협조 아래 학원이나 개인 과외를 받지 않는 아동 가운데 수학 성적이 중간 정도인 학생으로 자기 표현력이 있는 준수를 소개받았으며 준수의 부모와 본인이 연구에 참가 의사를 밝혀 준수를 최종 연구대상자로 선정하였다.

준수의 부모와 면담을 했을 때 준수의 어머니는 집에서 준수의 수학 학습을 돕고 있다고 하였다. 학습은 주로 학교 수업 내용을 복습하는 방법으로 이루어졌다. 연구를 시작하기 전 특별히 곱셈구구를 외우거나 곱셈과 관련한 어떠한 학습을 하지 않았음을 확인할 수 있었으며, H교사로부터 받은 자료를 살펴보면 준수는 2학년 가 단계 수와 연산 영역에서 받아올림이 있는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 문제를 비교적 정확하게 해결할 수 있는 수

4) 측정 구성 모델은 예를 들면 '사과 42개를 7명이 똑같이 나누어 가지려면 몇 개씩 가지면 됩니까'라는 나눗셈 문제에서 한 명이 2개씩 또는 6개씩 가지는 것을 계속 반복하여 나타내는 것이다.

<표III-1> 1차 실험 문제

곱셈	나눗셈
동수누가	분할
1. 긴 의자 한 개에 4명의 어린이가 앉을 수 있습니다. 긴 의자가 2개 있다면, 모두 몇 명이 앉을 수 있습니까? (4, 7)*	7. 어린이가 8명 있습니다. 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉으려고 합니다. 긴 의자 한 개에는 몇 명이 앉을 수 있습니까? (28, 4)
2. 철수는 매일 아침 우유를 2개 먹습니다. 3일 동안에는 모두 몇 개의 우유를 먹겠습니까? (3, 7)	8. 콜라가 6병 있습니다. 3명의 어린이가 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 어린이가 몇 개의 콜라를 가지면 됩니까? (14, 7)
비율	비율
3. 지우개 1개를 사는데 백원짜리 동전 5개가 필요합니다. 지우개 2개를 사려면 몇 개의 동전이 필요합니까? (5, 7)	9. 지우개 3개를 백원짜리 동전 12개를 주고 샀습니다. 지우개 1개는 백원짜리 동전 몇 개를 주고 살 수 있습니까? (8, 40)
비교	비교
4. 철수는 책을 3권 가지고 있습니다. 영희는 철수의 4배만큼 가지고 있습니다. 영희가 가지고 있는 책은 모두 몇 권입니까?(6, 5)	10. 철수는 책을 9권 가지고 있습니다. 이것은 순희가 가지고 있는 책의 3배가 됩니다. 순희가 가지고 있는 책은 모두 몇 권입니까? (40, 8)
정렬	측정
5. 어린이가 3명씩 4줄 서 있습니다. 어린이는 모두 몇 명입니까? (3, 8)	11. 어린이가 10명 있습니다. 한 의자에 2명씩 앉으려고 합니다. 모두 몇 개의 의자가 필요합니까? (36, 4)
조합	곱셈과 나눗셈
6. 연주는 빨간색, 파란색 잠바를 가지고 있습니다. 또 청바지, 면바지, 반바지를 가지고 있습니다. 연주는 옷을 모두 몇 가지로 입을 수 있습니까? (8, 2)	12. 세발 자전거가 몇 대 있습니다. 바퀴를 세어보니 모두 12개입니다. 세발 자전거는 모두 몇 대 있습니까?

* ( )안의 수는 큰 수로 제시한 경우를 나타냄.

<표III-2> 2차 실험 문제

곱셈	나눗셈
동수누가	분할
1. 윷가락이 한 상자에 4개씩 들어 있습니다. 3상자에는 모두 몇 개의 윷가락이 들어 있습니까? (4, 7)	7. 윷가락이 8개 있습니다. 상자 2개에 똑같이 나누어 담으려고 합니다. 한 상자에 몇 개의 윷가락을 담으면 됩니까? (24, 4)
2. 철수는 매일 아침 우유를 2개 먹습니다. 3일 동안에는 모두 몇 개의 우유를 먹겠습니까? (3, 7)	8. 우유가 6개 있습니다. 3명의 어린이가 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 어린이가 몇 개의 우유를 가지면 됩니까? (14, 7)
비율	비율
3. 지우개 1개를 사는데 백원짜리 동전 5개가 필요합니다. 지우개 2개를 사려면 몇 개의 동전이 필요합니까? (5, 7)	9. 지우개 3개를 백원짜리 동전 12개를 주고 샀습니다. 지우개 1개는 백원짜리 동전 몇 개를 주고 살 수 있습니까? (8, 40)
비교	비교
4. 연주는 색종이를 3장 가지고 있습니다. 민기는 연주의 4배만큼 가지고 있습니다. 민기가 가진 색종이는 모두 몇 장입니까? (6, 5)	10. 연주는 색종이를 9장 가지고 있습니다. 이것은 민기가 가지고 있는 색종이의 3배가 됩니다. 민기가 가지고 있는 색종이는 모두 몇 장입니까? (40, 8)
정렬	측정
5. 달걀이 3개씩 4줄 있습니다. 달걀은 모두 몇 개입니까? (3, 8)	11. 과자가 16개 있습니다. 한 봉지에 2개씩 넣으려고 합니다. 봉지는 모두 몇 개가 필요합니까? (36, 4)
조합	곱셈과 나눗셈
6. 연주는 빨간색, 파란색 잠바를 가지고 있습니다. 그리고 청바지, 면바지, 반바지를 가지고 있습니다. 연주는 옷을 모두 몇 가지로 입을 수 있습니까? (8, 2)	12. 세발 자전거가 몇 대 있습니다. 바퀴를 세어보니 모두 12개입니다. 세발 자전거는 모두 몇 대 있습니까?

준이었다. 또한 연구자가 사전에 실시한 덧셈과 뺄셈 문제 시험에서 준수는 자신의 의사를 분명하게 말이나 글로 표현할 수 있었다.

2. 문제

곱셈과 나눗셈 문제는 Greer(1992)가 규명한 10가지 의미론적 구조에 기초하여 본 연구에 맞게 재구성하여 사용하였다. 문제는 준수가 친숙하게 느낄 수 있는 상황으로 제시하였으며 단지 자연수만으로 해결하는 문제로 구성하였다. 동수누가는 곱셈 학습에서 가장 자주 강조되는 상황으로 2문제를 제시하였으며, 비율과 비교 문제와 함께 곱셈의 역구조인 나눗셈 문제를 제시하였다. 그러나 정렬과 조합에 대해서는 2학년 수준에 적합하지 않은 것으로 판단하여 나눗셈 문제를 생략하였다. 분할과 측정의 나눗셈 상황을 동수누가의 곱셈 상황에 기초하여 제시하였다.

3. 실험

본 연구의 1차 실험은 준수가 학교에서 곱셈 단원을 시작하기 몇 일 전에 실시하였는데 이것은 형식적 교육을 받기 전 준수의 곱셈 해결 전략이 어떠한가를 알아보기 위해서이다.

1차 실험 후 준수는 학교에서 형식적 교육을 받았다. 교과서에 제시한 단원에는 같은 수로 묶어 세기, 묶어서 센 것을 같은 수 더하기로 나타내고 그 합 구하기, 구체물을 써서 곱하기의 의미를 알고 읽기, 같은 수 더하기를 곱으로 나타내기, 덧셈식과 곱셈식의 관계 이해하기, 구체물이 정렬된 상황을 보고 곱셈식으로 나타내기, 어떤 수의 몇 배는 얼마인지를 같은 수 더하기로 알기, 어떤 수의 몇 배를 곱셈식으로 나타내기, 구체적인 상황을 곱셈식으로 나타내기, 구체물을 써서 정렬된 상황을 곱셈식으로 나타내기, 곱셈 상황의 말을 곱셈식으로 나타내기의 수업 내용 및 활동을 포함하였다. 그리고 이 단원을 시작하면서 준수는 학교와 집에서 곱셈구구를 암기하였다.

준수의 담임교사는 공기돌과 같은 구체물을 실물화상기 위에 올려놓고 교과서에 제시한 순서에 따라 시연하기도 하였으며, 별이나 단추 모양의 그림을 코팅하여 자석 칠판에 붙여서 활동을 설명하기도 하였다. 아동들은 교사의 설명이 끝나면 자신의 교과서에 연필로 묶는 활동을 하거나 교과서에 제시한 지문에 답하였다. 그리고 수학 익힘책에 있는 문제를 해결하였으며 수업 시간이 충분할 경우 교사가 미리 준비한 수학 시험을 치렀다. 시험 결과는 다음 날 학생의 부모가 확인할 수 있게 하였으며 틀린 문제는 집에서 부모와 함께 해결하도록 과제로 제시하였다.

2차 실험은 준수가 학교에서 곱셈 단원을 마치고 1주일 후 실시하였는데 이것은 준수가 형식적 교육을 받고 난 후 달라진 곱셈 문제 해결 전략을 분석하기 위해서이다. 나눗셈에 대해서는 1, 2차 실험 모두 형식적 교육을 받기 전으로 준수의 나눗셈에 대한 비형식적 지식을 분석할 수 있었다.

실험은 약 30분에서 1시간까지 이루어졌다. 기본 문제를 해결했을 경우에는 큰 수 문제를 제시하였지만 기본 문제를 해결하지 못한 경우에는 큰 수 문제를 제시하지 않았다. 준수에게는 문제가 적혀있는 학습지와 함께 십 모형 10개와 낱개 모형 40개를 제공하였다. 문제를 해결하면서 필요하면 수 모형을 사용할 수 있었으며 학습지에 그림을 그리거나 글로 표현할 수 있도록 하였다. 연구자는 교사가 되어 준수에게 문제를 제시하고 준수가 곱셈과 나눗셈 문제를 해결하면서 자신이 생각하는 계산 전략을 구체물을 사용하거나 그림을 그리면서 말로 설명하도록 요구하였다. 필요한 경우 추가적인 질문을 하여 준수가 문제를 해결하는 과정을 더욱 상세하게 설명할 수 있도록 하였다.

4. 자료 수집 방법

준수가 곱셈과 나눗셈 문제를 해결하면서 어떤 계산 전략을 사용하는가를 알아보기 위해 본 연구에서는 관찰과 기록물 수집의 두 가지 방법으로 자료를 수집하였다.

가. 관찰

4회에 걸쳐 실시한 실험을 하는 동안 연구자는 문제를 제시하고, 문제에 대한 해결과정을 설명하도록 요구하며, 설명이 명확하지 않을 경우 추가적인 질문을 하여

더욱 명료한 설명이 이루어지도록 하는 실험의 전 과정을 관찰하였다.

나. 기록물 수집

기록물은 연구 대상에 관한 정보를 전달하기 위해 어떤 형태로든 기록된 일체의 것을 말한다. 본 연구에서는 연구 대상자가 실험에 참여하면서 문제를 해결한 문제 풀이 과정을 그림이나 글로 기록한 학습지, 연구자가 각 실험을 마치고 나서 생각이나 느낌을 기록한 일지, 실험 수업 당시 준수가 구체물을 사용한 장면을 그림으로 기록한 상황도를 수집하였다. 이러한 기록물을 통해 실험 당시의 상황을 구체적으로 파악할 수 있었으며 해결 전략의 전체적인 맥락을 이해할 수 있었다.

다. 비디오 촬영

실험 수업을 진행한 준수의 공부방에는 연구자가 수업을 하면서 관찰하는 것 이외의 다른 모든 활동을 다시 확인하고 연구자와 연구 대상자 간에 이루어진 대화를 분석하기 위해 비디오 촬영을 하였다. 비디오 자료에는 연구 대상자의 행동뿐만 아니라 대화가 저장되어 있었기 때문에 이 대화를 전사하여 준수가 곱셈과 나눗셈 문제를 해결하면서 가지는 인지적인 과정을 분석할 수 있었다.

준수에게 곱셈과 나눗셈 문제를 해결하면서 자신이 생각하는 방법이 어떤 것인지 구체물을 사용하거나 그림을 그리면서 말이나 글로 설명할 것을 요구하였으며 이런 대화나 활동을 녹화하였다.

5. 자료 분석의 관점

곱셈 전략은 학교에서의 곱셈 수업 이전과 이후에 나타난 전략에서 어떠한 차이를 보이는지, 곱셈에서의 각 상황별로 개념의 이해에 어떤 변화가 있는지를 인지능력에서 차지하는 정신적 계산과 관련하여 분석한다.

준수는 나눗셈에 대한 형식적인 교육을 받기 전이므로 본 연구에서는 준수가 측정과 분할 나눗셈을 해결하면서 경험하는 비형식적 나눗셈 해결 전략이 어떠한가를 나눗셈의 상황과 계산적인 측면과의 관계를 분석한다.

Ⅳ. 결과 및 분석

1. 곱셈 문제의 해결 전략

에피소드1(6월27일-1차 실험)

문제1(의자 1개에 4명, 의자 2개에는 몇 명?)을 보고 준수는 곧바로 8명이라고 답하였다. 그 이유는 '4 더하기 4하니까'라고 설명하면서 간단하게 두 개의 사각형을 그린 다음 그 안에 4개씩 원을 그렸다. 한 개씩 세는 것이 아니라 '4개 하고 4개', 즉 4 더하기 4로 해결하였다.

'긴 의자 한 개에 4명의 어린이가 앉을 수 있습니다. 긴 의자가 7개 있다면, 모두 몇 명이 앉을 수 있습니까?'로 문제에 포함된 수를 수정한 문제를 제시하자 준수는 긴 의자를 나타내는 사각형을 7개보다 더 많이 그렸다. 그리고 사각형 안에 원을 4개씩 그리더니 너무 어렵다고 포기하였다.

문제2(하루에 우유 2개, 3일 동안에는 몇 개?)를 듣자마자 준수는 '2 더하기 2 더하기 2는 6개'라고 답하였다. 그리고 종이에 원을 6개 그려놓고 '2개를 3개 먹을 수 있었어요. 2개를 먹고 2개를 먹고 또 2개를 먹으면 6개를 먹었어요.'라고 설명하였다. 여기서 '2개를 3개 먹을 수 있었다'는 말은 '2개를 3번 먹는다'는 것으로 2를 3번 반복적으로 더한다는 것을 말한다. 준수는 이 설명에 덧붙여 '8개도 먹을 수 있고요, 10개도 먹을 수 있어요'라고 하였다. 그 이유를 묻자 '2개를 또 먹고 또 먹으면 그렇게 되요'라고 하였다. '그러면 몇 번을 먹게 됩니까?'라는 질문을 하자 '응…, 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯'이라고 하였다. 이러한 사실은 나중에 준수가 측정의 나눗셈 상황을 해결할 수 있다는 것을 암시하였다.

'철수는 매일 아침 우유를 2개 먹습니다. 7일 동안에는 모두 몇 개의 우유를 먹겠습니까?'로 수를 변경하였다. 준수는 문제1의 큰 수 문제에서와 같이 아예 '7일'이라는 말이 나오자 그냥 하기 싫어하였다. 두 손을 놓고 누워버렸다. 동수누가의 문제를 해결하면서 준수는 수가 작을 때는 같은 수를 반복해서 더하는 덧셈 계산 전략을 사용하였지만 전체의 수가 20이 넘는 큰 수에 대해서는 인지적 처리 부하를 느끼고 있었다.

문제3(지우개 1개에 백원짜리 5개, 지우개 3개면 몇 개의 동전?)을 해결하면서 '몇 개의 동전이 필요합니까?'라고 묻자 '1000원, 하나에 500원이잖아요. 그러니까 또 500원하면 1000원'으로 답했다. 연구자가 다시 '100원짜리 동전은 몇 개 있어야 합니까?'라고 묻자 '500원은 5개잖아요. 응…, 10개'라고 답했다. 비율 문제에서 500원을 단위로 사용하는 것은 500원 주화가 우리 화폐에서 사용되고 있기 때문에 백원짜리 동전의 개수를 구하는 문제에 적절하지 않음을 알 수 있다.

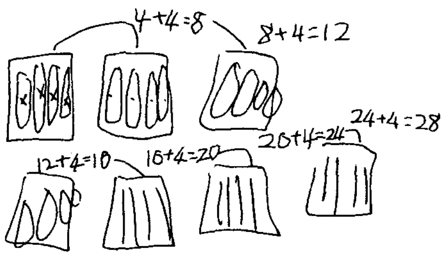
같은 문제를 '지우개 7개를 사면 몇 개의 동전이 필요합니까?'라고 묻자 '천원, 이천원, 삼천원, 사천원, 오천원'으로 답했다. 처음 2개까지는 천원이라는 것을 알았으나 그 다음부터는 아무런 계산 전략을 사용하지 않고 별 생각없이 천원 단위로 말하였던 것이다.

문제4(철수는 3권, 철수의 4배는 몇 권?)에 대해 준수는 '배'라는 말을 이해하지 못했다. '4배가 뭐예요?'라고 연구자에게 질문하였다. 답을 하지 않자 준수는 3개의 낱개 모형에 낱개 모형 4개를 더 붙여서 7권이라고 하였다. 준수는 배의 개념이 없었으며 4배를 4개가 더 많은 것으로 이해하였다. 문제5(3명씩 4줄은 몇 명?)에서 준수는 '3명씩 4줄'이라는 말 자체를 이해하지 못하였다.

문제6(2종류의 잠바와 3종류의 바지를 입는 모든 경우?)에 준수는 나름대로 몇 가지 방법을 찾았다. 예를 들면, 빨간색 잠바와 청바지, 파란색 잠바와 청바지, 체육복과 빨간색 잠바를 제시하였다. 그러나 청바지에 체육복이나 치마에 빨간색 잠바와 같이 위, 아래가 조합이 되지 않거나 문제에 나타나지 않은 치마를 제시하였다.

에피소드2 (7월17일-2차 실험)

문제1(한 상자에 윷가락이 4개씩, 3상자에는 몇 개?)에 준수는 윷 모양 그림을 4개씩 3번 그린 다음 '4하고 4하고 8; 9, 10, 11, 12'라고 답했다. 같은 문제를 4개씩 7상자로 바꾼 문제에 준수는 예전과 같은 두려움을 가지지 않았다. 네모를 7개 그린 다음 그 안에 4개씩 윷 모양을 그렸다. 그리고 '4+4=8, 8+4=12, 12+4=16, …, 24+4=28'과 같이 각각을 더해서 답을 구하였다(그림IV-1).



<그림IV-1>

곱셈 전략을 사용하지 않고 덧셈 전략을 사용하였다. '왜 그렇지?'라며 물어보니 '4, 8, 12, 16, …, 24, 28 맞잖아요'라고 하였다. 덧셈에 기초한 뛰어 세기를 하였다. 곱셈으로 나타내면 어떻게 되는가를 물어보니 '4, 3, 12'라고 말하면서 세 번째 네모를 가리켰고, '4, 4, 15'는 네 번째, '4, 5, 21'은 다섯 번째, '4, 6, 24'는 여섯 번째, '4, 7, 32'는 마지막 일곱 번째 네모를 가리키면서 곱셈구구로 말했다. 준수는 아직 곱셈구구가 확실하지는 않았지만 같은 수를 여러 번 더할 경우, 같은 수 더하기를 곱하기로 나타내는 방법을 알고 있었다.

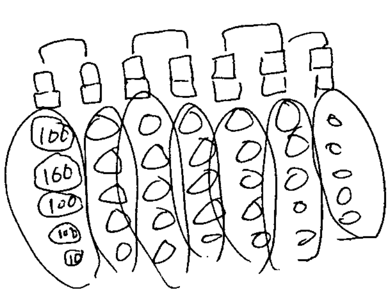
문제2(하루에 우유 2개, 3일 동안에는 몇 개?)에서 준수는 네모를 먼저 12개 그려놓고 2개씩 묶으면서 1일, 2일, 3일이라고 하였다. 그리고 '하나, 둘; 셋, 넷; 다섯, 7 여섯'으로 세어 6개라고 답했다. 즉 반복해서 세기 전략을 사용하였다.

같은 문제를 '3개씩 7일'로 수정하였다. 이번에는 한 번에 네모를 3개씩 그린 다음 원으로 묶는 것을 일곱 번 반복하였다. 그리고 한 개씩 모두 세어 21개라고 답했다. '다르게 세어볼 수 있을까?'라고 하자, '3 더하기 3은 6, 6 더하기 3은 9, …, 18더하기 3은 21'이라고 하였다. 다시 '3이 몇 묶음?'이라는 질문에 '일곱 묶음', '곱셈으로 나타내면?' '3, 7, 28 아! 아니 3, 7,…, 21'이라고 답했다. 준수는 확실히 큰 수 문제에 대한 저항감이 없었다. 세기 전략에서도 네모의 수를 모두 세는 단순한 세기에서 덧셈 계산과 곱셈 계산 모두를 사용할 수 있었다.

문제3(지우개 1개에 백원짜리 5개, 지우개 3개면 몇 개의 동전?)을 해결하기 위해 준수는 '500원이 2개는

1000원'이라고 하였다. 백원짜리로는 몇 개인가를 물어보니 처음에 답을 잘 하지 못했다. 그래서 1개에 백원짜리 몇 개인지 그려보라고 하고 2개면 100원짜리가 몇 개인가를 물어보니 10개라고 답했다. 500원짜리 동전이 백원짜리 동전을 세는 데 방해가 됨을 알 수 있다.

'지우개 7개를 사려면 몇 개의 동전이 필요한가?'에 대해 역시 500원 2개를 1000원으로 생각해서 빨리 3500원을 구했다. 그러나 100원짜리 동전으로는 몇 개인가를 묻자 답을 금방 하지 못하고 지우개 아래에 5개의 동전을 그렸다(그림Ⅳ-2).



<그림Ⅳ-2>

동전을 그린 다음 '다섯 개, 열 개'를 세고 (다시 100원자리 동전을 나타내는 원을 하나씩 그리면서) '열 하나, 열 둘, 열 셋, 열 넷, 열 다섯, 열 여섯, 열 일곱, 열 여덟, …, 삼십 다섯, 삼십 다섯 개!'라고 하였다. 더 빨리 셀 수 있는 방법을 요구했을 때 준수는 지우개 2개를 서로 연결하면서 '음…, 열 개, 스물 개, 서른 개, 서른 다섯 개'로 답하였다. 다음의 대화는 준수가 지우개 7개에 해당하는 동전의 개수를 곱셈으로 나타내는 내용이다.

교사: 곱셈으로 나타내면 어떻게 될까요?
준수: (머뭇거리면서) 7×5
교사: 7곱하기 5는?
준수: 7, 5, 35
교사: 왜?
준수: 지우개가 7개 있잖아요. 그리고 (동전이)5개씩 그러니까 7곱하기 5
교사: 동전이 5개씩 몇 묶음?
준수: 7묶음
교사: 5개씩 7묶음이면
준수; 아 맞다. 5 곱하기 7

준수는 처음에 뛰어 세기로 동전의 수를 세었지만 다시 열 하나부터는 직접 세기 전략을 사용하였다. 그러나 대화를 하면서 5개씩 7묶음은 5×7이라는 사실을 이해하였으며 또한 7×5의 상황과 서로 다르다는 것을 인식하였다.

문제4(연주는 3장, 민기는 연주의 4배, 민기는 몇 장?)에 준수는 여전히 4배를 4개 더 있는 것으로 이해하였다. 즉 '배'의 개념을 분명히 알지 못하였다.

문제5(달걀이 3개씩 4줄, 달걀은 몇 개?)에 준수는 3개씩 4줄을 그려놓고 묶음을 6개씩 2묶음으로 만들어 '6 더하기 6은 12'라고 하였다. 곱하기로 나타내도록 하니 6×2=12라고 하였다. 이것은 2-가 교과서에서 4×5의 정렬 문제에 해당하는 그림을 그려놓고 5개씩, 4개씩, 10개씩 묶어보는 활동을 해 본 경험의 영향을 받은 것으로 보인다. 연구자가 다시 3개씩 4줄을 그려보라고 하고 다시 몇 개씩 몇 줄인가를 물어보니 이번에는 3개씩 4줄이라고 답하고 3곱하기 4라고 하였다.

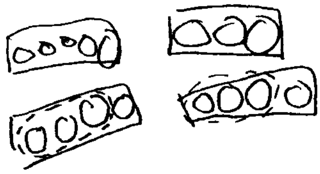
'3개씩 8줄' 문제로 바꾸었더니 역시 3개씩 8줄을 그려놓고 6개씩 묶어서 4묶음이 있다고 하면서 6×4라고 하였다. 다시 3개씩 몇 줄인가를 물으니 '여덟 줄'이라고 하고 '3곱하기 8'이라고 하고 '3×8'로 적었다. 준수는 몇 개씩 몇 줄을 여러 가지 방법으로 생각하고 있으며 몇 개씩 몇 줄, 즉 몇 개씩 몇 묶음인가를 알고 있었다.

문제6(2종류의 잠바와 3종류의 바지를 입는 모든 경우?)에 준수는 지난번과는 달리 바지를 중심으로 (청바지, 빨간잠바), (청바지, 파란잠바), (반바지, 빨간잠바), (반바지, 파란잠바), (면바지, 빨간잠바), (면바지, 파란잠바)의 모든 경우를 구할 수 있었다.

2. 나눗셈 문제의 해결 전략

에피소드3(6월 28일-1차 실험)

문제7(어린이 8명이 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉는 분할 문제)에 대해 준수는 처음에 '5명'이라고 하면서 종이에 그림을 그렸다. '이쪽 의자와 이쪽 의자가 똑같지 않은데?'라고 반문하자 다시 그림을 그리면서 먼저 각 사각형에 3개씩 원을 그리고 다시 1개씩을 더 그려 넣었다(그림Ⅳ-3).



<그림 IV-3>[5]

'어린이가 28명 있습니다. 긴 의자 4개에 똑같이 나누어 앉으려고 합니다. 긴 의자 한 개에는 몇 명이 앉을 수 있습니까?'로 같은 문제를 큰 수 문제로 제시하자 준수는 그림을 그리지 않고 구체물을 사용하였다. 긴 의자를 나타내는 십모형 4개와 어린이를 나타내는 낱개 모형 28개를 책상 위에 놓았다. 그 다음 십모형 4개의 각각에 낱개 모형 3개씩을 놓았다. 아직 낱개 모형이 남아 있자 이번에는 낱개 모형을 1개씩 각 십모형 위에 놓았다. 이렇게 낱개 모형 1개씩 놓는 것을 4번 반복하였다.

문제8(콜라 6병을 3명의 어린이가 똑같이 나누어 가지는 분할 문제)에 낱개 모형을 아이로 십 모형을 콜라로 생각하면서 아이 한 명에 콜라 2개씩 주고서 2병이라고 답하였다. 그 이유를 묻자 '봐보세요. 한 개씩 주면은 3개가 남잖아요. 그래서 또 한 개씩 주면 맞잖아요'라고 하였다. '콜라가 14병 있습니다. 7명의 어린이가 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 어린이가 몇 개의 콜라를 가지면 됩니까?'로 문제의 수를 바꾸자 준수는 아주 싫어하였다.

문제9(지우개 3개에 동전 12개, 지우개 1개는 동전 몇 개?)는 전혀 해결하지 못하였다.

문제10(철수는 책을 9권 가지고 있습니다. 이것은 순희가 가지고 있는 책의 3배가 됩니다. 순희가 가지고 있는 책은 모두 몇 권입니까?)에 대해 준수는 '배'라는 용어를 이해하지 못했다.

문제11(어린이 10명이 한 의자에 2명씩 앉는 측정 문제)에서 준수는 구체물을 사용하였는데, 연구자가 '의자 한 개에 몇 명이 앉습니까?'라고 묻자 6명이라고 답하였다가 다시 2명이라고 말했다. 그 다음 십 모형 4개에 2개씩 낱개 모형[6]을 놓고 2개가 남게 되자 십 모형 한 개를 더 가져와 거기에 2개의 낱개 모형을 놓고, 5개의 의자가 있어야 한다고 하였다.

문제12(세발 자전거가 몇 대 있습니다. 바퀴를 세어보니 모두 12개입니다. 세발 자전거는 모두 몇 대 있습니까?)에 준수는 바퀴를 먼저 3개씩 12개를 그려서 3개씩 묶으면서 '한 대, 두 대, 세 대, 네 대'라고 하였다. 바퀴가 21개인 문제를 제시하자 준수는 매우 하기 싫어하였다.

에피소드4(7월 18일-2차 실험)

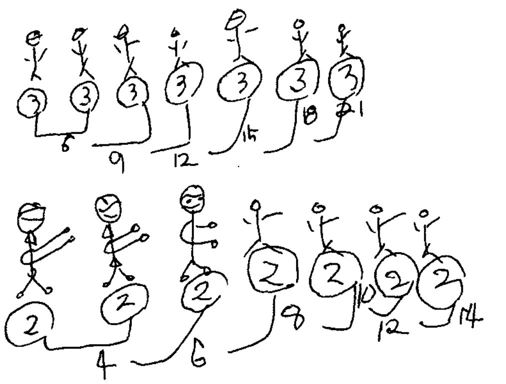
문제7(어린이 8명이 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉는 분할 문제)에 준수는 곧바로 '4개하고요 4개가 들어가요'라고 하면서 4더하기 4하면 8이 된다고 하였다. '윷가락이 24개 있습니다. 상자 4개에 똑같이 나누어 담으려고 합니다. 한 상자에 몇 개의 윷가락을 담으면 됩니까?'에 준수는 상자 모양의 네모를 4개 그린 다음 먼저 3개씩 각 상자에 나누어 주었다. 연구자가 윷가락을 모두 나누어 주었나요?라고 물으니 '12개'라고 답하고 아직 남아있다고 했다. 몇 개 남아있는지를 묻자 24에서 12를 세로셈으로 빼더니 12개가 남았다고 하였다. 12개를 어떻게 할 것인지를 묻자 이번에는 각 상자에 2개씩 윷을 그려 넣었다. 윷을 모두 다 나누어주었는가를 묻자 4개가 남았다고 했다. 이번에는 어떻게 나누어 줄 것인가를 묻자 1개씩 상자에 그려넣었다. 결국 24개를 모두 나누어 주었으며 각 상자에 있는 윷의 개수를 세어 6개씩 들어간다는 것을 알게 되었다.

문제8(우유 6개를 3명의 어린이가 똑같이 나누어 가지는 분할 문제)을 해결하면서 준수는 우유를 6개 그린 다음 곧바로 2개씩 원으로 묶으면서 2개씩 가진다고 하였다. 그러나 '우유가 14개 있습니다. 7명의 어린이가 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 어린이가 몇 개의 우유를 가지면 됩니까?'로 문제의 수를 변경하자 해결전략이 달라졌다. 처음에는 우유 14개를 그렸다. 그러나 7명이 나누어 가지는 것이 앞의 문제처럼 쉽게 해결되지 않자, 그림을 지우더니 사람 7명을 그렸다. 그리고 각 사람이 3개씩 먹는다고 하면서 그림 아래 3을 적었다. 모두 몇 개의 우유를 먹었는가를 묻자 3을 계속 더하면서, 3+3=6, 6+3=9, 9+3=12, 12+3=15, 15+3 18, 18+3=21의 값을 구하였다. 원래 있던 우유가 몇 개였는가를 묻자 더 많은 양이라는 것을 알고 다시 2개씩 나누어준다고 하면

5) 그림에서 점선 부분은 이해를 돕기 위해 연구자가 표시하였음

6) 준수가 사용한 십 모형은 긴 의자를, 낱개 모형은 어린이를 대신하여 사용한 구체물이었다.

서 사람 그림 아래 2를 적었다. 그리고 앞의 방법처럼 2+2=4, 4+2=6, 6+2=8, 8+2=10, 10+2=12, 12+2=14를 구하여 어린이 1명이 우유를 2개씩 가진다고 하였다. 이 방법은 지금까지와는 다른 방법이었다(그림Ⅳ-4).



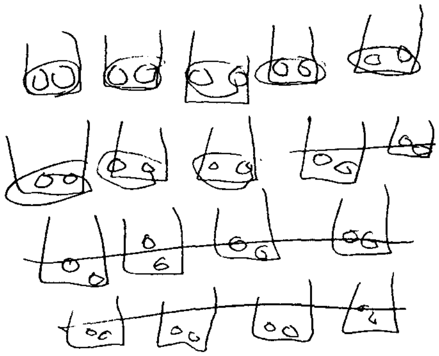
<그림Ⅳ-4>

문제9(지우개 3개에 동전 12개, 지우개 1개는 동전 몇 개?)는 동전 12개를 그린 다음 6개씩 묶어서 지우개 1개에 6개씩 주고 산다고 하였다. 그래서 '그러면 6개씩 주고 몇 개의 지우개를 샀니?'라고 묻자 '2개'라고 답하였다. 원래 3개의 지우개를 샀다는 것과 맞지 않자 이번에는 동전 4개씩 한 묶음으로 묶으면서 3개의 지우개를 살 수 있으며 지우개 1개는 4개의 동전으로 살 수 있음을 구하였다. 그 이유를 묻자 '4+4+4하면 12가 되잖아요'라고 하였다. 즉 1개의 지우개 값 4를 세 번 더하면 12개라는 값을 구할 수 있다고 하였다. 그리고 이것을 4×3=12로 곱셈으로 나타내었다. 나눗셈 문제는 결국 곱셈의 상황으로 해결하였다.

'지우개 8개를 백원짜리 동전 32개를 주고 샀습니다. 지우개 1개는 백원짜리 동전 몇 개를 주고 살 수 있습니까?'문제에 준수는 시도조차 하지 않으려고 하였다.

문제10(연주는 색종이를 9장 가지고 있습니다. 이것은 민기가 가지고 있는 색종이의 3배가 됩니다. 민기가 가지고 있는 색종이는 모두 몇 장입니까?)에 준수는 곱셈 문제에서와 같이 처음에는 9개의 사각형(연주의 것 9장)을 그린 다음 6개의 사각형(민기의 것 6장)을 그려서 여기에 3개의 사각형을 더하여 민기의 것이 6장이라고 답하였다. 이것은 준수가 여전히 3배를 3개 더 많은 것으로 이해하고 있음을 나타내는 것이었다.

문제11(과자 16개를 한 봉지에 2개씩 넣는 측정 문제)에서 준수는 봉지에 해당하는 그림을 종이 가득 그렸다. 그리고 또 다시 2개씩 원을 그려 넣었다. 그러나 연구자가 '과자가 처음에 몇 개 있었니?'라고 묻자 16개라고 하면서 처음부터 과자의 개수를 세어 8개의 봉지까지 세어 16개가 된다는 것을 알고는 나머지 그림을 모두 지웠다(그림Ⅳ-5).



<그림Ⅳ-5>

이러한 전략은 수가 더 커졌을 때도 마찬가지였다. '과자가 36개 있습니다. 한 봉지에 4개씩 넣으려고 합니다. 봉지는 모두 몇 개가 필요합니까?'라는 문제에 사각형을 여러 개 그려서 그 안에 4개의 원을 각각 그려 넣었다. 계속 그리더니 처음부터 원의 수를 세어 36개가 되는 봉지 이후의 것을 지웠다. 그리고 봉지의 수를 세었다.

문제12(세발 자전거가 몇 대 있습니다. 바퀴를 세어보니 모두 12개입니다. 세발 자전거는 모두 몇 대 있습니까?)에 준수는 원을 3개씩 그려서 12개의 원을 그렸다. 그리고 3개씩 그린 것을 세어 4대라는 것을 알았다.

3. 결과 분석

가. 곱셈 문제를 해결하는 계산 전략의 변화에 대한 분석

곱셈과 관련한 앞의 두 에피소드를 통해 분석해 보면, 형식적 교육이 있기 전에 준수의 곱셈 해결 전략의 특징은 작은 수 문제에서는 덧셈 계산으로 해결하지만 20이 넘는 큰 수에 대해서는 해결을 포기한다는 것이다. 예를

들면 1차 실험 문제1(의자 한 개에 4명, 의자 2개는 몇 명?)에서는 간단하게 '4 더하기 4'로 해결하였으며, 문제2(하루에 우유 2개, 3일 동안에는 몇 개?)에서도 2+2+2=6으로, 문제3(지우개 1개에 동전 5개, 지우개 2개는 동전 몇 개?)에 대해서도 간단하게 더하는 전략을 사용하였다. 그러나 곱한 수의 결과가 20을 넘어서는 수에 대해서는 답을 할 수 없었다. 정보처리 능력에 부하가 걸린 것이다.

형식적 교육 이전의 또 다른 특징은 수학적인 용어에 대해 인식하지 못하고 있다는 것이다. 예를 들면, 준수는 '배'라는 말을 이해하지 못하였다. 다시 말하면, 준수는 곱셈적 사고가 아니라 덧셈적 사고 수준에 머물고 있다는 것이다. 이것은 문제4(철수는 3권, 철수의 4배는 몇 권?)에서 낱개 모형 3개에 낱개 모형 4개를 더 붙여서 7권이라고 한 것에서 알 수 있다. 준수는 또한 3명씩 4줄에서 '몇 개씩 몇 줄'이라는 용어를 이해하지 못하여 3명씩 4줄을 어떠한 형태로도 표현할 수 없었다. '배'나 '몇 개씩 몇 줄'이라는 용어를 준수가 이해할 수 없었던 것은 준수가 생활하는 가운데 이러한 용어가 일상적이지 않은 것이 그 원인 중의 하나로 추측한다. 곱셈의 상황에서 이미 Greer(1992)와 Carpenter 등(1993)이 지적하였듯이 조합의 상황은 곱셈 상황 가운데 어려운 단계의 상황이었으나 비교나 정렬 문제와 달리 생활 가운데 준수가 경험하는 활동이었기에 몇 가지 경우라도 제시할 수 있었다.

형식적 교육이 약 1주일 동안이었지만 준수에게는 많은 변화가 일어났다. 준수가 학교 교육 이외에 어떠한 교육도 받지 않았다는 점을 고려하면 학교 교육을 통해 얼마나 변화되었는가는 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 학교 수업을 받고 난 후 곱셈 문제를 해결하면서 나타난 변화는 다음과 같다.

첫째, 준수는 자연수 곱셈 상황에 적용할 수 있는 다양한 계산 전략을 발전시켰다. 예를 들면 1번 문제(한 상자에 윷가락이 4개씩, 3상자에는 몇 개?)에서 준수의 세기 전략은 먼저 4와 4를 더하여 8을 구한 다음 8에서 9, 10, 11, 12와 같이 단순한 세기를 하였다. 간단한 덧셈 전략에서 더 나아가 덧셈 전략과 단순한 세기를 병행하였다. 그런가 하면 4개씩 7상자로 변경한 큰 수 문제에 대해서는 4+4=8, 8+4=12, …, 24+4=28과 같이 덧셈 전략으로 대체하였으며, 문제2(하루에 우유 2개, 3일 동안에는 몇 개?)에서는 하나, 둘; 셋, 넷; 다섯, 여섯으로 세는 반복해서 세기 전략을 사용하였다. 단지 2번 또는 3번 더하는 덧셈 전략에서 뛰어 세기, 반복해서 세기, 단순한 세기를 병행하다가 반복 덧셈을 통해 곱셈 계산까지 다양한 전략을 표현하였다. 이런 전략은 한 전략에서 다른 전략으로 전환하는 것이 아니라 더욱 폭넓은 레퍼토리를 발전시키는 것이었으며 문제 상황에 따라 정해진 전략이 존재하는 것도 아니었다. 이러한 결과는 Fischbein 등(1985)이 곱셈에 대해 반복 덧셈의 상황으로만 해결전략을 구사한다는 것과 의견을 달리한다.

둘째, 문제를 해결하는 계산 전략이 덧셈 전략을 통해 곱셈 전략으로 나아가고 있었다. 덧셈 계산에서 반복적으로 집합에 포함된 수를 더한 것을 곱셈구구로 표현할 수 있었다. 예를 들면, 윷가락 문제에서 준수는 곱셈구구가 정확하지는 않았지만 4를 세 번 더한 것이 4, 3, 12라고 하였으며 4, 4, 15라고 하면서 4를 네 번 더한 것을 가리켰다. 그리고 우유 문제에서도 덧셈 계산을 통해 3을 7번 더한 것이 3, 7, 21과 같음을 곱셈구구로 답했다. 심지어 달걀 문제인 정렬 상황에서도 3개씩 4줄을 6개를 한 묶음으로 생각해서 6개씩 2묶음이라고 하면서 6×2=12라고 하였다.

셋째, 계산 전략에 대한 인지적 처리 부하가 줄어들었다. 준수는 1차 실험에서 작은 수 문제에는 어느 정도 해결을 하였으나 곱한 결과 수가 20이상 되는 문제에서는 처리에 한계를 느꼈다. 그러나 형식적 교육을 받고 난 후 준수는 20이상의 큰 수 문제를 해결하는데 별 어려움을 느끼지 못했다. 여기에는 먼저 교과서에서 20이상의 수를 다루어 본 경험이 이런 부하를 해결하는데 큰 역할을 했을 것이고 또 하나는 곱셈구구의 암기가 도움을 주었을 것으로 생각한다. 곱셈구구에서의 곱한 결과는 2×1=2에서 9×9=81까지 그 수가 확대되면서 더 이상 준수는 20이상의 수를 두려워하지 않게 되었던 것이다. 준수는 문제에 제시한 수가 커지면서 덧셈 계산으로 반복 덧셈의 전략을 사용하였으며 이것은 다시 곱셈구구로 변하기 시작했다. 아직 곱셈구구가 익숙하지는 않았지만 곱셈구구의 원리를 터득하면서 인지적 부하는 현격하게 줄어들게 되었던 것이다. 그러나 여기서 중요한 것은 이러한 곱셈구구가 단지 기계적 암기만으로 준수의 인지적

부하를 줄였다고 보지는 않는다. 오히려 준수는 어떠한 사전 교육도 받지 않은 상태에서 단지 학교 교육을 받았을 뿐인데 이렇게 그 부하가 줄어들 수 있었던 것은 곱셈이 일어나는 생활 속의 상황에 대해 점점 익숙해지고 곱셈의 여러 상황을 좀 더 잘 이해하게 되면서 또한 문장제를 해석하는 능력에서 향상이 있었기 때문으로 해석한다. 이런 상황과 문장제에 대한 이해의 발전이 곱셈구구와 결합하면서 인지적 부하가 줄어들었던 것이다. 따라서 이러한 이해를 바탕으로 하지 않는 맹목적인 곱셈구구의 암기가 곱셈 문제 해결에서의 인지적 부하를 줄인다고 할 만한 증거는 없을 것이다. 어떤 아동에게는 곱셈에 대한 조기 연습은 궁지로 몰고 갈 수도 있다 (Gray & Tall, 1994). 그리고 더욱 불행하게도 그것은 수학이라는 과목은 기계적인 사실과 규칙을 배우는 과목이라는 잘못된 신념을 형성하는 결과를 가질 수 있다. 곱셈에서 연습은 필요하지만 반복된 덧셈 연산을 압축하기 위해 사용되는 선택의 속도와 생각의 정교성을 증가하려는 목적으로 이루어져야 할 것이다. 그리고 그것은 일상 생활 문제의 제시와 함께 혼합되어야 할 것이다.

나. 분할과 측정 나눗셈 문제를 해결하는 비형식적 지식 분석

준수가 형식적 나눗셈을 학습하기 전에 경험한 비형식적 지식은 측정 나눗셈과 분할 나눗셈으로 구분하여 살펴볼 수 있다.

첫째, 준수는 주로 거래 전략으로 측정 나눗셈을 경험하였다. 사물의 총 수와 각 집합에 속한 사물의 수를 제시하고 집합의 수를 구하는 경험을 하였다. 이런 측정 나눗셈에서 거래를 하기 위해 먼저 나타난 세기 전략은 (1)사물의 총 수에서 반복적으로 제거되는 각 집합에 속한 수 알기, (2)이들 각 집합이 거래되는 횟수 알기, (3) 재구성된 사물의 총수 확인하기의 세 절차를 사용하였다. 1차 실험 문제11(어린이 10명이 한 의자에 2명씩 앉는 측정 문제)에서 준수는 구체물을 사용하였는데, 연구자가 '의자 한 개에 몇 명이 앉습니까?'라고 묻자 6명이라고 답하였다가 다시 2명이라고 말했다(1). 그 다음 십 모형 4개에 2개씩 낱개 모형을 놓고 2개가 남게 되자 십 모형 한 개를 더 가져와 거기에 2개의 낱개 모형을 놓고 (3), 5개의 의자가 있어야 한다고 하였다(2).

2차 실험 문제11(과자 16개를 한 봉지에 2개씩 넣는 측정 문제)에서 준수는 그림을 사용하였다. 그러나 준수는 자신이 추정한 봉지 수를 구하기 위해 충분한 봉지 수를 미리 그린 다음 처음 봉지부터 2개씩 원을 그려 넣었다(1). 그 다음 처음부터 과자의 수를 세어 16개가 되는 것을 알고(3), 나머지 그림을 모두 지우고 남아있는 봉지의 수를 세어 답을 구했다(2). 이런 일련의 과정은 준수가 곱셈 문제를 해결하면서 사용한 전략이 반복 덧셈을 통한 덧셈 계산 전략이었다는 점을 생각하면 결국 곱셈 문제 해결 전략과 맥을 같이 한다고 볼 수 있다. 왜냐하면, 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 구해야 할 것은 거래되는 횟수이지만 이미 사물의 총수에서 반복적으로 가져오는 각 집합에 속한 수는 곱셈에서 반복적으로 더해지는 수로 사물의 총 수가 될 때까지 거래되기 때문에 결국 같은 전략이 된다.

이런 결과는 또한 준수가 곱셈 문제를 해결하면서 집합에 포함된 수를 집합의 수만큼 더한 것을 곱셈으로 어느 정도 해결할 수 있었기 때문에 자연스럽게 나눗셈도 곱셈의 해결 전략을 사용하여 해결할 수 있을 것이라는 추측을 가능하게 하였다. 이것은 문제12를 통해 더욱 분명하게 설명될 수 있다. '세발 자전거가 몇 대 있습니다. 바퀴를 세어보니 모두 12개입니다. 세발 자전거는 모두 몇 대 있습니까?'에서 문제의 내용으로 보면 '3×□=12'의 곱셈식에서 반복해서 더하는 횟수를 구하는, 즉 집합의 수를 구하는 곱셈 문제가 된다. 그러나 이 문제에 준수는 원을 3개씩 그려서(1), 12개의 원을 그렸다(3). 그리고 3개씩 그린 것을 세어 4대라는 것을 알았다(2)와 같은 순서로 측정 나눗셈을 해결할 때 사용한 계산 전략을 나타내었다.

둘째, 준수가 분할 나눗셈을 경험하면서 특별히 나타난 전략은 어림-조절의 전략이었다. 어림-조절은 거래의 또 다른 방법이다. 1차 실험 문제7(어린이 8명이 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉는 분할 문제)에서 준수는 처음에 '5명'이라고 답했다. 그리고 종이에 그림을 그렸다. 준수가 이 문제에서 보여준 전략에서 우리는 거래의 두 가지 경우를 살펴볼 수 있다. '한 번에 1개씩'과 '어림-조절'의 거래이다. 물론 어림-조절의 거래에서 '한 번에 1개씩' 거래되는 상황이 포함된다. 그러나 일반적으로 분할 나눗셈에서 일어나는 거래는 '한 번에 1개씩' 공평하

게 나누어 주는 것이기 때문에 여기서는 거래를 두 가지 경우로 구분하기로 한다. 준수는 어림-조절의 거래를 통하여 측정 나눗셈을 해결하면서 사용한 절차를 반복적으로 어림하여 이를 조절하였다. 먼저 3개의 낱개 모형을 십 모형 각각(4개의 의자를 나타냄)에 놓고서(1), 12개의 낱개 모형을 사용하였다는 것을 알고 아직도 전체에서 가져와야 하는 수가 남았음을 알았다(3). 그 다음 이런 과정을 계속적으로 몇 번 더 반복하여 마침내 반복적으로 가져오는 한 집합의 수를 구하게 되었다(1). 다만 분할 나눗셈에서는 반복적으로 거래되는 횟수는 이미 정해져 있었다(2).

2차 실험 문제7(윷가락 24개를 상자 4개에 똑같이 나누는 분할 문제)에서도 준수는 먼저 3개씩을 각 상자에 넣어 거래하고 다시 2개씩 각 상자에 넣어 거래하고 다지막으로 1개를 각 상자에 넣어 거래하였다. 이것을 다르게 표현하면 다음과 같다.

상자	상자	상자	상자	거래
3	3	3	3	…1회
2	2	2	2	…2회
1	1	1	1	…3회

어림-조절 전략은 모든 계산과 자연스럽게 통합되는 거래를 경험하는 한 방법이었다. 한 개 이상의 대상이 첫 회에서 거래되었다. 준수는 먼저 3개의 윷을 가질 수 있다고 어림하고서 네모 상자 안에 3개의 윷을 그려 넣었다. 이들 윷을 세고 나서 12개라는 것을 알았다. 24개에서 12를 뺄셈하여 아직 12개가 남았음을 알고 다시 2개의 윷을 추가하여 어림하고 아직도 4개가 남게 되자 마지막으로 1개의 윷을 나누어 주었다. 마지막으로 모두 나누어 준 후 각 상자에 들어 있는 윷의 개수를 세어 6개씩 들어가는 것을 확인하였다.

한 번에 같은 수만큼 거래하는 것으로 경험하는 어림-조절은 측정 나눗셈 방법이 분할 나눗셈 문제에서의 상황과 통합될 때 어떤 현상이 일어나는가를 잘 설명해준다. 분할 나눗셈은 사물의 총 수와 집합의 수를 제시하고 각 집합에 속한 사물의 수(여기서는 각 상자에 들어가는 윷가락의 수)를 구하는 것이다. 한 번에 1개씩 거래 될 때, 제수로 표현되는 집합의 수는 측정 나눗셈에서 피제수로 표현되는 사물의 총수로부터 반복적으로 가져왔다. 각 회에서 거래된 구슬의 수는 따라서 상자의 수와 같다. 그러나 준수가 사용한 전략은 이런 전략이 아니라 좀 더 발전한 단계라고 할 수 있는 어림-조절의 전략이었다.

V. 논의

본 연구에서는 먼저 준수를 대상으로 곱셈에 관한 학교 교육을 받기 직전과 직후에 곱셈 문제를 해결하는 전략이 어떻게 전개되는지를 분석하였다. 분석 결과, 준수는 형식적 교육이 있기 전에 작은 수 문제에는 덧셈 계산으로 해결하였지만 큰 수 문제는 해결하지 못하였으며 수학적 용어에 대해 인식하지 못하였다. 그러나 형식적 교육을 받고 나서 준수는 자연수 곱셈 상황에 적용할 수 있는 다양한 계산 전략을 발전시켰으며, 문제를 해결하는 계산 전략이 덧셈 전략에서 곱셈 전략으로 변하였다. 그리고 계산 전략에 대한 인지적 처리 부하도 줄어들었다.

다음으로 나눗셈에 관한 학교 교육을 받기 전 준수가 분할과 측정 상황에서 나눗셈 문제를 해결하는 비형식적 지식을 분석하였다. 분석 결과, 준수는 주로 거래 전략으로 측정 나눗셈을 경험하였으며 분할 나눗셈을 해결할 때에는 특별히 어림-조절의 전략을 사용하였다. 어림-조절의 전략은 모든 계산과 자연스럽게 통합되는 거래를 경험하는 한 방법이었다.

지금까지의 결과는 특수한 사례에 관한 연구이므로 연구결과를 일반화하는데 어려움이 있지만 곱셈과 나눗셈 학습과 관련하여 몇 가지 시사점을 제공한다.

첫째, 곱셈 문제를 해결할 때 사용하는 전략이 다양하게 전개되기 위해서는 동수누가, 비율, 비교, 정렬, 조합의 상황을 학생 자신의 현실에서부터 수학화하는 경험을 제공해야 한다. 예비연구에서 준수에게 '교실에 책상이 2개 있습니다. 한 책상에 4명의 어린이가 앉습니다. 어린이는 모두 몇 명 있습니까?'라는 문제를 제시하였다. 이 문제에 대해 준수는 책상을 서로 맞붙여서 4명의 어린이가 앉는 그림을 그렸다. 학교에서는 흔히 소집단 학습을 하기 위해 각자의 책상을 서로 맞붙이는 경험을 하기 때문이다. 이것은 준수가 생활 속에서 경험하는 현실이 아니었다. 준수는 학교 운동장에 있는 긴 의자에 어린이 4명이 앉을 수 있다는 것을 경험하였으며 문제를

준수의 생활 상황으로 바꾸었을 때 곱셈 문제를 해결 할 수 있었다.

학교 교육에서 이루어진 형식적 교육은 준수에게 많은 수학화 활동을 경험하게 했다. 수학화에서 현상이란 현실적인 경험일 수도 있고 수학적인 경험일 수도 있다. 학교 교육에서 구체물이나 반구체물을 사용하여 이루어진 교사의 설명이나 준수가 교과서에 연필로 나타낸 활동 그리고 곱셈구구를 암기하는 활동을 통해 준수는 같은 수를 여러 번 더하는 것보다 곱하기로 나타내는 것이 훨씬 간편하며 곱셈구구로 나타낼 수 있다는 것과 같은 많은 수학적인 경험을 할 수 있었다.

준수는 비교 문제에서 '배'의 개념을 분명히 알지 못하였다. 그래서 연구자는 연구가 끝난 다음 준수에게 색종이나 단추와 같은 이산량을 그림으로 표현하면서 수직선 모델을 사용하여 다시 설명하였다. 또한 길이와 같은 연속량을 사용하여 띠 모델로 배의 개념을 설명하였다. 설명을 하면서 '배'라는 말도 자주 사용하였다. 이와 같은 방법으로 준수는 배의 개념을 보다 잘 이해할 수 있었는데, 이를 다시 생각하면 곱셈적 사고에서 중요한 '배'의 개념을 설명하면서 문제를 표현할 때 사용하는 시각적 표현을 이산적인 집합 모델로 표현하는 것과 함께 띠나 수직선과 같은 길이 모델이나 사각형이나 원과 같은 넓이 모델을 사용하는 것이 좋은 방법인 것 같다.

둘째, 곱셈을 해결하는 계산 전략이 덧셈 전략일 때 나눗셈 문제를 해결하는 전략은 반복 덧셈을 통한 덧셈 계산과 맥을 같이 하고, 곱셈을 해결하는 전략이 덧셈 전략에서 곱셈 전략으로 전환할 때 나눗셈을 해결하는 전략도 마찬가지로 전환될 수 있음을 나타낸다.

준수는 에피소드4의 문제9(지우개 3개에 동전 12개, 지우개 1개는 동전 몇 개?)를 해결하면서 처음에는 동전을 4개씩 묶어 3묶음을 만들어 지우개 1개는 동전 4개로 살 수 있다고 답했다. 그리고 '4+4+4하면 12가 되잖아요'라고 하면서 곱셈을 해결하는 덧셈 전략으로 나눗셈 문제를 해결하였다. 그 다음에는 '4×3=12'라는 곱셈 전략을 사용하였으며 이 전략에 기초하여 □×3=12에서 미지의 값 □를 구하는 12÷3=□의 나눗셈 문제를 해결할 수 있었다. 이것은 곱셈 학습이 이루어지고 얼마간의 기간이 지난 다음에 나눗셈 학습을 할 것이 아니라 곱셈에 대한 상황이나 계산 전략의 학습과 곧바로 연결하여 나눗셈 학습이 진행될 수 있음을 암시한다.

셋째, 현행 교과서에서 나눗셈 학습은 3-가 단계에 제시된다. 그러나 분할 나눗셈에서 나타나는 측정의 상황적 측면을 폭넓게 경험할 수 있는 활동을 충분히 제시하지 못하고 있는 것 같다. 예를 들면 3-가, 4단원, 똑같이 나누어 봅시다(2)에서는 생활에서 알아보기에서 '수민이는 10개의 빵을 친구와 나누어 먹으려고 접시에 담고 있습니다. 5사람이 똑같이 나누어 먹으려면 한 접시에 몇 개씩 담으면 되는지 알아보시오'라는 분할의 상황을 제시하면서 '빵을 접시마다 한 개씩 차례대로 담으시오.', '남은 빵을 접시 하나에 한 개씩 더 담으시오.'와 같은 활동을 제시하였다(교육인적자원부, 2002, p.48). 그러나 이 활동에서는 분할 나눗셈에서 나타나는 상황적 측면을 한 번에 한 개씩 거래하는 상황으로만 제시하여 아동이 실제적으로 나눗셈을 경험하는 어림-조절의 활동을 충분히 고려하였다고 보기 어렵다. 아동들은 한 번에 1개씩 거래하기도 하지만 한 번에 2개 또는 그 이상의 빵을 거래하기도 한다. 즉 시행착오를 통한 어림-조절의 활동이 아동들의 자연스러운 경험이라는 것을 인식하면서 보다 개방적인 활동이 이루어져야 할 것이다. 따라서 아동의 나눗셈에 관한 비형식적 지식에 대한 깊은 이해를 바탕으로 나눗셈에 대한 형식적 지식과의 연결을 모색할 수 있는 방안의 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2002). 수학 3-가. 서울: 대한교과서주식회사.

남승인 · 서찬숙 (2004). 문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 영향. 초등수학교육, **8(1)**, pp.33-50.

Brekke, G. (1991). *Multiplicative structures at ages seven to eleven. Studies of children's conceptual development, and diagnostic teaching experiments*, University of Nottingham, Nottingham.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, K. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 24, pp.428-441.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitive guided instruction.* Postsmouth, NH: Heinemann.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Merino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education* **16**, pp.3-17.

Graeber, A.; Tirosh, D. & Glover, R. (1989). Preservice teacher's misconception in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education* **20**, pp.95-102.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, pp.115-141.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education* **20**, pp.147-158.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal* 4, pp.24-42.

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1992). Young children's division strategies. In F. Furinghett(Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference* (pp. 152-159), Assisi.

Resnik, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg(Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic press.

Silver, E. A. (1987). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-198), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education* **24**, pp.233-255.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-162). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

A Case Study on Solution Strategies for Multiplication and Division of a Second Grader

Lee, Jong Euk
Gaepo Elementary School, Busan, Korea
E-mail: jongeuk@chol.com

One second grader, Junsu, was observed 4 times before and after formal multiplication lesson in Grade 2. This study describes how solution strategies in multiplication problems develop over time and investigates awareness of the relation between situation and computation in simple measurement and partitive division problems as informally experienced. It was found that Junsu used additive calculation for small-number multiplication problems but could not solve large-number multiplication problems and that he did not have concept of mathematical terms at first interview stage. After formal teaching, Junsu learned a variety of multiplication solution strategies and transferred from additive calculation to multiplicative calculation. The cognitive processing load of each strategy was gradually reduced. Junsu experienced measurement division as a dealing strategy and partitive division as a estimate-adjust strategy dealing more than one object in the first round.

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Multiplication, Division, Solution Strategy, Informal Knowledge