韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2007. 05. 제 46권, 제 2호, 173-192.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2007, Vol. 46, No. 2, 173-192.

틀의 차이를 극복하기
- 수학교실에서의 논증분석 연구 -

김 동 원 (서울대학교 대학원)

Ⅰ. 서 론

1. 도입

수학교실에서는 수학교사와 학생들, 그리고 수학교과서, 각종 교구가 조화를 이루어 활동이 발생하고 그 속에서 학생들은 무엇인가를 배우게 된다는 것이 우리의 상식에 부합하는 설명일 수 있다. 그리고 누구나 비슷한 경험을 했다는 이유로 수학교실에 대해 한 두 마디 사견을 피력할 수는 있을 것이다. 하지만 우리의 일천한 상식과 경험 수준의 설명으로는 교학상장의 산실인 교실에서 발생하는 사태를 제대로 이해할 수 없음은 자명한 논리이다. 따라서 수학교실에 대한 체계적인 연구는 학습을 중심으로 이루어지는 교실 내의 모든 사태의 관계망을 설명할 수 있도록 진행되어야 하며, 이를 위해 지금까지의 연구는 크게 세 가지 흐름으로 전개(Seeger, Vöigt & Waschescio, 1998)되어 왔다. 하나는 교실 문화의 변화에 목적을 둔 것으로, 그 속에서 교사와 학생의 역할, 상호작용 패턴 등의 변화를 이끌어가려는 노력의 일환이다. 이는 교사교육과 밀접한 관련을 맺는다. 두 번째 흐름은, 교실 문화의 형성에 초점을 두어, 교사와 학생의 상호작용과 의사소통의 과정을 통해 교실문화가 구성되어 가는 방식에 관심을 둔다. 이 흐름은 구성주의와 상징적 상호작용론을 배경으로 하며, 미시-문화적 관점에서 문화 구성의 과정을 면밀히 분석하는 방법을 취한다. 세 번째 흐름은 교실과 인식론에 관한 것으로, 수학교실에서 지식이 생성되고, 소통되고, 다듬어져 가는 방법이 주된 연구 분야가 된다. 우리는 이 세 가지 흐름 중, 두 번째 입장과 세 번째 입장의 통합을 시도하여, 현상 그 자체로의 수학교실을 이해하고 그 문화의 형성 및 진화과정과 동반되는 학생들의 수학학습을 읽으려고 한다. 이는 해석적 틀의 도입으로 개인적, 사회문화적 관점의 통합을 통한 교실 공동체의 학습을 읽어내려는 입장(Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001)의 연장선상으로 볼 수 있다.

교실에서 수학교사와 학생 각각은 수학적 내용의 포괄성과 깊이 뿐 아니라 그 내용을 사용하는 방법(형식)에 있어서도 서로 다른 연상 세계, 즉 인지적 틀의 차이를 가진 채 만남을 시작한다. 이런 차이를 가진 두 주체와 그들의 상호작용의 대상인 수학이 함께 이루는 행위와 관심의 관계망이 학습을 주목적으로 작동하는 행위양식 또는 현상(권민철, 2005)을 수학수업이라 할 때, 이의 산물인 수학학습은 양자 사이에 존재하는 인지적 '틀의 차이'(Krummheuer, 1995)가 상징적 상호작용(Blumer, 1969)을 통해 극복되는 과정일 것이다. 이는 학습 공동체 내에서의 언어사회화 혹은 문화화 과정(O'Connor, 1999)이며, 학생들이 이 과정을 통해 수학적 문해능력을 갖추는 것이 수학학습 본연의 목적이 될 것이다.

이렇게 이루어지는 학습의 과정을 탐색하기 위해서는 수학교실에 대한 장기간의 참여관찰을 통해 공동체의 문화모형을 파악하고, 그 속에서 형성된 규범 체계 내에서 일어나고 있는 상호 교섭의 과정을 면밀히 분석할 필요가 있다. Vöigt(1996)는 교사는 수학적 주장과 수학 교육의 전통을 나타내는 반면, 학생은 다른 배경지식을 갖고 있기에, 교사와 학생 사이의 상호교섭은 참여자들 사이의 위와 같은 차이로 인해 매력적인 분석의 단위가 된다고 말한다. 필요성에 부응하여 우리는 중학교 2학년 교실 한 곳을 선정, 일 년간 참여관찰을 시행하였고, 그 중 교과의 영역 의존적 특성을 고려하여 2학기에 진행된

* 2006년 3월 투고, 2007년 4월 심사 완료
* ZDM 분류 : C53
* MSC2000 분류 : 97C60
* 주제어 : 교실 문화, 틀의 차이, 논증, 담화분석, 재현

기하수업을 집중, 선별 관찰(이희봉, 1988) 및 분석의 대상으로 선정하였다. 그 속에서 한 수학교사와 학생들이 도형의 성질에 대해 논증하는 과정을 내용과 형식에 관한 상호교섭을 통한 '틀의 간극 좁히기'라는 입장에서 해석을 시도하였고, 다음과 같은 연구문제에 답할 것이다.

① 수학교실에서 교사와 학생이 갖는 틀의 차이는 무엇인가?
② 틀의 차이가 극복되기 위해 수반되는 교사의 상호교섭 방식은 무엇인가?
③ 상호교섭의 산물 중 어떤 측면을 틀의 차이가 극복되는 과정이라고 말할 수 있는가?

따라서 우리는 교사 주도의 상호교섭이 실행되는 방식을 형식적인 측면에서는 수사학에 근거한 논증구조와 사회언어학에 기반을 둔 화법을 중심으로 살펴보았고, 내용적인 측면에서는 시간의 흐름에 따라 과거에는 앎의 대상이었던 '명제 또는 성질'이 새로운 앎의 도구인 '기본성질'이 되어가는 과정을 살펴본 후, 양자의 통합을 시도하였다. 이 때 상호교섭의 주된 방식은 반복된 화행 속에서의 상호 참조(參照)와 차용(借用)이며, 지속적 협상의 산물은 교사와 학생, 양자의 인지적 상사(相似)이다.

이 글의 구성은 다음과 같은 순서로 이루어진다. 먼저 이 연구의 관점과 분석틀을 제공한 이론적 배경을 진술한 다음, 수행된 참여관찰연구의 상세한 절차 및 분석의 과정과 2학기 동안 진행되었던 전체 수업의 흐름을 기술한다. 다음은 연구의 결과로, 상호교섭의 형식적인 측면을 교사의 직접적인 교섭과 간접적인 교섭으로 구분하여 살펴볼 텐데, 우선 직접적인 교섭에 대해 교사의 의사 표현을 기반으로 간략히 언급한 후, 간접적인 교섭에 대해서는 수업 중 교사와 학생들에 의해 시도된 논증의 구조, 교사의 전형적인 피드백 방식인 재현하기, 교사와 학생들의 증명의 전개방식과 화법, 이상 세 가지 측면에서 진술할 것이다. 마지막으로 교섭의 내용적인 측면에 대해서는 '내용의 진화'라는 이름으로 기술할 것이다.

2. 이론적 관점

본 연구의 기본적인 전제는 수학교실에서 교사와 학생 사이에 논증을 대상으로 삼아 상징적 상호작용을 통해 틀의 차이를 극복해가는 과정이 곧 학습의 과정이라는 것이다. 이해를 돕기 위하여, 상징적 상호작용론의 핵심적인 주장을 Blumer(1969)의 논의에 기초하여 기술한 뒤, 틀의 차이는 Krummheuer(1995)의 연구를 참조하여 통합해서 설명할 것이다.

일반적으로 상징적 상호작용론은 세 가지 전제를 바탕으로 하고 있다. 첫 번째 전제는 인간은 대상에 대하여 그 대상이 자신에게 갖는 의미에 기초하여 행동한다는 것이다. 두 번째 전제는 대상이 갖는 의미는 인간과 대상 혹은 인간과 인간의 상호작용으로부터 나온다는 것이며, 세 번째 전제는 대상이 갖는 의미는 그것과 조우하는 사람들의 해석의 과정 속에서 다루어지고 수정된다는 것이다. 이 상호작용론의 세 가지 기본 전제는 수학교실에서 이루어지는 논증이라는 대상을 상징적 상호작용의 과정에 포섭시킬 단서를 제공하며, 수학 교실의 각 주체들이 논증을 매개로 상호교섭을 하며 의미를 구성하고 수정하는 과정의 원동력은 그들이 갖는 인지적 틀의 차이에서 획득된다.

틀(framing)의 개념은 Krummheuer(1995)가 논증의 개념을 설명하고 난 후, 수학 교실에서의 학습과 논증 사이의 연결 지점을 모색하기 위해 도입한 개념이다. 틀은 "인지적인 일상화와 상호작용적 표준화 과정에 의해 드러나는 사회적 사태에 대한 도식화된 해석"(Krummheuer, 1995, p. 249)으로 정의된다. 그는 논증의 결과 혹은 효과는 틀의 작용 과정에 비추어 판단되어야 한다고 말한다. 다시 말해 논증은 틀-의존적 성격을 갖는다는 것이다. 한편 논증은 장-의존적 성격도 갖는다. 여기서 장의 개념은 법정의 재판, 학회의 세미나, 학교의 교실과 같이 나름의 의사소통의 규칙이 형성된 특정한 사회적 공간들을 말한다. 두 가지 성격을 갖는 논증을 대상으로 삼아 Krummheuer는 교사와 학생의 틀의 차이에 대한 논의를 시작한다. 그에 의하면 틀의 차이는 교사와 학생들 사이의 의미에 대한 인지적 구성의 차이이다. 예를 들어, Toulmin의 논증 모형에 비추어 보자면, 논증의 최소 형식(core)[1]에 대한 보증(backing)을 제시하는 방식의 차이로 볼 수도 있고, 논증의 최소 형식 자체를 구성하는

1) 논증의 핵이라 불리며, 다음 문장에서 그 뜻을 알 수 있다. provided that the correct warrant is employed, any argument can be expressed in the form 'Data; warrant; so conclusion' and so become formally valid. (Toulmin, 2003, p. 110)

능력의 차이로 볼 수도 있으며, 한편 Krummheuer가 제시한 것과 같이 학생들의 논증 과정 자체가 그림에 의존하고 있는지 아니면 그림과 독립적인지의 차이로 볼 수도 있다. 그에 의하면 이와 같은 틀의 차이로 인해 유망한 보증(backing)은 모든 구성원들을 위한 것이 아닌 한 개인만을 위한 것일 수도 있다. 이렇듯 한 장(field)에서 차이를 가진 주체들의 만남은 상호교섭의 출발이다. 차이에서 출발한 상호교섭의 부단한 과정은 공동체 내의 공유되어 가는 사회적 규범, 사회수학적 규범의 형성, 수학적 관행의 형성(Yackel & Cobb, 1996) 과정, 다시 말해 집단적 학습과정에 상응한다. 우리는 이에 주목하여 주체들의 틀의 차이가 극복되는 미시적인 과정을 위에서 제시한 사례들 뿐 아니라 교사와 학생들의 논증 방식 및 교사의 발화 기술 및 증명 방법을 중심으로 살펴 볼 것이다.

3. 참여관찰 및 전체 수업의 개요

3.1. 연구의 현장과 제보자

우리가 1년간 참여관찰을 수행한 곳은 늘봄구에 위치한 늘푸른중학교 2학년 교실이며, 제보자는 박교사와 38명의 학생들이다. 박교사는 관찰 당시 3년째 교사로 재직 중이었다. 면담과 자기보고서를 통해 알 수 있었던 박교사의 교사로서의 삶과 수학교육에 대한 핵심적인 가치는 자율(自律)이며, 우리는 그곳에서 일 년 내내 그것이 맘껏 표출될 수 있는 교실 분위기를 만들려는 박교사의 노력을 엿볼 수 있었다. 그것이 곧 자신이 원했던 '풍부한 발표환경'(나미영, 2006)의 조성이었으며, 그 속에서 학생들의 끼의 분출을 원했다고 스스로 말하고 있다.

3.2. 참여관찰: 자료의 수집에서 분석까지

낯선 외부자의 방문에 "어느 방송국에서 나오셨어요?"라는 농담 섞인 환영을 했던 학생들과 박교사가 함께 만들어가는 공간의 문을 연 뒤, 우리는 관찰을 시작했다. 모든 수업을 녹화하였으며, 녹화된 비디오는 모두 전사되어 관찰시 기록한 필드노트와 더불어 분석 과정의 기본 자료가 되었다. 수업은 세 대의 캠코더를 이용하여 한 대는 교실 후면, 또 한 대는 교실 전면에 배치하여 전체적인 교실 상황을 녹화하였으며, 나머지 한 대로는 교사의 행동과 국소적인 상호작용 활동을 기록함으로써, 교실에서 발생할 수 있는 많은 상황들을 담으려고 하였다. 부가적으로 수업 진행 중 사용된 활동지, 평가지, 기록물들을 수집하였으며, 수업 과정에 대한 이해를 위하여 박교사와 함께 매주 정기모임을 통해 비형식적 면담을 실시하였고, 이것 또한 비디오로 녹화하여 전사하였으며, 특히 박교사의 교사로서의 생애와 관련한 부분에 대해서는 자기보고서 작성을 요청, 분석과정에 통합하였다.

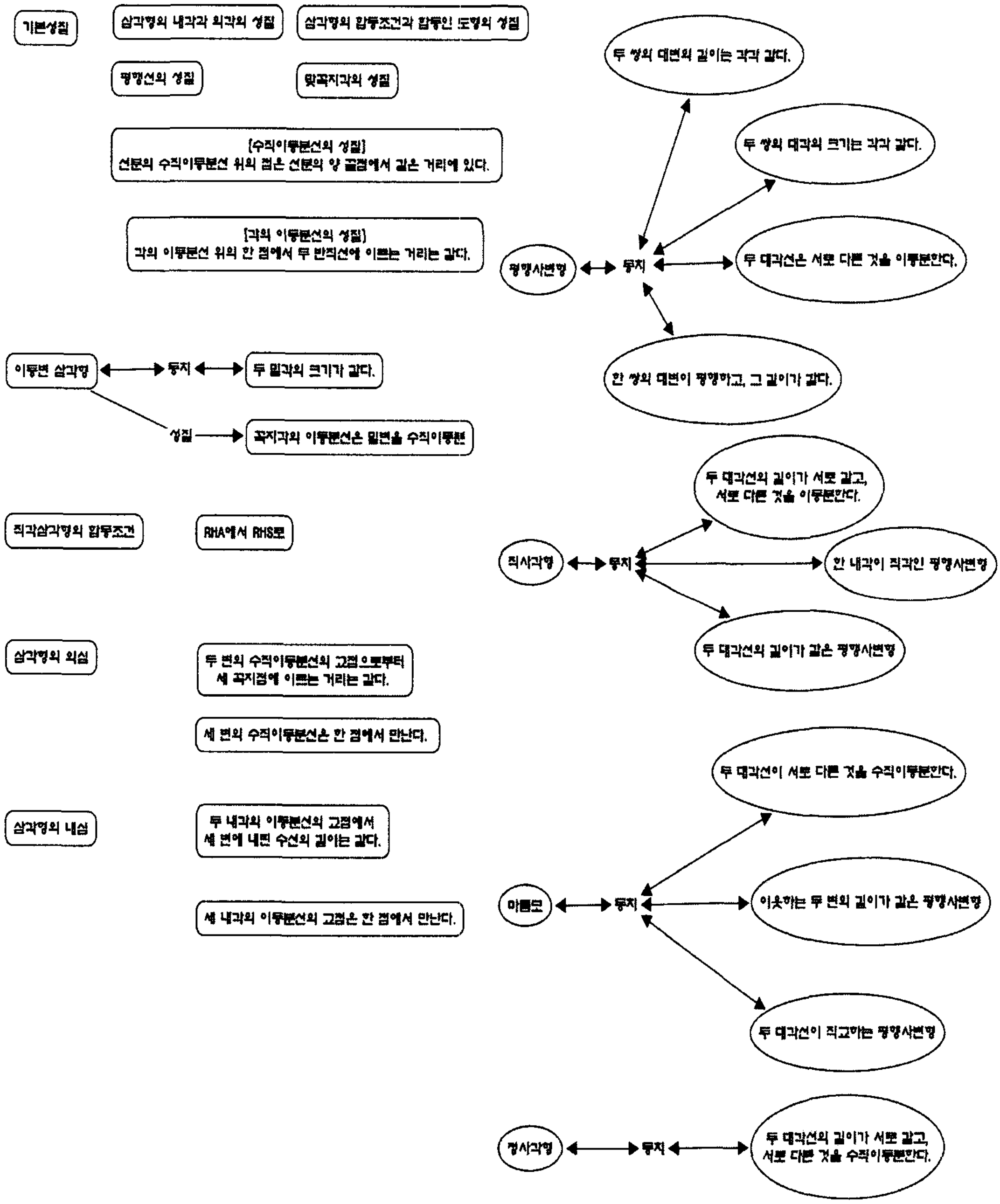
관찰의 진행과 자료의 수집, 분석의 과정에서 우리는 구성원들의 행동을 이해하기 위해 필요한 연구자의 품성인 문화상대주의적 관점과 인류학적 감수성(한국문화인류학회, 2003)을 갖기 위해 노력했으며, 우리에게 이미 친숙한 공간에 대한 참여관찰이기에, '해체와 이질화'의 관점에서 현상을 이해하려고 했다.

분석이 진행된 절차는 다음과 같다. 우선 수업 비디오 전사록의 모든 화행에 대하여 코드를 부여하였으며, 이를 바탕으로 반복적으로 나타나거나 주목할 만한 항목들을 선택하여 목록을 작성하였으며, 특히 본 논문의 주된 분석 대상인 논증과 관련해서는 교사의 설명과 학생의 발표라는 두 개의 큰 범주로 나누어 각각에 대하여 Toulmin의 논증모형을 반복적으로 적용함으로써 수업에서 발생한 모든 논증과정을 모형으로(<그림 3>, <그림 7>, <그림 8>, <그림 11>, <그림 13>, <그림 20>, <그림 22>) 구성했다.

우리의 주된 분석대상인 도형 수업은 대략 다음과 같은 흐름으로 전개되었다. 박교사는 [8-나] 단계의 두 번째 대단원인 도형의 성질 단원을 9월 하순에 시작하여 11월 초순이 지나면서 마무리한다. 이 단원은 삼각형의 성질과 사각형의 성질이라는 두 개의 중단원으로 제시되어 있다. 두 중단원을 이루고 있는 내용은 <그림 1>과 같이 구조화 될 수 있다.

특이하게도 첫 번째 중단원의 첫 번째 소단원으로 제시되는 [명제와 증명] 부분은 [삼각형의 성질]의 내용과는 독자적인 성격을 띠고 있으며, 물리적인 양에 비해 비중이 남다르며, 전체 단원과 맺는 관계 또한 여타의 단원과는 성격 자체가 다르다. 박교사는 이 소단원에 대한 수업을 먼저 증명에 필요한 주요 개념들 - 명제, 가정, 결론, 정의, 증명, 정리 - 을 설명한 후, 조별 활동 수업(카드 배열하기)을 통해 증명에 대한 감각을 익히는

과정으로 진행한다. 이후 이등변 삼각형의 성질을 시점으로 사각형의 성질을 마무리 할 때까지 모든 수업은 박교사의 '설명하기'와 학생들의 '나와서 발표하기'를 통해 진행된다.



<그림 1> 중학교 2학년 8-나, 도형의 성질

II. 연구 결과

1. 직접적인 교섭

박교사의 수업에서는 증명이나 학습과 관련한 박교사 본인의 신념이 반영된 직접적인 의사표현을 매개로 한 교섭이 자주 일어난다. <그림 2>는 '증명에 대한 교사의 생각'이라는 이름으로, 박교사의 직접적 의사표현을 목록화한 것이다. 우리는 몇 가지 사례를 통해 이 사실을 확인할 수 있는데, 첫 번째 사례는 증명을 함에 있어, 가정과 결론을 구분하는 것의 중요성을 포함하고 있다. 10월 6일 수업에서 박교사는 다음과 같이 구체적인 이유를 밝히고 있다.

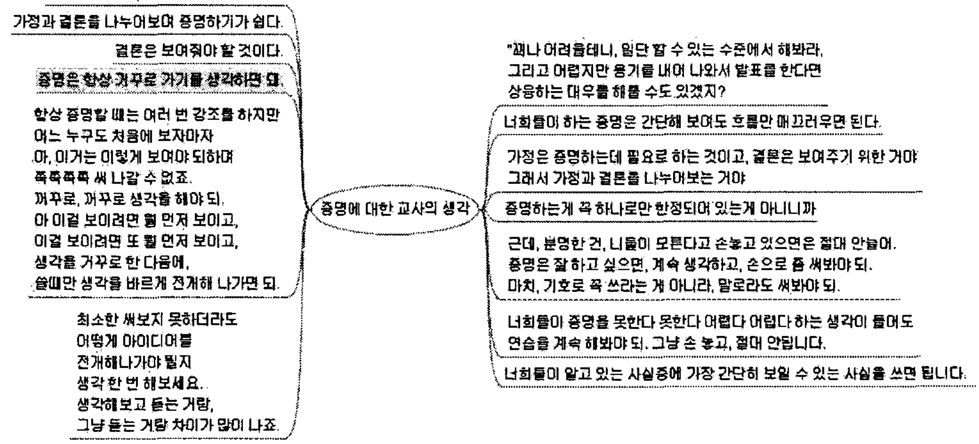
1 박교사 나눠서 해볼께. (가정, 결론이라고 칠판에 쓰면서)*왜 가정, 결론 굳이 나누느냐 하면 너희들이 증명을 할 때, 그냥 아무 순서 없이 그냥 증명을 하는 경우가 있어서 가정, 결론 나누면 가정은 증명하는 데 필요로 하는 거야. 증명할 때 쓸 수 있는 거. 결론은 따라서 이렇게 보여지는 거야. 결론의 답은 따라서 이렇게 되면 결론이 나온다. 이걸 보여주기 위해 가정과 결론을 나누는 겁니다.* 우선은 기호로 나타내기 전에 여기 명제 문장 상태에서 가정을 한 번 끊어 봐. 어디까지가 가정일까? 어디까지가 가정이야?

- 10월 6일, 박교사 설명 -

박교사는 복잡한 증명 과정에서 혼선을 빚지 않기 위해 "증명할 때 쓸 수 있는 것"인 가정, 그리고 "보여지는 것"인 결론을 명확하게 구분해야 한다는 말을 직접적으로 하고 있다. 이어서 기호화 이전에 문장으로 진술된 문장 수준에서 가정과 결론을 끊어볼 것을 요구하고 있다. 이런 이유 때문인지 박교사의 설명 장면에서 가장 자주 등장하는 대화가 가정과 결론의 구분에 관한 것이며, 이것이 고스란히 박교사의 증명 방식으로 자리 잡은 사실을 뒤에서 확인할 수 있다.

두 번째 사례는 '거꾸로 생각하기'이다. 다음은 마름모의 성질인 '두 대각선은 서로 수직'이라는 사실에 대한 증명을 박교사가 직접 설명하는 장면이며, 여기에서 '거꾸로 생각하기' 사례를 극명하게 볼 수 있다. 단순히 거꾸로 생각하라고 강조하는 것으로 그치지 않으며, 박교사의 논증 과정에도 고스란히 담겨있음을 확인할 수 있다.

1 박교사 앞으로 증명을 해 보겠습니다. 마름모에서 두 대각선은 서로
2 재원 수직 이등분한다.
3 박교사 수직으로 만난다. 마름모에서 두 대각선은 서로 수직이다. 이걸 증명 한 번 해볼게. 가정이 뭘까?
4 학생 몇 마름모
5 박교사 마름모이다. 결론?
6 학생들 수직이다. 수직 이등분한다.
7 박교사 어, 두 대각선이 서로 수직이다. 이등분은 굳이 안보여도 되요. 평행사변형의 성질 모두 다 만족하니까. 가정 써 보자. 지금, 마름모다. 주어져 있는 사각형이 마름모.
(생략)



<그림 2> 증명에 대한 교사의 생각

8 박교사 그렇지. 두 대각선이 서로 수직이라 그랬으니까, 대각선 AC와 BD가 서로 수직이다. 이렇게 쓰면 되겠지? *항상 증명할 때는 여러 번 강조를 하지만 어느 누구도 처음에 보자마자 '아, 이거는 이렇게 보여야 돼.'하며 쭉쭉쭉 써 나갈 수 없죠. 거꾸로, 거꾸로 생각을 해야 돼. 아 이걸 보이려면 뭘 먼저 보이고, 이걸 보이려면 또 뭘 먼저 보이고, 생각을 거꾸로 한 다음에, 쓸 때만 생각을 바르게 전개해 나가면 돼. 자, 여기도 생각을 거슬러 올라가 보자. AC랑 BD랑 수직임을 보일려 그래. 그러면, 지금 수직이라는 말을 하려면 합동이다 에서 나올 수 있겠, 있을까 없을까?*

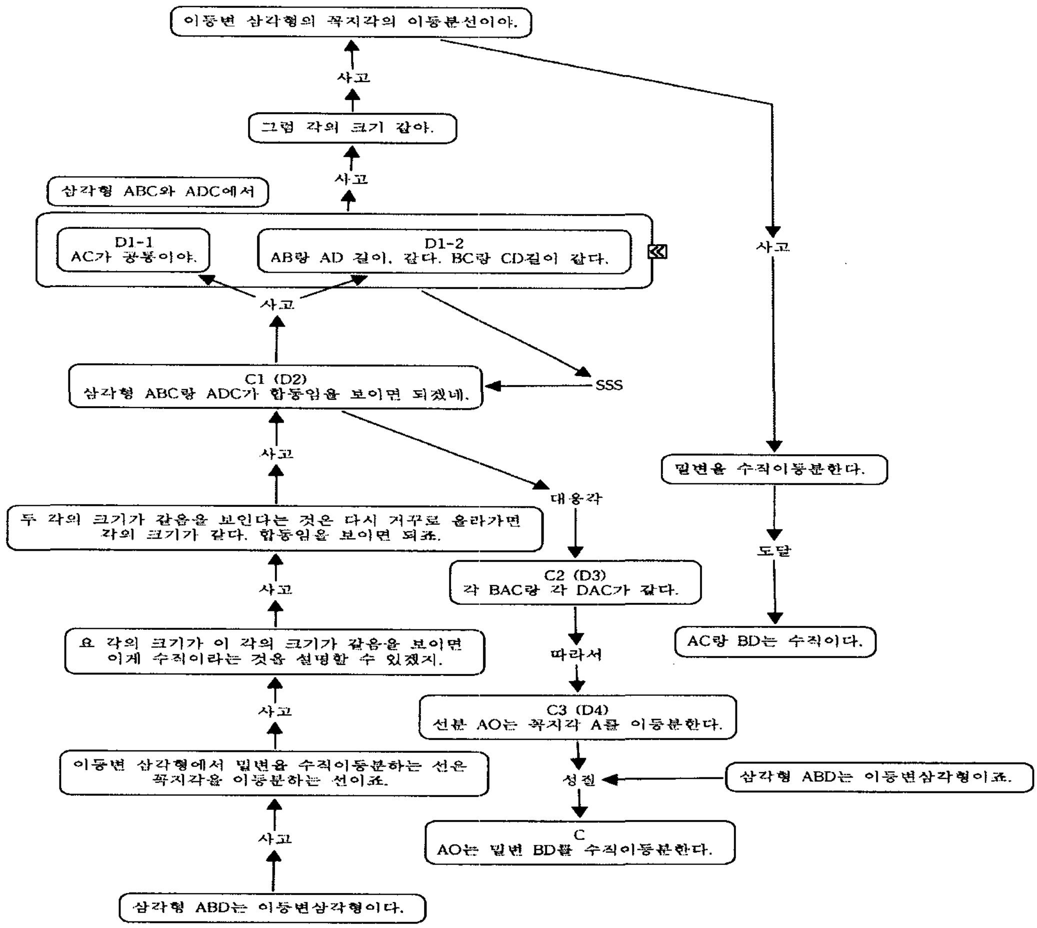
9 재원 있어요.

10 박교사 수직이다라는 말이?

11 재원 아니요.

12 박교사 *각의 크기 같다. 또는 변의 길이가 같다라는 건 합동으로 나오지. 하지만 수직이다. 각이 몇 도까지 나온다라는 것은 주어져 있지 않은 이상은 알 수가 없지. 그지?* 그러면 힌트를 줄께. 삼각형 ABD가 무슨 삼각형 (생략)

13 박교사 *두 각의 크기가 같음을 보인다는 것은 다시 거꾸로 올라가면 각의 크기가 같다. 합동임을 보이면 되죠.* 이 각과 이 각을 갖고 있는 삼각형 ABC랑 ADC가 합동임을 보이면 되겠네. AB랑 AD 길이, 같다. BC랑 CD길이?

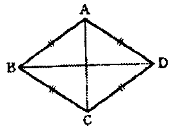


<그림 3> 박교사의 '거꾸로 사고하기'

(생략)
14 박교사 그렇지. 지금 합동 됐어요. 그럼 각의 크기 같아. 각의 크기 같다라는 건 이등변 삼각형의 꼭지각의 이등분선이야. 따라서 밑변을 수직이등분한다. *거슬러 거슬러 올라 가세요. 너희들의 생각에 거슬러 올라간 부분의 끝점은 합동을 보이는 것에서 시작인거야.* 그래서 삼각형 ABC와

- 11월 4일, 박교사 설명 -

이제 마름모의 두 대각선은 서로 수직임을 증명하여 보자.



[가정] □ABCD에서
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$
[결론] $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
[증명] △ABC와 △ADC에서
$\overline{AB}=\overline{AD}$ (가정) ……… ①
$\overline{BC}=\overline{DC}$ (가정) ……… ②
$\overline{AC}$는 공통 ……… ③
①, ②, ③에서
△ABC≡△ADC (SSS합동)
∴ ∠BAC=∠DAC
따라서, $\overline{AC}$는 이등변삼각형 ABD의 꼭지각 ∠A의 이등분선이 되어 밑변 BD를 수직이등분한다.
즉, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이다.

<그림 4> 교과서 [마름모의 성질]

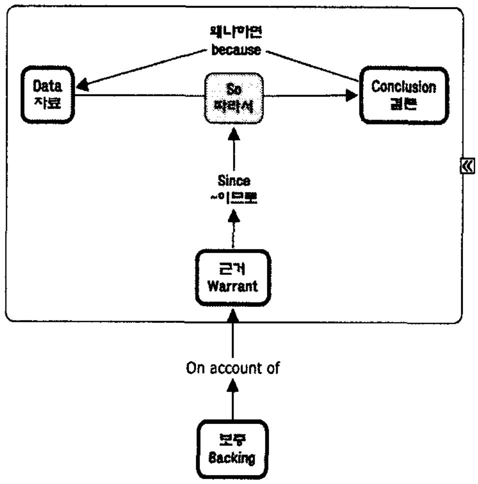
시작은 변함없이 가정과 결론의 구분(1행~7행)이다. 이어서 박교사는 "어느 누구도 처음에 보자마자" 증명을 바로 써 나갈 수 없기 때문에 거꾸로 생각을 해야 하며, "이걸 보이려면 뭘 먼저 보이고, 이걸 보이려면 또 뭘 먼저 보이고, 생각을 거꾸로 한 다음에, 쓸 때만 생각을 바르게 전개해 나가면 되"라고 말한 후(8행), 박교사는 거꾸로 생각해 나가는 절차(8행~14행)를 몸소 보여준다. 이어지는 대화는 박교사가 전체 증명과정을 '거꾸로 사고하기와 바로 써나가기(역추적)'를 통해 증명을 하는 과정이며, 이를 구조화해서 만든 박교사의 설명에 대한 논증모형을 <그림 3>에서 확인할 수 있다.

2. 부단한 반복에 의한 간접적 교섭

상호작용의 과정에서 화자들은 대화의 응집력을 위해 '반복'이라는 언어적 장치를 사용한다. 반복은 화자에게는 시간적 여유와 의미의 일관성을, 청자에게는 잉여성을 제공하여 원활한 의사소통에 기여(한국사회언어학회, 2002)한다. 참여관찰과 분석의 과정에서 파악된 박교사 수업의 주된 특징 중 하나는 발화의 부단한 '반복'이다. 박교사의 설명에서, 학생들과의 대화에서, 학생들의 발표 후 재현하는 과정에서, 그 모든 수업의 상황에서 박교사는 부단한 반복에 의해 학생들과의 의사소통을 진행한다. 우리는 이 반복이라는 기제를 발판삼아 전개되는 교섭의 전체 흐름을 논증 구조, 교사의 재현, 교사의 증명 전개방식이라는 세 가지 측면에서 살펴보았고, 그 속에서 차이를 극복해가는 과정을 읽어내었다.

2.1. 논증 구조

우리는 2개월간 진행된 수업을 '학생의 발표'(발표하기 상황)와 '교사의 설명'(함께하기 상황)이라는 두 범주로 분류하고, 각 범주에 포함된 에피소드 각각의 대화의 흐름을 분석하여 논증 구조를 작성하였으며, 이는 <그림 5>에서 볼 수 있듯이, Toulmin의 논증 모형(Toulmin, 2003)을 확장한 것이다. 수사학에 기반을 둔, 실질적 논증에 대한 이상적인 모형화의 결과인 Toulmin 모형은 현재 수학교육 연구에 종사하는 많은 연구자들이 교수실험 기반의 다양한 연구(Cobb, 2002; Forman, Larreamendy-Joerns, Stein & Browns, 1998; Krummheuer, 1995; Stephan & Rasmussen, 2002; Yackel, 2002; Whitenack & Knipping, 2002)에서 학생들의 수학적 논증 및 추론능력을 분석하는 도구로 광범위하게 사용되고 있다.



<그림 5> Toulmin의 모형

논증을 함에 있어, 화자(話者)는 자신의 주장을 말하고, 제기되는 도전에 대하여 그 주장을 지원할 증거(Evidence) 또는 자료(Data)를 제시하게 된다. 자료는 전형적으로 결론에 도달하게 될 사실(fact)들로 이루어지게 된다. 하지만, 청자(聽者)는 화자가 제시한 자료가, 화자의 주장에서 말하는 결론과 어떤 관계가 있는지 이해하지 못할 수도 있다. 그리하여 청자는 화자에게 명확한 설명을 요구하게 될 것이고, 화자는 자료를 뒷받침해 줄 근거(Warrant)를 제시한다. 혹은, 청자는 화자가 제시한 자료가 결론과 어떤 관계가 있는지 이해는 하지만, 그 과정에서 사용된 근거의 내용에 동의하지 못하는 경우가 있다. 이런 경우, 화자는 근거가 타당한 이유, 결국 자신의 주장의 타당성을 뒷받침 해줄 보증(Backing)을 제시해야 한다. 예를 들어, 우리는 다음과 같은 대화 상황을 또 다른 수업 관찰을 통해 목격한 적이 있다. 주어진 명제 '$a<b$ 이면 $a+c<b+c$ 이다'가 참인 이유를 말하는 상황이다.

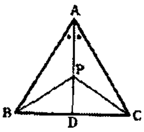
1 대호 부등호가 바뀌는 경우는 부등식의 양변에 음수를 곱하는 경우밖에 없어요.
2 교사 아, 그러니까, 그렇긴 한데, 지금은, 곱하고 나누는 건 아니고, 자, 여기서 이리로 가는 요거일 때, 저거 되는 것이 양변을 어떻게 했어?

대호는 주어진 명제가 참이라는 것에 대한 자료(Data)를 제시했지만, 그리고 대호 입장에서는 충분하다고 생각했지만, 교사는 다른 학생들이 이해할 수 있도록 자료의 타당성을 입증할 근거를 요구하고 있다.

요약하면, 자료(Data, 이하 D)는 결론(Conclusion, 이하 C)이 토대로 삼을 수 있는 사실적 시작의 역할을 하며, 근거(Warrant, 이하 W)는 D의 사실성, 혹은 C가 D에 근거하는 방식에 대한 합법성을 제공하며, 보증(Backing, 이하 B)은 W가 권위를 가질 수 있는 이유(Krummheuer, 1995; Yackel, 2002)를 제시해주는 역할을 맡는다. 우리는 이런 D, W, B의 고유의 역할을 박교사의 설명과 학생들의 발표 상황에 적용하여 논증 구조를 만들고, 이에 대한 종·횡단 비교를 통해 양자의 틀의 차이를 확인하는 동시에 구조의 진화라는 측면에서 간극의 변화 양상을 추적하였다.

분석 결과, 학생들의 논증과는 달리 박교사의 설명에서 도출된 논증 구조는 간결하고 정형화되어 있음을 발견할 수 있다. 달리 말하면 논증의 최소 형식이라 할 수 있는 "D, because W so C"의 구조가 명확히 드러나는 것을 볼 수 있다. 한편, 박교사의 논증은 한 차례로 완료되지 않으며, 본인의 증명 전개방식에서 드러나듯이 두세 차례 반복된다. 더불어 논증 구조가 그 자체로 교섭의 대상이 된다는 것도 박교사의 설명에 반영되어 있다. 이런 특징들이 반영된 대표적인 사례가 다음 에피소드이다.

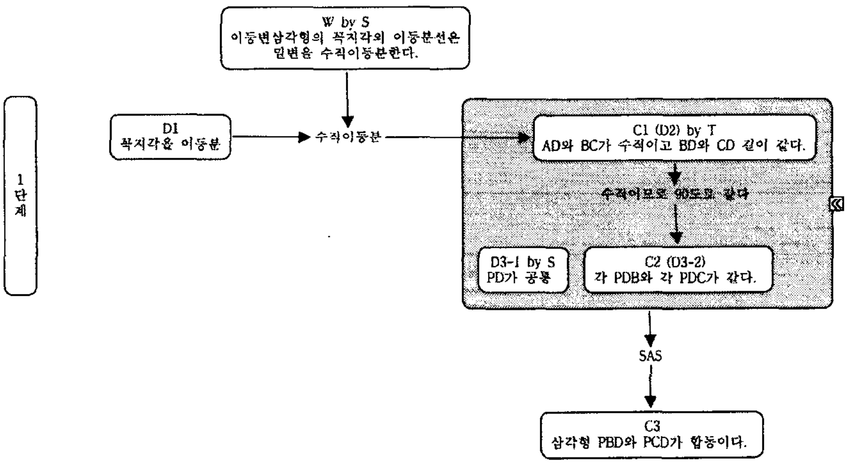
6 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 꼭지각 ∠A의 이등분선과 밑변 BC의 교점을 D라 한다.
이 때, 선분 AD 위에 한 점 P를 잡으면
$\triangle PBD \equiv \triangle PCD$
임을 증명하여라.

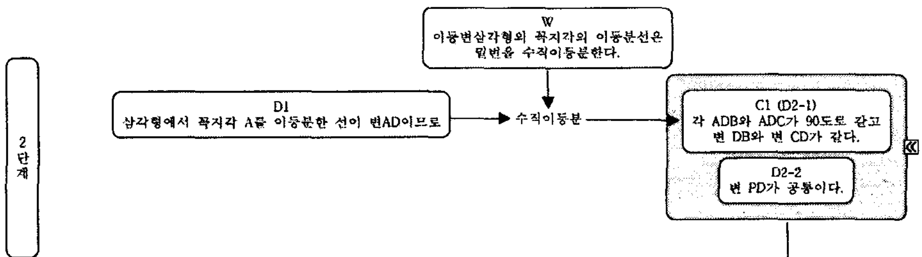


<그림 6> 교과서 [문제 6]

1 박교사 (생략)(문제 6번을 읽는다) AB와 AC가 같은 이등변삼각형에서 꼭지각(강조)을 이등분선, 이등분했대. 그때 PBD와 PCD가 합동임을 보이래. 꼭지각을(크게) 이등분했어. 그럼 알 수 있는 사실?
2 효신 *밑변을…*
3 박교사 *밑변을?*
4 여학생 (작아서 잘 안 들린다) *수직이등분 한다.*
5 박교사 *수직이등분 한다.* 즉, AD와 BC가 수직이고 BD와 CD 길이 같다. 맞아요? 이것만 있으면 돼. (칠판 위의 삼각형 위에 표시하면서) PBD와 PCD가 합동임을 보이라고 했는데 지금. BD와 CD같고, PDB와 PDC가 같고, 몇도, 90도. 꼭지각을 이등분했기 때문에 성질이 바로 두 가지 조건이 나왔어. 또 하나, 뭐 있니?
6 학생들 *PD~*
7 박교사 *PD가* 공통이야. 그러면 두 삼각형 모두 두 쌍의 대응하는 변의 길이와 끼인 각의 크기가 같네. 그럼 ?
8 학생들 *SAS합동*
9 박교사 그렇지, *SAS합동*. 간단하지? 이걸 정리하는 게 문제가 되는 거죠?
10 박교사 나눠서 해볼게. (중략) 우선은 기호로 나타내기 전에 여기 명제 문장 상태에서 가정을 한 번 끊어 봐. 어디까지가 가정일까? 어디까지가 가정이야?
11 규봉 등 AB하고 AC부터, 어, 점, 교점을? D까지
12 박교사 D라 한다. 여까지가 가정. 결론은? 결론은

눈에 확 띄니까..
(중략)
13 효신 *삼각형이 합동*이라고…
14 박교사 어, *삼각형이 합동*이라 이거지? 결국 삼각형 PBD와 PCD가
15 학생 똑같아요.
16 박교사 (결론 부분에 쓴다)어, 합동임을 보이는 것이 문젭니다. 결론은 이거야. 그러면 아까 너희들이 잡은 문장을 기호로 바꿔치기 할게. 우선 쉬 눈에 띄는 게 있네. 뭐가 보여?
17 학생 확인하기가 보여요
18 학생들 점점(규봉이가 계속 반복한다)
19 박교사 (칠판에 기호로 쓰면서)선분 AB와 AC가 같다. 말을 바꿔치기하면 돼. 이등변삼각형에서 꼭지각의 이등분선, 꼭지각의 이등분선. 어떻게 표현할 수 있을까? (기다린다) 말로 분명히, 꼭지각의 이등분선 AD가 꼭지각 A를 이등분한다고 써도 되지만, 기호로 바꿀 수 있어.
20 지애 *이분의 일 A는.*
21 박교사 *이분의 일 A는.* 각 BAD, 해도 되고, (칠판에 쓰면서)아니면 각 BAD는 각 CAD와 같다. 됐어요? 됐어? 여기까지가 가정 끝났습니다. 인제, 증명 들어갈게요. (증명에 쓰기 시작한다) 삼각형 PBD와, 잘못했네. 다시. AB와 AC가 같은(분필을 떨어뜨려, 잠시 멈춤) 삼각형에서 꼭지각 A를 이등분한 선이 변AD이므로, 뭘 알 수가 있냐면, 꼭지각 이등변삼각형에서 꼭지각을 이등분, 이등분했다. 그럼 어떤 사실을 알 수가 있다? 이등변삼각형의 성질, 세 번째, 수직이등분한다, 수직이란 얘기는 각 ADB와 각ADC가 몇 도?





<그림 7> 박교사 설명

90도란 거. 또, 변 DB와 변 CD가 같다는 걸 알 수 있다. 맞아요? 그리고 이제 합동임을 보여줄게. 삼각형 PBD와 삼각형 PCD에서, 지금 것 적지 마세요. 적지 말고서 설명 먼저 들어. PBD와 PCD에서 BD와 CD가 같다는 것 나왔고 어디에서? 아까 전에 이등변삼각형의 성질에 의해서. 그 다음에, 각 PBD와 각 PBC가 같다라는 것도 나왔고. 몇 도? 90도로. 이건 어떻게 나온거? 이것도 마찬가지로 이등변삼각형의 성질에 의해서 꼭지각을 이등분한 선은 밑변을 수직이등분한다. 꼭지각의 이등분선에서 바로 나왔어. 그 다음에 변 PD가 공통이다. 따라서 두 쌍의 대응하는 변의 길이와 끼인 각의 크기가 같다. 삼각형 PBD와 삼각형 PCD는 합동이다. 무슨 합동? S?

22 학생 AS

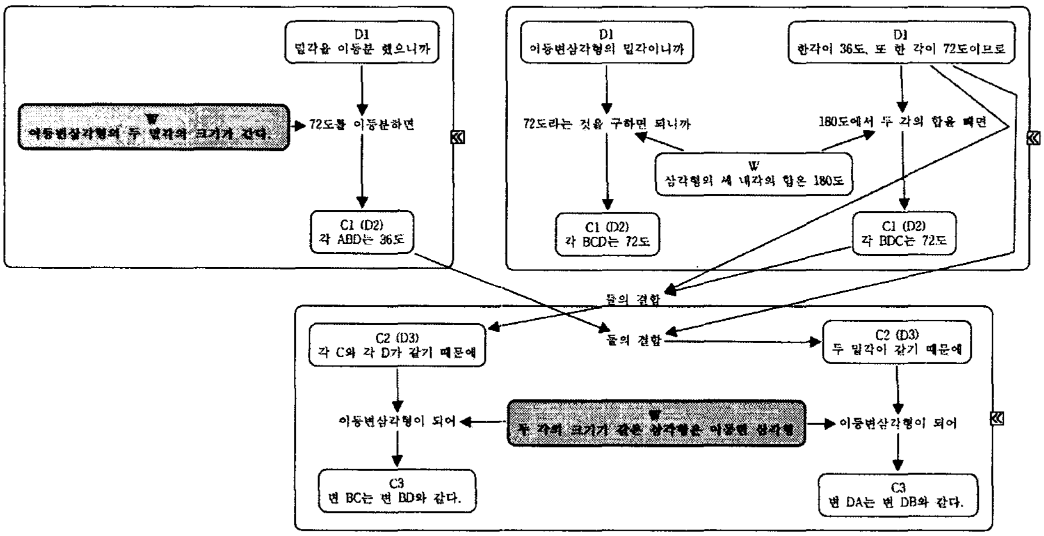
23 박교사 SAS합동. 됐어?

- 10월 6일, 박교사 설명 -

전술한 바, 박교사의 설명은 중첩된 구조를 지닌다. 첫 번째는 박교사가 문제를 읽은 후부터 아이디어 중심으로 증명 과정 전체를 설명하는 과정이며, 두 번째는 가정과 결론을 확인한 후부터 증명을 실행해가는 과정이다. 첫 번째는 D1 → C1(D2) → {D3-1 ∪ C2(D3-2)} → C3의 구조를 갖는다. 첫 번째 과정에서, 박교사는 문제를 압축해서 읽은 후 D1을 제시하고, C1에 이르기 위한 W를 요구(1행)한다. 효신이가 말끝을 흐리며 "밑변을…"(2행)이라고 하자, 박교사는 반복(3행)하며 다음 대답을 기다린다. 이때 다른 여학생에 의해 W(4행)가 갖춰지며, 반복 재생과 동시에 박교사는 C1을 진술(5행)한다. C1(D2)에서 유도되는 두 가지 조건을 언급한 후, 박교사는 "두 가지 조건이 나왔어. 또 하나, 뭐 있니?"(5행)라고 말하며 학생들로 하여금 D3-1을 요구한다.

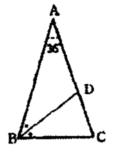
박교사의 위 표현에서 합동 증명이 갖춰야할 논증구조 자체도 교섭의 대상이 됨을 알 수 있다. 이어서 학생들이 D3-1을 제시하고, 박교사는 반복과 동시에 D3-1과 D3-2를 종합하여 합동조건을 진술하며 학생들로부터 확인(7행)하도록 한다. 두 번째 논증(21행)은 D1에서 출발하여 {C1(D2-1) ∪ D2-2}를 거쳐 C2에 이르는 구조를 갖는다. D1에서 C1에 이르는 과정에서 박교사는 어김없이 W를 등장시키며, D2-1을 D2-2와 결합시켜 C2에 도달한다. 지금까지의 두 차례 반복된 논증을 <그림 7>과 같은 모형으로 나타낼 수 있다.

한편, 학생들의 수준이 진화의 시기에 영향을 미치긴 했지만, 시간의 흐름에 따라 학생들의 논증도 점진적으로 최소 형식을 갖추어 가고 있으며, 구조 또한 박교사의 그것과 닮아 감을 확인할 수 있다. 이것은 다음 에피소드에서 확인 가능하다.



<그림 8> 재원 발표

문제 4 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle B$의 이등분선과 변 AC의 교점을 D라 한다. $\angle A=36°$일 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) $\angle ABD$, $\angle BCD$, $\angle BDC$의 크기를 구하여라.
(2) $\overline{BC}=\overline{BD}$, $\overline{DA}=\overline{DB}$인 이유를 말하여라.



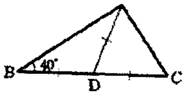
<그림 9> 교과서 [문제 4]

1 재원 어 AB가 같고 AC가 같은 이등변삼각형이면 각 A를 꼭지각으로 두고, 두면 이 *두 밑각이 같기 때문에,* 두 밑각이 같게 되는데, 이걸 이등분한 선이니까 이 한 각은 36도가 됩니다. 그러면 구하면 ABD는 36도니까 이렇게 써주고, BCD는 아까 그 이등변삼각형에서 72도라는 것을 구하면 되니까 72도가 나오고, BDC는 나머지 한 각도 36도면 이것 두 개 더해서 180도에서 빼면 72도가 나오니까 이게 나옵니다. 그래서 (2)번에서 BC와 BD가 같은, 왜 같은지 이유를 대면, 각 C하고 각 D가 같기 때문에 *이등변삼각형이라서 같게 되고,* 각 아니 변 DA하고 변 DB는 아까 그 36도하고 이것 두 밑각이 또 같기 때문에 이 두 변도(표시하며) 같게 됩니다.
- 10월 4일, 재원 발표 -

위 에피소드에서 재원이가 하위 문항 두 개를 해결하는 과정을 통합한 논증 구조는 <그림 8>과 같다. 이등변삼각형의 성질은 논증의 과정에서 명시적인 표현의 W로, 삼각형의 세 내각의 합은 암묵적인 W로 나타나는데, 여기에서 논증의 최소 형식을 갖추려는 노력을 엿볼 수 있다.

최소 형식을 갖추려는 학생의 노력은 10월 24일 수업 중, 은행이의 발표 장면에서도 목격할 수 있다.

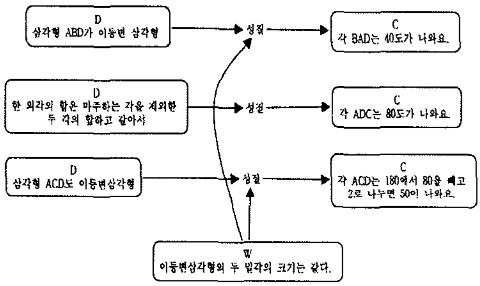
오른쪽 그림에서 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$이고, $\angle B=40°$일 때, 다음 각의 크기를 구하여라.
(1) $\angle BAD$ (2) $\angle ADC$
(3) $\angle DAC$



<그림 10> 교과서 [연습 2]

1 은행 (책을 한번 본 후) 각 BAD는 이 삼각형 ABD가 이등변 삼각형인데, *이등변삼각형은 밑각의 크기가 같으니까,* ABC하고 같은 40도가 나와요. (2)번은 각 ADC는 여기가 40도니까, *이등변삼각형이라서* 양쪽각이 80도인데, 180도에서 80도를 빼면 이 각이 100도가 나오고, 어, 한 외각의 합은 마주하는 각을 제외한 두 각의 합하고 같아서, 40도 더하기 40도, 80도가 나와요. 어, 각 DAC는 이 각이 80도가 나오는데, 삼각형 ACD도 *이등변삼각형이라 밑각의 크기가 같으니까,* 180에서 80을 빼고 2로 나누면 50이 나와요.
- 10월 24일, 은행 발표 -

이 에피소드는 은행이가 세 개의 하위 문항을 해결하는 과정이며, 각각 D → C로 이어지는 논증구조(<그림 11>)를 갖는다. 은행이는 '이등변삼각형의 성질'을 W로 제시함으로써 스스로 논증의 최소형식을 구성한다.



<그림 11> 은행 발표

다음 에피소드는 11월 7일 수업 중 재원이의 발표 장면이다. 재원이는 등변사다리꼴의 성질인 '두 대각선의 길이가 같음'을 증명한다.

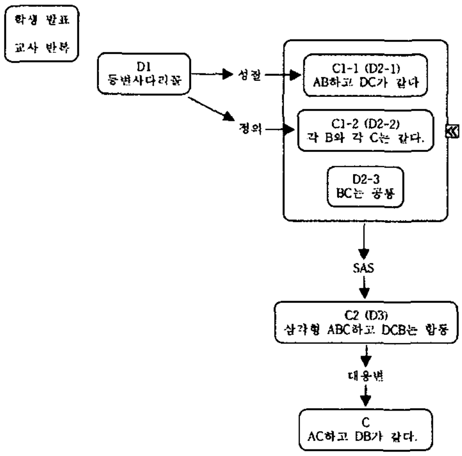
문제 6 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\angle B=\angle C$이면 $\overline{AC}=\overline{BD}$임을 증명하여라.

<그림 12> 교과서 [문제 6]

1 재원 (한번 돌아보고) B하고 C하고 같다는 거고. 결론은, 대각선 AC하고, BD하고 같다는 걸 증명하는 겁니다. *그래서 증명하면, 여기다 보조선을 그어주면, AB하고 DC가 같다는 거 증명했던 거지. 등변사다리꼴이니까, 같고, B하고 C는 여기 가정에 나왔으니까 같고, BC는 공통이므로, ABC하고 DCB는 SAS합동이 되니까,* AC하고 DB가 같습니다.
- 11월 7일, 재원 발표 -

재원이는 먼저 가정과 결론을 구분하고, 이어서 발표

를 시작한다. D1로부터 C1-1(D2-1)과 C1-2(D2-2)를 얻은 다음, D2-3과 두 사실을 결합하여 합동조건을 형성함으로써 C2에 이를 수 있음을 말한다. C2에서 C는 매끄럽게 이어진다. 구조는 <그림 13>과 같다.



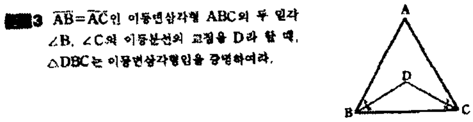
<그림 13> 재원 발표

전술된 세 가지 에피소드를 살펴보면, 시간의 흐름에 따라 학생들의 논증도 점차 최소 형식을 갖추어가고, 박교사가 학생의 발표에 대한 재설명을 할 때 발생하는 논증 구조와 거의 차이가 없어 보일 정도로 진화해가고 있음을 알 수 있다.

2.2. 재현하기(revoicing)

수업 속에서 교사에 의한 재현은 평서문 혹은 의문문의 형태로 다양한 얼굴을 갖는데, 한 학생 혹은 집단의 표현에 대한 반복(repetition), 확장(expansion), 고쳐 말하기(rephrasing), 정제(refinement) 등을 통해 교실의 중심 화제로 등장하게 된다. 또 재현은 소통의 내용을 명확하게 하거나 확장하기, 추론에 대한 부가적인 설명, 특정한 아이디어의 도입, 논의의 방향 재정립 등의 목적(Forman et al, 1998)을 지닌다. 다시 말해 교사는 학생들을 학습의 장으로 초대하여, 상호교섭의 공간을 창출하고, 그 속에서 재현을 매개로 학생들과의 활동을 조율하는 역할을 담당하게 된다. 박교사가 학생들과 함께 창출한 대화의 공간에서도 부단한 재현의 과정을 목격할 수 있다. 우리는 박교사의 수업에서 발생한 상호교섭의 과정에서 재현의 각 단면들이 대화의 흐름 속에서 어떤 목적으로 어떤 역할을 수행하는지 살펴보았다. 우리가 목격한 수업 상황 자체가, 박교사가 일 년 내내 조성해 온 발표환경(나미영, 2006) 하에서 전개된 것이므로, 학생들이 나와서 자신이 할당받은 문제를 풀고 설명하는 것은 지극히 자연스럽다. 박교사의 재현은 바로 이런 '나와서 발표하기'의 상황에서 극명하게 빛을 발하며, 여타의 대화 상황에서도 변함없는 역할을 담당하는 것을 볼 수 있다.

단순 반복(repetition)의 의미를 갖는 재현은 박교사가 '설명하기' 상황에서 학생들과 주고받는 대화 속에서 주로 원만한 대화의 흐름을 위해 사용하는 화법이며, 아래의 에피소드에 잘 나타나 있다. 재현의 목적으로 보자면, 단순 반복은 소통의 내용을 한 단계씩 짚어가며 확인함으로써, 학생들이 논의의 흐름을 놓치지 않도록 하기 위함이다.



<그림 14> 교과서 [문제 3]

1	박교사	(생략) 변 AB와 변 AC가 같은 이등변삼각형 ABC의 두 밑각 각 B와 각 C의 이등분선의 교점을 D라고 할 때, 삼각형 DBC가 이등변삼각형임을 증명하시오. 가정 삼각형 ABC에서
2	재원	*AB와 AC가 같다.*
3	박교사	변 *AB와 변 AC가 같다.* 그 다음에 각 DBC는
4	재원	*각 B의 2분의 1*
5	박교사	*각 B를 이등분한 거니까.* 각 B의 1/2배, 1/2 각 B, 각 DCB는?
6	재원	*각 C의 1/2*
7	박교사	*각 C의 1/2배,* 1/2 각 C. 결론.
8	재원	*삼각형 DBC는 이등변삼각형이다.*
9	박교사	*삼각형 DBC는 이등변삼각형이다.* 증명. 들어갑니다. 지금 결과적으로 이등변삼각형을 보이려면, 각 DBC랑 DCB가 같음을 보이면 됩니다. 변 AB와 AC가 같으므로
10	재원	*각 B와 각 C가 같다.*
11	박교사	*각 B와 각 C가 같다.* 어디서 나온 거지? 이

등변 삼각형은? 양 밑각의 크기가 같다. 여기서 나온 거지? 각 DBC는?

12 학생들 1/2 각 B

13 박교사 1/2 각 B. 아까 가정에 썼던 것을 그냥 갖고 오면 되는 거네. 각 DCB는?

14 재원 1/2 각 C

15 박교사 2분의 1 각 C, 따라서, 뭘 알 수 있어?

16 재원 각 DBC하고,

17 박교사 각 DBC와 각 DCB가 같다. 왜, 각 B와 각 C가 같으니까, 각 B의 2분의 1배 한 거랑, 각 C의 1/2배 한 거랑 똑같은 거죠. 그래서 각 DBC, DCB가 같다. 양 밑각의 크기가 같으므로, 따라서 삼각형 DBC는 이등변삼각형이다. 이렇게 보이면 되는 거지.

- 10월 24일, 박교사 설명 -

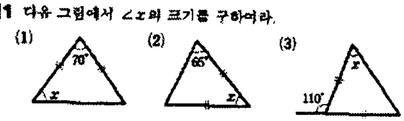
위 대화에서 확인할 수 있는 것처럼, 박교사는 학생들과 대화함에 있어 철저하게 학생들의 표현을 있는 그대로 반복하며 대화를 이끌어 나간다.

교사의 재현이 소통의 내용을 명확하게 할 목적으로 등장할 경우는 대부분 학생의 발표에 대한 교사의 해석이 수반된 형태로 나타난다. 박교사의 수업에서 대표적인 사례 중 하나는 '나와서 발표하기' 상황에서 학생의 발표 내용에 암묵적으로 내재된 것을 명시적으로 표현해 줄 필요가 있을 때이며, 이는 논증 구조와도 밀접하게 관련된다.

1 박교사 질문? 요섭아 거기서 밑각이 뭐야? 밑각 표시 한 번 해볼래? (요섭이가 손으로 짚는다) 그거야? 응. 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180도니까, 요섭이가 푼 방법처럼 풀면 되겠죠. (10월 4일 수업)

- 10월 4일, 요섭 발표 후 -

문제 1 다음 그림에서 ∠x의 크기를 구하여라.

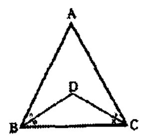


<그림 15> 교과서 [문제 1]

위의 대화와 같이 이등변삼각형의 성질을 이용하여 삼각형의 한 내각의 크기를 구하는 문제에서, 박교사는 요섭이의 발표 직후 요섭이로 하여금 특정한 행동 혹은 답변을 하도록 요구한다. 이어지는 박교사의 재현은 요섭이의 반응을 염두에 두고, 요섭이의 발표 과정에 암묵적으로 내재된 논증의 근거를 명시적으로 표현해줌으로써, 발표가 타당함을 확인시켜주는 역할을 한다.

한편, '나와서 발표하기' 상황 중 학생들이 발표한 것이 '증명 문제'일 경우, 박교사는 예외를 허용치 않고 발표 내용을 처음부터 끝까지 재음미하는 과정을 거치는데, 문제가 있을 경우 수정에 대한 합의를 이끌어내고, 그렇지 않을 경우라도 틀의 차이 극복을 위한 지속적인 교섭을 수행한다. 먼저 다음 에피소드는 문제의 소지가 있는 경우에 대한 합의의 과정이다.

문제 3 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 두 밑각 ∠B, ∠C의 이등분선의 교점을 D라 할 때, △DBC는 이등변삼각형임을 증명하여라.



<그림 16> 교과서 [문제 3]

1 은행 선분 AB하고 AC가 (분필로 같다는 표시를 하며)서로 같으니까, 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되는데, 여기서 선분 BD하고 CD는 각을 이등분한 거기 때문에, 서로 각 DBC하고, 각 DCB는 서로 같게 되니까, 두 밑각의 크기가 같으니까 두 변의 크기도 같게 돼서 삼각형 DBC는 이등변삼각형이 됩니다.

2 박교사 질문? ↑

3 규봉 각 B하고 각 C가 같다는 것을 뺐어요!

4 박교사 응?

5 규봉 각 B하고 각 C가 같다는 것을…

6 박교사 각 B와 각 C가 같다는 것을 뺐대요! 필요해요? (아이들 신음소리, 하품) 어우! (칠판에다가 각 B와 각 C가 같다는 것을 기록한다.) 각 B하고 각 C가 왜 같아요?

7 학생들 이등변삼각형

8 박교사 이등변삼각형이면

9 은행 여기가 위에가 꼭지각이고 밑에가 밑각이 되니까, 서로 같아요.

10 박교사 밑각이 되어 같다! 또 질문? 저렇게 하면 흐름이 매끄러워요?

11 규봉 너무 간단한 것 같은데요

12 박교사 너무 간단한 것 같아? 간단해도 흐름만 매끄러우면 돼! 여기 이 상태에서 문제없어요? 은행아 각 DBC하고 각 DCB가 어떻게 같애?

13 은행　서로 이등분, 이게 각이 이 두 개가 같고, 이 두 개가, 처음에 각 B하고 C하고 같은데 그것을 나눈 게 두 개, 각을 이등분해서 서로 같으니까,

14 박교사　지금 은행이가 말한 게 무슨 말인지 됐어? 안 됐어? *자 아까 전에 각 B와 C가 같은 게 없었으면 이건 큰 문제가 되는데, 지금 이것을 적어주면, 무슨 말이냐면, 지금 은행이가 뭐라고 했냐면, 각 B와 C가 같다는 게 나왔어. 왜? 이등변삼각형은 양 밑각의 크기가 같으니까.* 그 다음에 여기서 이것이(각 DBC가 각 DCB와 같다는 것) 나오게 된 과정이 지금 말로 설명을 해줬는데, 각 B와 각 C가 같았어. 같은 각을 반으로 쪼갠 각들은 서로 어떻겠어?

15 학생들　똑같다.

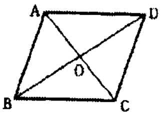
16 박교사　똑같겠지! 그래서 각 DBC와 DCB가 같데!
(중략)

17 박교사　어 두 내각, 즉 두 밑각의 크기가 같으면 이등변삼각형이라고 했으니까, 밑각의 크기가 같다. 따라서 이등변삼각형이다. 이렇게 보여준 거죠. 이미 증명된 성질을 그대로 가져가서 보여준 겁니다.

- 10월 4일, 은행 발표 -

박교사는 "질문?"이라는 표현에 억양을 조절함으로써 의사를 담아 전달한다. "질문?↑"과 같이 끝이 올라가면서 끝나는 경우는 '앞에서 다룬 내용에 조금 문제의 소지가 있으니, 질문을 하거나 지적을 하라'는 의미를 담고 있으며, "질문?↓"과 같이 끝이 내려가면서 끝나는 경우는 '별 문제 없지? 모두 동의하니?' 하는 의미를 담는다. 이 에피소드의 경우 전자의 의미를 전달한 즉시, 규봉이가 박교사가 원했던 답을 말하고, 박교사는 규봉이의 표현을 반복하여 말함으로써 화제로 채택한다. 이렇게 채택된 화제에 대하여 학생들로부터 검증을 거친 후, 발표자의 수용 과정이 이어진다. 이어서 박교사가 은행이의 논증(1행)을 재현(14행~17행)해가는 과정에서 고유의 목적이 수행되는 것을 목격할 수 있다. 한편, 틀의 차이 극복을 위한 지속적인 노력이라는 의미를 갖는 박교사의 재현은 다음 에피소드에서 볼 수 있다.

문제 2 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 할 때,
$\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$
임을 증명하여라.



<그림 17> 교과서 [문제 2]

1 재원　여기에서, 평행사변형이란 게, 가정이니깐, 어 AD하고 BC하고 평행하고, AB하고 DC하고 평행하고, 아까 증명한 거에서 두 쌍의 대변이 같다는 거, 그걸 이렇게 가정하면 되고, 결론을 OA, 그거 여기 나온 거, 다 써서, 두면은(손으로 써 놓은 것을 짚으며) 증명은

2 박교사　재원아, 정원이가 짚어달래.

3 재원　어딜 짚어?

4 정원　어딘지 짚어 달라고.

5 재원　(손으로 그림을 짚어가며)OA하고, (다시 분필을 집어들도)이거 하고 이거하고 같고, 이거하고, 이거하고 같다는 걸 증명하는 겁니다. (손으로 삼각형 짚으며) 그래서 이거하고 이게 합동인 걸 증명하고, 이거하고, 이거하고 합동인 걸 증명하면 되는데, 그냥 이거 두개 합동인 걸 증명하면은

6 남학생　그냥? 그냥?

7 재원　그 다음에 아까 가정에 나온 것처럼 AD하고 BC가 이렇게(칠판에 같다는 표시 하며) 같다는 것을 세 개로, 이렇게…, (학생들 재원이의 부호 표시에 대해서 왈가왈부) 그 다음에, DAO하고 BCO가 엇각으로 같고, 또,

8 효신　어디야, 그게?

9 재원　어? (그림에다 표시해준다) 이거하고, 이거하고, 같고, 이거하고, 이거하고 같아. 그래서 ASA 합동으로 이게 합동이 되면,

10 규봉　뭐랑, 뭐랑?

11 재원　(그림에서 두 삼각형을 짚으며) 이거하고 이거. 그러면 이거, 이거하고, 이거하고 같아지고, 이거하고 이거 같아집니다.

12 여학생　글쿤.

13 박교사　*질문↓ (재원이 자리로 돌아가고) 삼각형 AOD랑 삼각형 COB가 합동임을 보일려고 했는데요, 근데 AD랑 BC가 같대,* 왜? (좀 기다려주면서 말의 속도 늦춰서) 평행사변형의

14 범우　*대각선*

15 박교사 (놀란 표정 지으며) *대각선*? (칠판 가리키며)AD와 BC가 대각선인가?

16 지애 *두 쌍의 대변.*

17 박교사 어, *두 쌍의 대변*의 길이가 같으니까, (손으로 찍으며 반복) 대변의 길이가 같으니까, AD와 BC 같겠죠? 그 다음에, 각 (표시하며) DAO와 각 B, BCO가 같대. 엇각으로. 자 이렇게 쓰면 될까? *치명적인 오류가 있는 것 같은데.*

18 재원 아,

19 박교사 뭐?

20 태신 뭔지 알았어요.

21 학생 평행…

22 박교사 이 사이에다가 뭘 첨가시키면 될까?

23 여학생 평행한 거요. (정원도 같은 말 함)

24 박교사 그렇지, 평행하다라는 말이 없으면 얘가 반드시 같다고 할 수 없죠. 그니까, 뭘 써줘야 돼? 뭐가 들어간다?

25 재원 *AD와 BC요*

26 박교사 *AD와, 그렇지, AD와 BC가 평행하므로, 평행하니까 엇각의 크기 같아지는 거야. (각을 직접 짚으며)DAO와 BCO가 같고, 다음에, 평행하므로 엇각의 크기가 같다. ADO와 CBO가 같아요. 고로, 한 쌍의 대응하는 변의 길이와 양 끝각의 크기가 같으므로 두 삼각형? (잠시 기다렸다가) 합동이다. 합동이면, 대응하는 변의 길이 같다. (손으로 짚으며)OA와 대응하는 변, OC. OD와 대응하는 변,*

27 학생들 OB

28 박교사 같다고 할 수 있겠죠. 혹시 삼각형 이렇게 안 놔두고, OAB랑 OCD랑 합동인거 보인 사람 있어? (학생들 반응 없자) 또 하나의 방법을 설명해 줄께. 꼭 삼각형이 이렇게만 나눠지는 게 아니라, AOB랑 COD랑 이렇게도 삼각형이 있죠? 얘네 둘이 합동임을 보여도 상관없어. 이렇게 대변이라면, AB랑 DC도 대변이죠. 대변의 길이 같고, 각 BAO랑 각 DCO의 크기? 같다. 왜? AB랑 CD랑 평행하니까, 엇각의 크기로 같죠. 또 평행하니까 엇각의 크기로 같은 거? ABO와 CDO. 똑같이 됐어? 똑같죠. 똑같은 합동조건이죠. 한 변의 길이와 양 끝각의 크기가 같으므로 합동. (손으로 짚으며) 같고, 같다. 똑같은 거예요. 단지, 삼각형 어떻게, 양옆으로 두 개 잡느냐, 위 아래로 두 개 잡느냐의 차이가 있겠지? 됐어?

\- 10월 25일, 재원 발표 -

12행까지는 재원이의 발표, 13행부터 28행까지가 재음미의 과정이다. 그 과정에서 박교사는 "치명적인 오류가 있는 것 같은데"(17행)라고 말하며, 비록 가정에 언급되었다 하더라도 증명을 쓰는 과정에서 그 형식을 갖출 필요가 있음을 강조한다. 또한 26행에서 볼 수 있듯이, 박교사의 재현은 재원이가 발표한 내용을 간략하게 추려서 명확하게 전달하는 역할을 수행하며, 28행에서는 처음의 선택만 다르고 동일한 구조를 갖는 증명 방식이 존재함을 말해줌으로써 추론에 대한 부가적인 설명이라는 목적을 수행한다. 이런 의미에서 박교사의 재현은 학생들의 증명 방식을 보강함으로써 자신의 증명 방식과 일치시켜가려는 노력으로 볼 수 있다.

2.3. 증명 전개 방식과 화법

박교사는 증명에 대한 고유의 전개 방식을 가지고, 약간씩의 변형을 허용하는 범위 내에서 지속적인 교섭을 전개한다. 가장 지배적으로 나타나는 방식은 다음과 같다.

① 문제 읽기 : 박교사 본인이 직접 읽기도 하고, 개별 학생을 지목하여 읽도록 한다.
② 아이디어 구안을 통한 증명 : 주로 그림에 기호로 표시해가며 말로 증명한다.
③ 가정 및 결론 확인 : 항상 학생들로 하여금 문제에 제시된 명제로부터 구분하도록 한다.
④ 기호화하기 : 구분된 가정과 결론을 기호화, 문자화하는 과정을 반드시 거친다.
⑤ 증명 실행 : 형식을 갖추어 칠판에 증명을 써가며 설명한다.

아이디어 구안을 통한 증명 단계는 문제 읽기 다음에 나타나는 경우도 있고, 기호화하기 다음에 나타나는 경우도 있지만 절대 누락되지는 않는다. 이 단계를 아주 강조한 두 경우[2]에서만 가정 및 결론을 확인하고 기호화 하는 단계가 누락된 것을 발견할 수 있었다. 한편, 이미 증명할 명제가 기호화 되어 있는 경우에 한해서만 기호화하기 단계가 생략된다.

한 달이 지난 10월 24일 재원이의 발표 장면에서 재원이가 구사하는 방식, 특히 문제를 읽고 가정과 결론을

2) 삼각형의 외심과 내심에서 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 사실, 세 각의 이등분선의 한 점에서 만난다는 사실의 증명

확인하고 스스로 기호화 한 후 증명을 실행해가는 면모는 박교사의 그것과 상당히 닮아있음을 알 수 있다. 한편 10월 25일 재원이의 발표 이후 이어지는 박교사의 재현은 닮아가고 있는 증명 방식을 더더욱 일치시키려는 박교사의 노력의 일환이다. 이런 방식은 이후 평행사변형의 성질부터 정사각형을 거쳐 등변사다리꼴의 성질까지 이어지는 내용의 전개 속에서도 변함없이 유지가 되며, 11월이 되면 학생들의 발표에서도 박교사의 방식의 자연스럽게 표출되는 것을 확인할 수 있다. 다음 에피소드를 통해 양자의 방식의 거의 일치함을 볼 수 있다. 11월 3일, 지애의 발표 장면이며, 지애는 평행사변형이 직각사각형이 되기 위한 조건 중 하나인 '한 내각이 직각'인 경우에 대해 증명한다.

문제 2 다음 조건을 만족하는 평행사변형은 직사각형임을 증명하여라.
(1) 한 내각이 직각인 평행사변형
(2) 두 대각선의 길이가 같은 평행사변형

<그림 18> 교과서 [문제 2]

1 박교사 우리 2번에 (1)번, 먼저 한 번 볼까? 직사각형이 되는 조건 중에 하나가 (이때 지애는 앞으로 나간다) 한 내각이 직각인 평행사변형은 직사각형이다. 이거 지금 증명합니다.

2 지애 (앞으로 나와서 칠판을 보며 선다) *한 내각이 90도, 가정이 한 내각이 90도이고 결론은 사각형, 평행사변형 ABCD는 직사각형이다 니까, 우선, 직사각형의 정의는 네 각의 크기가 같다이니까, 결론은 A, 각 A, B, C, D가 같다고 놓습니다.* 증명하면, 어, 만약에 각 A가 90도라 그러면, 어, C, 평행사변형에서, 대각의 크기가 같잖아. 그래서 A하고 C가 90도로 같아지고, 다음에 B하고 C, B하고 D가 대각으로 같잖아. (A와 C를 짚으며) 이거하고, 이거하고 90도로 같아서 180돈데, 360도에서 빼면 이 각(B와 D)의 크기가 180도잖아. B하고 D 크기가 같으니까, 어, 180을 2로 나누면, 90도가 되서, B하고 D가 90도가 되서, 평행사변형 ABCD는 직사각형.

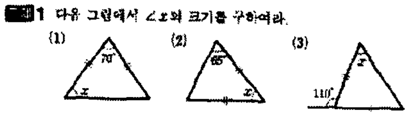
\- 11월 3일, 지애 발표 -

지애는 가정과 결론을 구분하는 것, 그리고 동시에 양자를 기호화 하는 것, 그림에 표시하는 것, 화법 등에서 교사의 전개방식과 흡사한 양상을 보여주고 있다.

3. 내용의 진화

박교사의 교실에서 사용한 교과서에는 "도형에 관한 명제를 증명할 경우 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고 가정과 그에 관련된 정의, 정리, 성질을 이용하여 결론을 이끌어내면"(강행고 외, 2002, p. 44) 된다고 명시되어 있다. 이어서 7-나 단계에 제시된 맞꼭지각의 성질, 평행선의 성질, 삼각형의 내각과 외각의 성질, 합동인 도형의 성질, 삼각형의 합동조건을 "기본 성질"이라는 이름으로 제시하여, 도형에 관한 명제를 증명하는 수단으로 사용가능함을 밝히고 있다. Ball과 Bass(2000)는 이런 '기본성질'처럼 "공적 지식의 기초(base of public knowledge)"라고 하여 "특정 공동체에서 수학적 주장을 하고 그 주장을 정당화하기 위해 공적으로 사용 가능한 수학 지식"(Ball & Bass, 2000, p. 201)이 있음을 설명한다. 그런데, 이는 아직은 교과의 권위와 교수의 형식적 전개가 부여한 토포스(topos)이며, 공동체의 레벤스벨트(lebenswelt) 이전이다. 공동체 내의 상호작용을 통해 토포스는 구성원들의 인지 과정에 포섭되며, 개개인의 틀을 형성(Krummheuer, 1995)한다. 이 과정은 구성원들이 수학이라는 체제(system)에 익숙해지는 과정이기도 한다. 기본 성질이라고 하는 것, 그리고 "이미 증명된 것", 정리 또한 구성원의 생활 세계로 들어오기 전까지는 어디까지는 외부자의 논리이며, 부단한 교섭을 통해 그곳으로 들어올 때만이 비로소 고유의 자격을 획득하는 것이다. 우리는 박교사의 2학기 수업에서 내용의 진화라는 측면을 이렇듯 외부의 틀에서 내부의 세계로의 편입 과정이라는 관점에서, 박교사와 학생들의 상호작용 속에서의 시간의 흐름에 따라 그 궤적을 추적하였다. 다시 말해, 기본성질, 정리들이 수업이 전개되어감에 따라 자연스러운 그들만의 틀에 어떻게 포섭되어 가는지를 개별 화자들의 논증 구조를 만드는 과정 속에서 살펴볼 수 있었다.

대표적인 기본성질로, '삼각형의 세 내각의 합은 180도'라는 사실은 증명 수업의 초기부터 그들의 틀에 내재되어 있음을 다음 대화를 통해 알 수 있다.



<그림 19> 교과서 [문제 1]

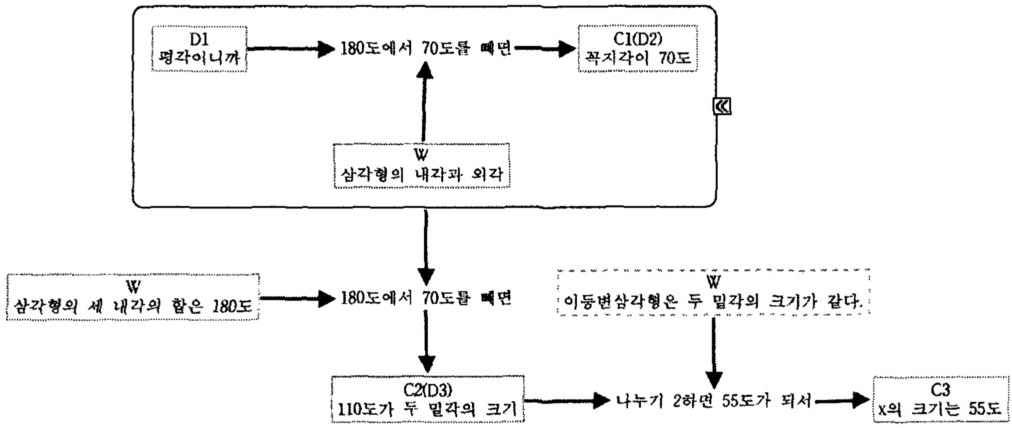
1	정원	(손으로 가리키며)이거, 어, 일단 꼭지각, 꼭지각의 크기를 알아야 되니까, 110도, 여기 평각이니까, 180도에서 110도 빼면 70도가 나오고, 꼭지각은 70도고, 어, 70도랑, *삼각형, 세, 삼각형의 세 각이, 세 삼각형, 세 내각의, 크기, 아이다, 각의 크기를 합하면, 180돈데,* 180도 빼기 70도 해서, 110도 나오면, 110도가 두 밑각의 크긴데, 하나씩 따로 있으니까, 나누기 2하면은 55도가 되서, x의 크기는 55가 됩니다. (박교사를 흘깃 본다)

- 10월 4일, 정원 발표 -

정원이가 설명하는 절차는 <그림 20>에서와 같이 D1 → C1(D2) → C2(D3) → C3의 순서로 전개되며, D1에서 C1, C1에서 C2로 이행되는 단계에서는 명시적으로 위 성질이 W로 제시되는 것을 확인할 수 있다. 조금 더 진화하면, 이 성질은 더 이상 논증의 과정에서 W로도 보이지 않게 된다.

다음으로, 이등변삼각형의 성질과 이등변삼각형이 되기 위한 조건이 내재화 되는 과정을 살펴보았다. 바로 다음 과정인 직각삼각형의 합동조건부터 이등변삼각형의 성질이 논증 과정에서 D혹은 W로 사용되기 시작한다. 박교사는 자신의 설명에서는 그 성질이 필요한 곳마다 정확한 표현을 통해 W로 제시하며, 학생들의 발표에서 누락이 되면, 보강해주는 과정에서 의식적으로 언급을 한다. 삼각형의 외심을 배우고 난 후, 규봉이가 나와서 발표하는 장면에서 이런 박교사의 지속적인 노력을 볼 수 있다.

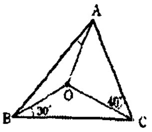
1	규봉	(종친다, 지애는 풀다말고 들어간다) 삼각형 ABC에서 점 O(영은 이라고 읽는다)는 외심이고, 이렇게 다 나와 있는데, 여기서 각 OAB를 구하려면, 여기서 그냥 예를 들어서, x를 이렇게 나타내면 이 세 각의 합은 90도니까, 각이 나와 있으니까 다 더하고, 더하니까 이걸 넘기고 하면은 z는 20도가 됩니다.
2	박교사	20도래. 20도 맞는데, 왜 합해서 90도가 되는지 설명할 수 있어요? 없어요? 설명할 수 있는 사람? 그냥 무조건 외각, 외심이 나오면 이 각의 합이 90도라고 하는데, 왜 그런지 설명할 수 있어야지. *왜 그럴까? 어, 지애야, 왜 그런거야?*
3	지애	저기요, 삼각형에서 저기도 40도에요.
4	박교사	여기도 40도래. 맞니?
5	학생	네
6	박교사	왜? 어. 외심은, 외심에서 각 꼭지점에 이르는 거리는 같으니까 *이등변 삼각형, 양 밑각의 크기 같다. 이등변 삼각형, 양 밑각의 크기 같다.* 이걸 x라고 하면 이등변 삼각형 양



<그림 20> 정원 발표

> 밑각의 크기는 같다. 모두 모두 더하면 180도. 다시 말하면, 두 번씩 다 더해 준거니까, x랑 40이랑 30이랑 더하면 180도의 반 90도가 되요. 외심의 성질이에요.
>
> \- 10월 18일, 규봉 발표-

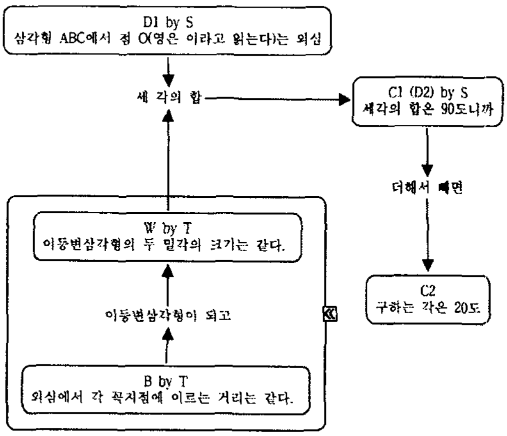
문제 2 △ABC에서 점 O는 외심이고, ∠OBC=30°, ∠OCA=40° 일 때, ∠OAB의 크기를 구하여라.



<그림 21> 교과서 [문제 2]

규봉이의 발표가 끝나는 동시에 박교사는 <그림 22>에서처럼 D1 → C1로 이행하는 것이 어떻게 가능한지 근거(W)를 전체 학생에게 제시해줄 것을 요구한다. 반복해서 요구하지만 별다른 반응이 없자, 박교사는 지애를 지목한다. 지애의 답변을 바탕으로 박교사는 W(이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.)를 다듬어진 형태로 제시한다. 한편 W를 요구하는 대목에서 박교사는 "왜 그런지 설명할 수 있어야지"라는 표현을 통해 논증 방식에 대한 지속적인 교섭을 수행하기도 한다.

시간이 흘러, 사각형의 성질을 배우는 단계로 넘어가서 수업이 진행될수록 이등변삼각형의 성질은 초기 '삼각형의 세 내각의 합'이 그랬던 것처럼 박교사와 학생들의 논증 전개에 아무런 장애를 일으키지 않음을 알 수 있다.



<그림 22> 규봉 발표

Ⅲ. 결 론

우리는 수학교실을 현상 그 자체로 이해하고, 그 속에서 학생들의 수학학습을 읽으려는 목적으로 먼저 수학수업의 두 행위 주체인 교사와 학생사이의 '틀의 차이'의 극복과정으로 수학학습을 정의하였다. 학습의 과정을 읽기 위해, 장기간의 참여관찰을 수행하고, 제보자들이 형성하고 있는 문화 모형 속에서의 상호교섭을 내용과 형식의 두 가지 측면에서 분석하여 틀의 간극이 극복되어 가는 과정을 파악하였다. 상호교섭의 주된 방식은 반복된 논증 속에서의 상호 참조(參照)와 차용(借用)이었으며, 지속적 협상의 산물은 인지적 상사(相似)임을 알 수 있었다.

상호교섭의 형식적인 측면에 대해서는 직·간접적인 교섭 모두를 살펴보았으며, 내용적인 측면은 '내용의 진화' 과정을 추적하였다. 박교사는 '가정과 결론을 구분하기', '거꾸로 사고하기' 등에 대한 직접적인 의사표현을 통해 학생들과 논증 과정 속에서 교섭을 수행하고, 끊임없는 '반복'을 통해 학생들에게 잉여성과 일관성을 제공함으로써 학습에 기여하려는 노력을 아끼지 않았다. 반복이라는 기제는 (1) 논증구조, (2) 재현, (3) 증명 전개 방식을 통해 구현되었다. 반복되어 제시되는 최소형식을 갖춘 논증구조는 학생들의 참조와 차용의 대상으로 작용했다. 그리고 박교사의 재현은 그 얼굴을 바꿔가며 대화의 원만한 흐름을 창출하고, 학생들이 흐름을 잃지 않도록 도와주었으며, 해석이 수반되어 학생들 간의 소통을 매끄럽게 하거나 문제의 소지가 있을 때 합의를 이끌어 내기도 했다. 한편, 재현을 통해 의사를 요약하여 정리하기도 하고, 부가적인 설명을 덧붙임으로써 박교사 자신의 방식을 종용하기도 하였다. 또 증명의 전개 방식을 확고한 하나의 방식을 집요하게 유지하며, 학생의 발표 과정에서도 그 방식이 표출되도록 안내하였다. 내용적인 측면 역시 주어진 사실들이 학생들의 레벤스벨트로 수용되어 논증 과정에 자연스럽게 내재되어 가는 것을 우리는 이 학습공동체의 문화 모형에 대한 분석을 통해 확인할 수 있었다.

박교사는 면담 과정에서 풍부한 발표환경의 조성 속에서 학생들이 자신의 방법을 다른 학생들에게 설명하고, 질문에 답변하고 토론하는 과정이 학생들의 지적 자

율성을 제고하는 방편이 된다고 말했다. 우리가 분석한 교실의 문화 모형은 이렇듯 박교사의 신념과 노력이 반영된, 박교사의 중재에 의해 유목적적으로 진행된 부단한 상호교섭 과정의 산물이다. 학생들은 교사의 발화 패턴, 교섭 진행 방식, 교섭의 내용 그 자체를 자신들만의 의미 구성방식을 통해 수용하는 과정에서 수학공동체가 갖는 사고의 틀을 교사라는 매개를 통해 알고 접하게 되며, 자신들의 틀과의 차이를 인식하고 그 차이를 극복해 간다는 것을 알 수 있으며, 이를 곧 수학 학습과정으로 볼 수 있다.

참 고 문 헌

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙 (2002). 수학 8-나, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

권민철 역, Sunkel, W. (2005). 수업현상학, 서울: 학지사.

나미영 (2006). 풍부한 발표환경에서 상호작용에 관한 반성적 실행연구, 서울대학교.

이희봉 역, Spradley, J. P. (1988). 문화탐구를 위한 참여관찰방법, 서울: 대한교과서주식회사.

한국문화인류학회 (2003), 처음 만나는 문화인류학, 서울: 일조각

한국사회언어학회 역, Bonvillain, N. (2002). 문화와 의사소통의 사회언어학, 서울: 한국문화사.

Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the national society of the study of education, Constructivism in education* (pp.193-224). Chicago: University of Chicago Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism.* Berkely and Los Angeles: University of California Press.

Cobb, P.; Stephan, M.; McClain, K. & Gravemeijer, K. (2001). Participating in mathematical practices. *Journal of the learning sciences,* **10(1/2)**, pp.113-163.

Cobb, P. (2002). Reasoning with tools and inscriptions. *Journal of the learning sciences,* **11(2-3)**, pp.187-215.

Forman, E. A.; Larreamendy-Joerns, J.; Stein, M. K. & Browns, C. A. (1998). "Your're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and instruction,* **8(6)**, pp.527-548.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauresfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

O'Connor, M. C. (1999). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. In M. L. B. Magdalene Lampert (Ed.), *Talking mathematics in school* (pp.17-55). New York: Cambridge University Press.

Seeger, F.; Vöigt, J. & Waschescio, U. (1998). *The culture of the mathematics classroom.* Cambridge: Cambridge University Press.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of mathematical behavior,* **21**, pp.459-490.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updated Edition ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Vöigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom process: Social interaction and learning mathematics. In L. P. Stefee; P. Nesher; P. Cobb; G. A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning.* New jersey: LEA.

Whitenack, J. W. & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of mathematical behavior,* **21**, pp.441-457.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* **27**, pp.458-477.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of mathematical behavior,* **21**, pp.423-440.

Overcoming framing-difference between teacher and students

- an analysis of argumentation in mathematics classroom -

Kim, Dong Won
Department of Mathematics Education, College of Education, Seoul National University,
San 56-1, Sillim-dong, Gwanak-gu, Seoul, 151-748, Korea
E-mail: pourpeda@naver.com

We define mathematical learning as a process of overcoming framing difference of teachers and students, two main subjects in a mathematics class. We have reached this definition to the effect that we can grasp a mathematical classroom per se and understand students' mathematical learning in the context. We could clearly understand the process in which the framing differences are overcome by analyzing mutual negotiation of informants in specific cultural models, both in its form as well as in its meaning. We review both of the direct and indirect forms of negotiation while keeping track of 'evolution of subject' in terms of content of negotiation. More specifically, we discuss direct negotiation briefly and review indirect negotiation from three distinct themes of (1) argument structure, (2) revoicing, and (3) development patterns and narrative structure of proof. In addition, we describe the content of negotiation under the title of 'Evolution of Subject.' We found that major modes of mutual negotiation are inter-reference and appropriation while the product of continued negotiation is inter-resemblance.

* ZDM Classification : C53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C60
* Key Words : classroom culture, argumentation, discourse analysis, framing-difference, revoicing